

FRP 積層構造の振動特性評価と解析法に関する研究

The Study on the Vibration Characteristics Evaluation and Analytical Method of FRP Laminated Composite Plates

成田 大祐* 太田 佳樹**

Daisuke Narita Yoshiki Ohta

概要

FRP(繊維強化プラスチック)を始めとした複合材料は設計できる材料と呼ばれ、繊維の積層方法により多彩な特性を持たせることが可能である。これら複合材料の振動に関する理論的な研究はいくつかあるが、具体的な比較検討、特に減衰特性に関してはあまり行われていない。そこで本研究では古典積層理論、高次せん断変形理論、そして各層ごとの変形を仮定する離散層別理論に基づく3つの解析モデルに焦点を当て、数値計算結果について比較検討を行った。

具体的には周辺自由支持(FFFF)のCFRP(炭素繊維強化プラスチック)8層対称積層板について、リッツ法を使用して厚さ比およびアスペクト比(縦横比)を変えた場合の固有振動数と比減衰容量の計算を行った。そして、その結果から3つの理論による違いについて考察すると同時に、それらの計算精度を確認するために、振動モード形を含めて汎用 FEM(Finite Element Method)解析による計算結果との比較も行った。

1. 序論

複合材料である FRP(繊維強化プラスチック)は以前より様々な製品に使用されている。その中でも CFRP は、その優れた比強度や比剛性のため、自動車等への利用が増えており、近年の電気自動車へのシフトにおいてこれからも更なる利用の増加が見込まれる。ここで自動車等へ使用する際に振動に関する振動特性評価が重要な要素となる。

これら複合材料の振動に関する理論的研究は古くから盛んに行われている。例えば積層材を力学的に等価な異方性板にモデル化する積層理論(LT: Lamination Theory)としては、古典積層理論(CLT: Classical Lamination Theory)⁽¹⁾、一次せん断変形理論(FSDT: First-order Shear Deformation Theory)、高次せん断変形理論(HSDT: Higher-order Shear Deformation Theory)等が提案されている。また、各層の変形と連続条件から平板全体の変形を定式化する多層理論(MLT: Multi-Layer Theory)⁽²⁾、そして LT と MLT の中間的な理論である各層間の面内変位により平板全体の変形を考えるが、等価な異方性板として定式化する離散層別理論(DLT: Discrete

Layer Theory)⁽³⁾⁽⁴⁾も提案されている。これらの理論に関して、固有振動数評価における適用範囲についてはある程度は検討されているものの、特に DLT に関しては少なく、さらに減衰特性評価に関してはあまり検討されていない。

そこで、本研究では CFRP 積層平板の減衰自由振動問題を考え、著者の一人である太田ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾が各力学モデルに基づいてエネルギー法の1つであるリッツ法を用いてそれぞれ定式化を行ったものを検証する。ここでは CFRP 積層平板における厚さとアスペクト(縦横)比を変化させて固有振動数と比減衰容量を計算し、各理論の違いを深く考察する。更に汎用 FEM ソフトの1つである ANSYS を使用して計算した固有振動数と振動モード形との比較により、その精度の検証も行う。

2. 離散層別理論(DLT)に基づく定式化

図1にFFFFである対称積層平板(層数 $2N$)の形状と座標系を示す。ここでは x , y 方向長さをそれぞれ a , b , 厚さを h とする。また、任意の点における x , y , z 方向の変位をそれぞれ u , v , w で表す

* 北海道科学大学未来デザイン学部メディアデザイン学科

** 北海道科学大学工学部機械工学科

こととする。

なお、本研究では CLT, HSDT, DLT に基づいてそれぞれ数値計算を行うが、紙面の都合のため、DLT に関する解析のみを表記することとする。

図 2 にそれぞれの層に線形補間関数を用いた x 方向の面内変位 u の分布を示す。この仮定に基づく、任意の点における各方向変位 u , v , w は

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + \sum_{\alpha=1}^{2N} U_{\alpha}(x, y, t) \phi^{\alpha}(z) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + \sum_{\alpha=1}^{2N} V_{\alpha}(x, y, t) \phi^{\alpha}(z) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここで、 w_0 は中央面における z 方向の変位であり、 $\phi^{\alpha}(z)$ は線形補間関数、 U_{α} , V_{α} は α 番目の各層の上面における変位を表す。

これらから、DLT を用いた場合の積層板のひずみエネルギーは

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{2N} 2F_{11}^{\alpha} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{2N} \sum_{\alpha=1}^{2N} D_{11}^{\alpha, \bar{\alpha}} \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_{\bar{\alpha}}}{\partial x} \right) + 2A_{12} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{2N} 2F_{12}^{\alpha} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial y} \right) + \sum_{\alpha=1}^{2N} 2F_{12}^{\alpha} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{2N} \sum_{\alpha=1}^{2N} 2D_{12}^{\alpha, \bar{\alpha}} \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial V_{\bar{\alpha}}}{\partial y} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{2N} 2F_{22}^{\alpha} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial y} \right) + \sum_{\alpha=1}^{2N} \sum_{\alpha=1}^{2N} D_{22}^{\alpha, \bar{\alpha}} \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial V_{\bar{\alpha}}}{\partial y} \right) \\ &\quad + A_{44} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{2N} 2F_{44}^{\alpha} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) (V_{\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^{2N} \sum_{\alpha=1}^{2N} D_{44}^{\alpha, \bar{\alpha}} (V_{\alpha}) (V_{\bar{\alpha}}) \\ &\quad + A_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{2N} 2F_{55}^{\alpha} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) (U_{\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^{2N} \sum_{\alpha=1}^{2N} D_{55}^{\alpha, \bar{\alpha}} (U_{\alpha}) (U_{\bar{\alpha}}) \\ &\quad + A_{66} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{2N} \sum_{\alpha=1}^{2N} D_{66}^{\alpha, \bar{\alpha}} \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial V_{\bar{\alpha}}}{\partial x} \right) + 2A_{66} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{2N} 2F_{66}^{\alpha} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x} \right) + \sum_{\alpha=1}^{2N} 2F_{66}^{\alpha} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial y} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{2N} 2F_{66}^{\alpha} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x} \right) + \sum_{\alpha=1}^{2N} 2F_{66}^{\alpha} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial y} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{2N} \sum_{\alpha=1}^{2N} 2D_{66}^{\alpha, \bar{\alpha}} \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial U_{\bar{\alpha}}}{\partial y} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^{2N} \sum_{\alpha=1}^{2N} D_{66}^{\alpha, \bar{\alpha}} \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial U_{\bar{\alpha}}}{\partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (2)$$

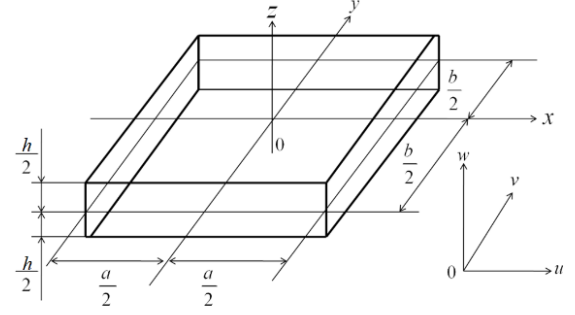


Fig.1. Dimensions and coordinates of a laminated composite plate.

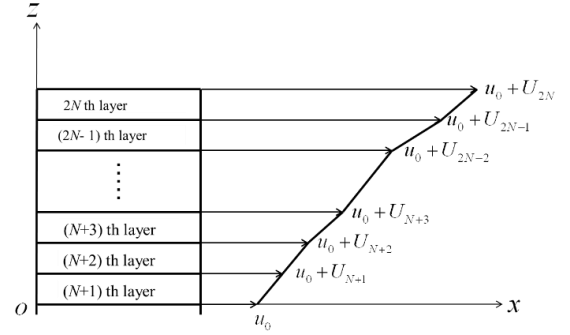


Fig.2. Assumption of displacement u in DLT.

と表すことができる。ここで A_{ij} , $D_{ij}^{\alpha, \bar{\alpha}}$, F_{ij}^{α} は積層板の等価剛性であり

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{2N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij} dz \\ D_{ij}^{\alpha, \bar{\alpha}} (i, j = 1, 2, 6) &= \sum_{k=1}^{2N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij} \phi^{\alpha} \phi^{\bar{\alpha}} dz \\ D_{ij}^{\alpha, \bar{\alpha}} (i, j = 4, 5) &= \sum_{k=1}^{2N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial \phi^{\bar{\alpha}}}{\partial z} dz \\ F_{ij}^{\alpha} (i, j = 1, 2, 6) &= \sum_{k=1}^{2N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij} \phi^{\alpha} dz \\ F_{ij}^{\alpha} (i, j = 4, 5) &= \sum_{k=1}^{2N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij} \frac{\partial \phi^{\alpha}}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (3)$$

で定義される。ここで \bar{Q}_{ij} は k 番目の層のヤング率 E_L , E_T , せん断弾性係数 G_{LT} , G_{TT} , ポアソン比 ν_{LT} , ν_{TT} (L 軸: 繊維方向, T 軸: 繊維と直交方向) から定まる剛性係数である。更に積層板の運動エネルギーは

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[I_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{2N} 2I^{\alpha} \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial t} \right) \right. \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{2N} \sum_{\alpha=1}^{2N} I^{\alpha, \bar{\alpha}} \left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial U_{\bar{\alpha}}}{\partial t} \right) + I_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{2N} 2I^{\alpha} \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial t} \right) \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^{2N} \sum_{\alpha=1}^{2N} I^{\alpha, \bar{\alpha}} \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial V_{\bar{\alpha}}}{\partial t} \right) + I_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここで $I_0, I^\alpha, I^{\alpha, \bar{\alpha}}$ は

$$(I_0, I^\alpha, I^{\alpha, \bar{\alpha}}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, \varphi^\alpha, \varphi^\alpha \varphi^{\bar{\alpha}}) dz \quad (5)$$

で定義される慣性量である。ここで ρ は代表密度である。

3. リッツ法を用いた振動解析

リッツ法とは積層板の運動エネルギーとひずみエネルギーの最大値をそれぞれ T_{max} と U_{max} とした場合、ラグランジュ関数 $L = T_{max} - U_{max}$ を極小となる条件を用いて、振動数方程式を導出する方法である。なお、本研究では解析を簡単にするため次の無次元量を導入する。

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{x}{a/2}, \quad \varsigma = \frac{y}{b/2}, \quad \varepsilon = \frac{z}{h}, \quad l = \frac{b}{a}, \quad H = \frac{h}{a} \\ \bar{u}_0 &= \frac{u_0}{h}, \quad \bar{v}_0 = \frac{v_0}{h}, \quad \bar{w}_0 = \frac{w_0}{h} \\ \bar{U}_\alpha &= \frac{U_\alpha}{h}, \quad \bar{V}_\alpha = \frac{V_\alpha}{h} \\ \bar{A}_{ij} &= \frac{A_{ij}}{D_0/h^2} \\ \bar{D}_{ij}^{\alpha, \bar{\alpha}} &= \frac{D_{ij}^{\alpha, \bar{\alpha}}}{D_0/h^3} (i, j = 1, 2, 6), \quad \bar{D}_{ij}^{\alpha, \bar{\alpha}} = \frac{D_{ij}^{\alpha, \bar{\alpha}}}{D_0/h^4} (i, j = 4, 5) \\ \bar{F}_{ij}^\alpha &= \frac{F_{ij}^\alpha}{D_0/h^2} (i, j = 1, 2, 6), \quad \bar{F}_{ij}^\alpha = \frac{F_{ij}^\alpha}{D_0/h^3} (i, j = 4, 5) \\ \bar{I}_0 &= \frac{I_0}{\rho h}, \quad \bar{I}^\alpha = \frac{I^\alpha}{\rho h}, \quad \bar{I}^{\alpha, \bar{\alpha}} = \frac{I^{\alpha, \bar{\alpha}}}{\rho h} \\ D_0 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで D_0 は代表曲げ剛性である。本研究では対称積層平板の自由振動問題を想定しているため、変位関数は

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(\xi, \varsigma, t) &= \bar{U}(\xi, \varsigma) \sin \omega t \\ \bar{U}_\alpha(\xi, \varsigma, t) &= \bar{U}_\alpha(\xi, \varsigma) \sin \omega t \\ \bar{v}_0(\xi, \varsigma, t) &= \bar{V}(\xi, \varsigma) \sin \omega t \\ \bar{V}_\alpha(\xi, \varsigma, t) &= \bar{V}_\alpha(\xi, \varsigma) \sin \omega t \\ \bar{w}_0(\xi, \varsigma, t) &= \bar{W}(\xi, \varsigma) \sin \omega t \end{aligned} \quad (7)$$

と表す。ここで ω は角振動数である。

次に FFFF の境界条件の場合、 $\bar{U}, \bar{U}_\alpha, \bar{V}, \bar{V}_\alpha, \bar{W}$ をべき級数により以下のように表す。

$$\begin{aligned} \bar{U}(\xi, \varsigma) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \bar{U}_{ij} f_i(\xi) g_j(\varsigma) \\ \bar{U}_\alpha(\xi, \varsigma) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \bar{U}_{ij}^\alpha f_i(\xi) g_j(\varsigma) \\ \bar{V}(\xi, \varsigma) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \bar{V}_{ij} f_i(\xi) g_j(\varsigma) \quad \left(\begin{matrix} f_i(\xi) = \xi^{i-1} \\ g_j(\varsigma) = \varsigma^{j-1} \end{matrix} \right) \\ \bar{V}_\alpha(\xi, \varsigma) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \bar{V}_{ij}^\alpha f_i(\xi) g_j(\varsigma) \\ \bar{W}(\xi, \varsigma) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \bar{W}_{ij} f_i(\xi) g_j(\varsigma) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで $\bar{U}_{ij}, \bar{U}_{ij}^\alpha, \bar{V}_{ij}, \bar{V}_{ij}^\alpha, \bar{W}_{ij}$ は未定係数である。

さらに、式(2)、(4)から導かれる最大ひずみエネルギーと最大運動エネルギーに式(6)～(8)を代入し、ラグランジュ関数 L にエネルギーの停留条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{U}_{ij}} &= \frac{\partial L}{\partial \bar{U}_{ij}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \bar{V}_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial \bar{V}_{ij}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \bar{W}_{ij}} = 0 \\ (i &= 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; \alpha = 1, 2, \dots, 2N) \end{aligned} \quad (9)$$

を適用すると、振動数方程式

$$[[K_{DLT}] - \lambda^2(1+i\eta)][M_{DLT}] = 0 \quad (10)$$

を得ることができる。ここで $[K_{DLT}]$, $[M_{DLT}]$, λ はそれぞれ剛性マトリックス、質量マトリックス、

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} \quad (11)$$

で定義できる固有振動数を無次元化した振動数パラメータであり、 η は比減衰容量である。なお、ここでは積層平板の減衰評価を実施するので、CFRP材の複素弾性定数を用いて複素固有値問題として数値計算を行うこととする。

4. リッツ法における項数の検討

表 1, 2 は CFRP UD プリプレグシートを交互に 0° と 90° に対称積層した 8 層クロスプライ積層板 $[(0/90)_2]_s$ ($b/a = 1.0$, $h/a = 0.001$) について式(8)の項数 ($I=J$) を 5 から 10 まで増加した場合、それぞれ 3 つの解析モデルで得られる 1 次から 4 次の振動数パラメータと比減衰容量の収束状況を示す。また、本研究において使用した CFRP の材料定数を表 3 に示す。この結果から有効数字 4 桁で十分な精度の解が得られる項数 8 を採用する。なお、比減衰容量

Table1. Convergence study for DLT, HSDT and CLT solutions of frequency parameters.

$I=J$	Frequency parameters											
	CLT				HSDT				DLT			
	1st	2nd	3rd	4th	1st	2nd	3rd	4th	1st	2nd	3rd	4th
5	19.06	59.41	71.13	84.62	19.06	59.41	71.13	84.62	19.06	59.41	71.13	84.62
6	18.98	59.41	71.03	84.62	18.98	59.41	71.03	84.62	18.98	59.40	71.03	84.62
7	18.98	58.90	70.30	83.90	18.98	58.90	70.30	83.90	18.98	58.90	70.30	83.90
8	18.97	58.90	70.30	83.90	18.97	58.90	70.30	83.90	18.98	58.90	70.30	83.90
9	18.97	58.90	70.30	83.90	18.97	58.90	70.30	83.90	18.98	58.90	70.29	83.90
10	18.97	58.90	70.30	83.90	18.97	58.90	70.30	83.90	18.97	58.90	70.30	83.90

Table2. Convergence study for DLT, HSDT and CLT solutions of specific damping.

$I=J$	Specific damping capacities ($\times 10^{-3}$)											
	CLT				HSDT				DLT			
	1st	2nd	3rd	4th	1st	2nd	3rd	4th	1st	2nd	3rd	4th
5	15.69	2.329	6.345	1.691	15.69	2.329	6.345	1.692	15.75	2.329	6.345	1.697
6	15.61	2.329	6.294	1.691	15.61	2.329	6.295	1.692	15.61	2.323	6.293	1.691
7	15.61	2.329	6.252	1.691	15.61	2.329	6.252	1.691	15.60	2.330	6.258	1.692
8	15.61	2.329	6.252	1.691	15.60	2.329	6.252	1.691	15.59	2.320	6.247	1.691
9	15.61	2.329	6.251	1.691	15.60	2.329	6.251	1.691	15.78	2.325	6.258	1.720
10	15.61	2.329	6.251	1.691	15.61	2.329	6.251	1.691	15.55	2.330	6.248	1.689

Table3. Material property for CFRP.

E_L	138 GPa	ν_{LT}	0.25
E_T	6.9 GPa	ν_{TT}	0.016
G_{LT}	4.5 GPa	η_L	0.0015
G_{TT}	3.5 GPa	η_T	0.01
ρ	1,570 kg/m ³	η_{LT}	0.016

については十分収束していない場合も見受けられるが、項数8においてほぼ収束していると判断する。

4. アルミニウム平板による計算結果と考察

3つの解析法を用いてCFRP積層板の振動解析を行うにあたり、等方性材料であるアルミニウム合金平板 ($\nu = 0.343$, $b/a = 1.0$, $h/a = 0.01$) について、1次から6次の振動数パラメータの計算を行った。比較対象として、Lemke⁽¹⁾による近似値とANSYS(要素分割数 $16 \times 16 = 256$)による振動数パラメータを表4に示す。表中のDifference(%)はLemkeの近似値との差であるが、各理論値ともほぼ1%以内であり、さらにANSYSによる結果ともよく一致している。

図3に同様にCLTモデル、図4にANSYSから求められた1次から6次の振動モード形を示す。どの次数についても同じモード形となっていることから、本理論モデルの妥当性が十分確認できる。なお、ここには表記はしないが、Lemke⁽¹⁾による振動モード形とも一致している。

Table4. Comparisons of frequency parameters for an isotropic plate from Lemke⁽¹⁾, CLT, HSDT, DLT and ANSYS.

Mode	Frequency parameters				
	Lemke ⁽¹⁾	CLT	HSDT	DLT	ANSYS
1st	13.09	13.08	13.06	13.06	13.09
Difference(%)	-	-0.08	-0.18	-0.18	0.01
2nd	19.23	19.11	19.10	19.10	19.19
Difference(%)	-	-0.64	-0.68	-0.68	-0.23
3rd	24.58	24.47	24.46	24.46	24.64
Difference(%)	-	-0.46	-0.50	-0.50	0.25
4th	62.68	62.47	62.36	62.36	62.97
Difference(%)	-	-0.33	-0.51	-0.50	0.47
5th	68.35	67.78	67.65	67.66	68.78
Difference(%)	-	-0.82	-1.01	-1.01	0.63
6th	77.38	76.93	76.79	76.80	78.56
Difference(%)	-	-0.58	-0.76	-0.75	1.52

5. CFRP 積層平板による計算結果と考察

次に8層対称CFRP積層板 $[(0/90)_2]_s$ において厚さ比 h/a およびアスペクト比 b/a を変化させた場合、3つの理論による結果の違いについて検討を行う。

5.1 厚さ比による変化

アスペクト比を1.0として、厚さ比を0.001から0.1まで変化させた場合の各理論とANSYSによる1次から6次の振動数パラメータの計算結果を表5に、比減衰容量を表6に示す。表5より厚さ比が変

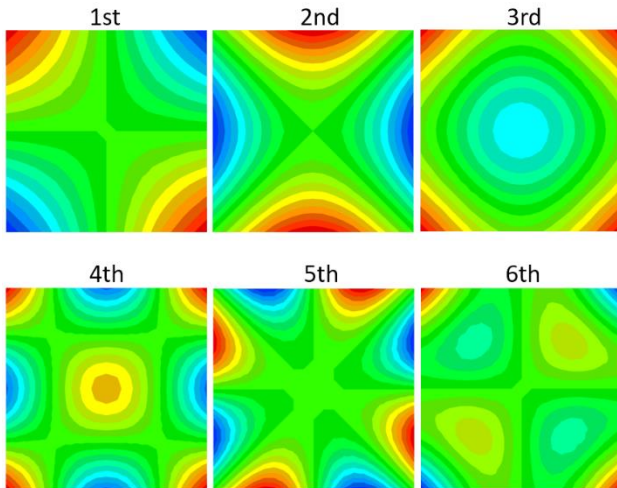


Fig.3. Vibration mode shapes obtained from CLT.

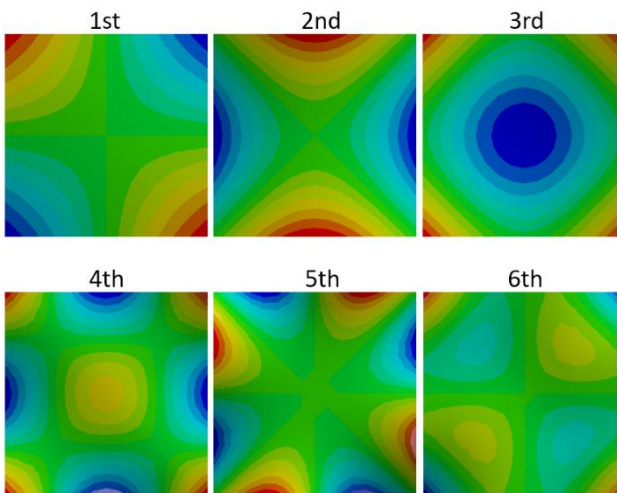


Fig.4. Vibration mode shapes obtained from ANSYS.

化しても ANSYS の計算値と HSDT および DLT の計算値がよく一致することがわかる。さらに図 5 に示す CLT ($h/a=0.01$) と図 6 に示す ANSYS の振動モード形も一致していることがわかる。なお、表 6 より HSDT と DLT の結果は振動数パラメータ同様によく一致していることがわかる。

図 7, 8 に横軸を厚さ比, 縦軸を 1 次から 6 次の振動数と比減衰容量として, EXCEL の平滑線機能により描画したグラフを示す。

図 7 より厚さ比が大きくなるほど, HSDT および DLT は振動数パラメータが小さくなり, 図 8 より比減衰容量は逆に大きくなっている。CLT は平板においては厚さ比によらず計算値が一定で, 厚さ比が大きくなればなるほど差は大きくなる。特に振動数パラメータ, 比減衰容量共に厚さ比が 0.01 を超えると急激に差が大きくなっていることがわかる。つま

Table5. Comparison of frequency parameters for CFRP from CLT, HSDT, CLT and ANSYS.

h/a	Mode	Frequency parameters					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
-	CLT	18.97	58.90	70.30	83.90	92.12	128.8
0.001	HSDT	18.97	58.90	70.30	83.90	92.12	128.8
	DLT	18.98	58.90	70.30	83.90	92.12	128.8
	ANSYS	19.00	59.20	70.67	84.32	92.59	129.7
0.005	HSDT	18.97	58.89	70.27	83.87	92.07	128.7
	DLT	18.97	58.89	70.27	83.87	92.07	128.7
	ANSYS	19.00	59.18	70.64	84.28	92.54	129.6
0.01	HSDT	18.94	58.84	70.18	83.76	91.93	128.4
	DLT	18.94	58.84	70.18	83.76	91.93	128.4
	ANSYS	18.98	59.13	70.55	84.18	92.40	129.3
0.05	HSDT	18.43	57.45	67.74	80.67	87.91	120.7
	DLT	18.43	57.41	67.70	80.63	87.86	120.6
	ANSYS	18.51	57.67	68.04	81.01	88.30	121.3
0.1	HSDT	17.60	53.77	62.30	73.12	78.81	105.5
	DLT	17.59	53.60	62.11	72.89	78.56	105.0
	ANSYS	17.67	53.81	62.33	73.15	78.87	105.4

Table6. Comparison of specific damping capacities for CFRP from CLT, HSDT and DLT.

h/a	Mode	Specific damping capacities ($\times 10^{-3}$)					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
-	CLT	15.61	2.329	6.252	1.691	4.028	6.824
0.001	HSDT	15.60	2.329	6.252	1.691	4.028	6.825
	DLT	15.59	2.320	6.247	1.691	4.019	6.807
0.005	HSDT	15.61	2.335	6.256	1.701	4.037	6.832
	DLT	15.61	2.335	6.256	1.701	4.037	6.832
0.01	HSDT	15.61	2.352	6.267	1.732	4.064	6.856
	DLT	15.61	2.353	6.268	1.733	4.065	6.857
0.05	HSDT	15.71	2.868	6.634	2.632	4.866	7.499
	DLT	15.71	2.891	6.655	2.647	4.881	7.517
0.1	HSDT	15.81	4.173	7.636	4.688	6.721	8.823
	DLT	15.82	4.257	7.709	4.765	6.793	8.903

り厚さ比が 0.01 程度までは 3 つの理論にあまり差はないが, 厚くなると CLT に比較して HSDT と DLT が明らかに近い振動数となっていて, 精度が高いことがわかる。なお, 比減衰容量が次数により大小に変化しているのは振動モード形による影響だと考えられる。

また, HSDT と DLT においては ANSYS と比較を行ってもどちらが優位かの明らかな判断はできない。

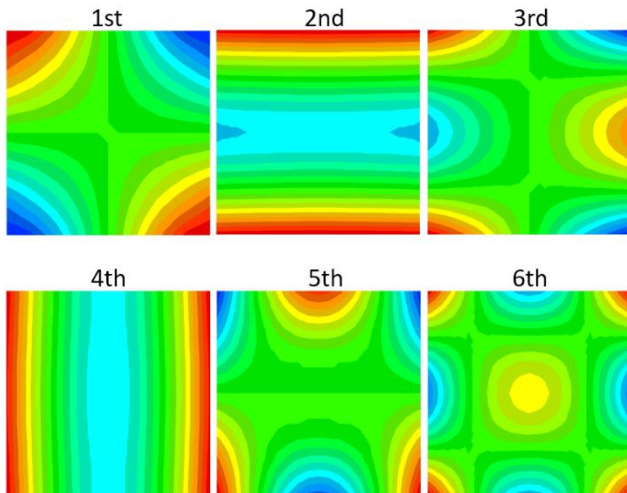


Fig.5. Vibration mode shapes obtained from CLT.

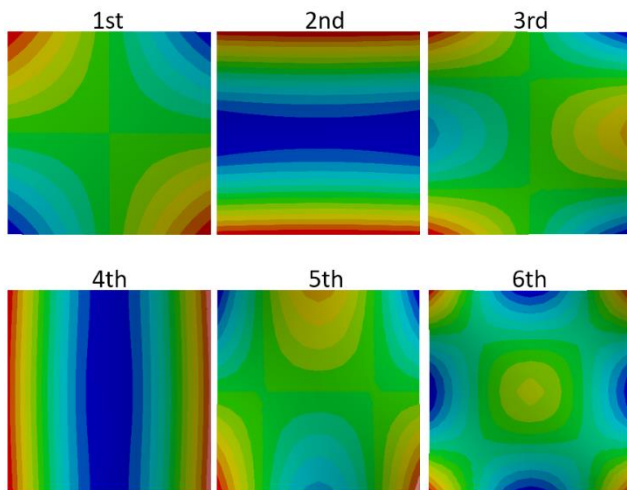


Fig.6. Vibration mode shapes obtained from ANSYS.

5.2 アスペクト比による変化

厚さ比が 0.001, 0.01, 0.1 の場合について、アスペクト比を 1.0 から 3.0 まで変化させて 1 次から 6 次の振動数パラメータを計算したが、これまでの計算結果同様に薄い場合はあまり差が生じなかったため、紙面の都合もあり、明確な差が生じた厚さ比 0.1 の場合の振動数パラメータを表 7 に、比減衰容量を表 8 に示す。更に、図 9 と図 10 に横軸をアスペクト比、縦軸を 1 次から 6 次の振動数と比減衰容量として、平滑線機能により描画したグラフを示す。

表 7 より、振動数パラメータについては ANSYS(要素分割数はアスペクト比が 2 で最大 $16 \times 32 = 512$) と HSDT, DLT はよく一致していることがわかる。

図 9 より、アスペクト比が大きくなると振動数パラメータが小さくなるのは CLT も同じ傾向になっ

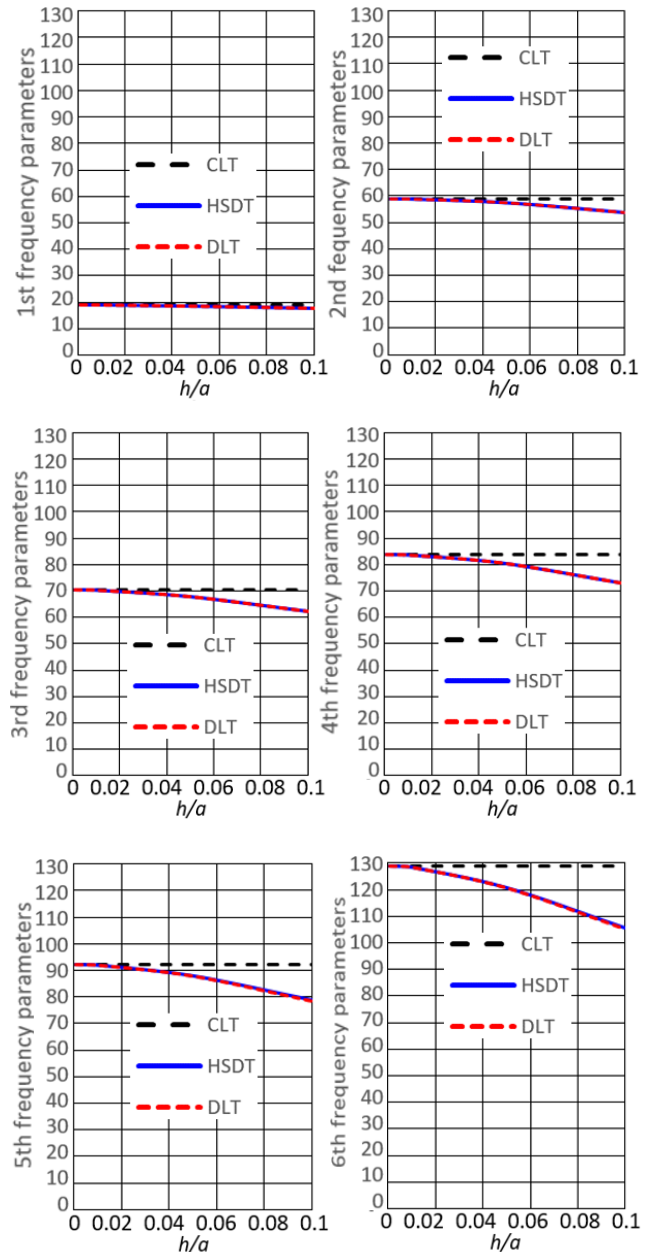


Fig.7. Variations of frequency parameters from CFRP for CLT, HSDT and DLT.

ており、差自体も小さくなっていることがわかる。特に 4 次と 6 次振動において、3 つの理論共それぞれアスペクト比が 1 から約 1.4, 1.5 から約 2.0 間がほぼ同じ値となっていることが特徴的である。

比減衰容量については表 8 と図 10 より HSDT, DLT は振動数パラメータ同様によく一致しているが、全体的にアスペクト比が大きくなると CLT との差は逆に小さくなる傾向があることがわかる。

また、3 次振動以降、アスペクト比が約 1.4 近辺を境に大きく変化していることが特徴的である。これは、紙面の都合により省略するが、振動モード形が、大きく変化することが原因だと考えられる。

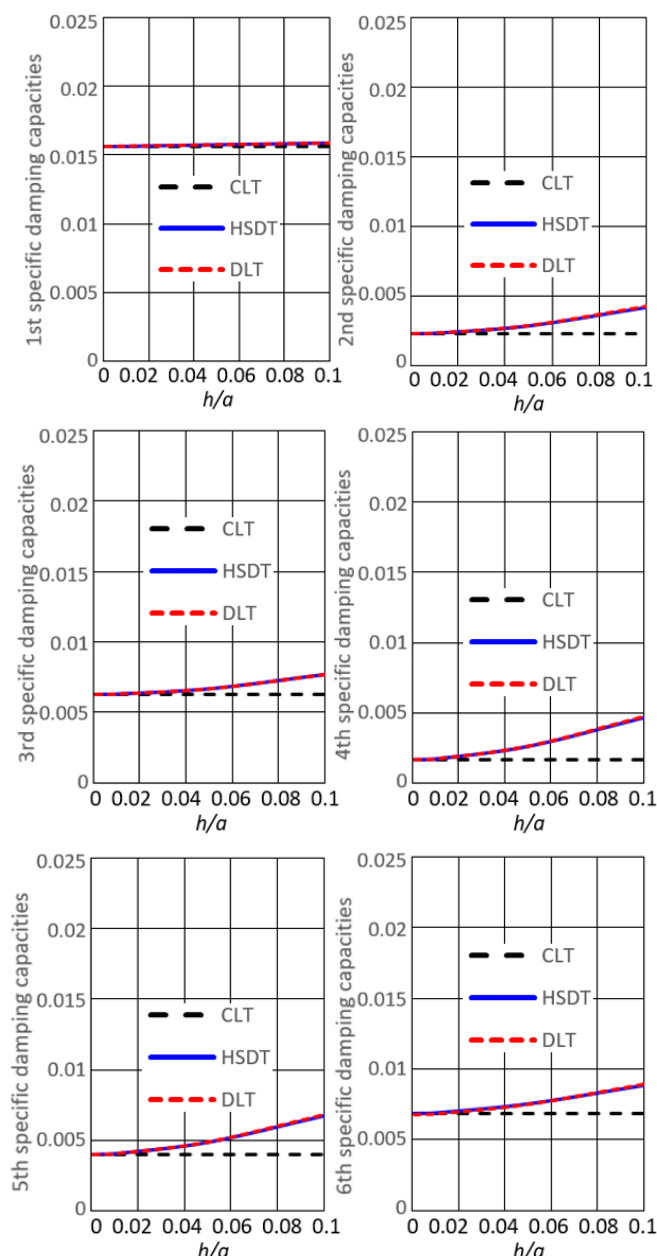


Fig.8. Variations of specific damping capacities from CFRP for CLT, HSDT and DLT.

6. 結論

本研究では CLT, HSDT, DLT それぞれの理論を用いて等方性材料であるアルミニウム平板および CFRP8 層対称積層板においてリッツ法を用いて、厚さ比とアスペクト比を変化させた場合の振動数パラメータと比減衰容量の計算を行った。特に振動数パラメータと振動モード形については汎用 FEM による計算結果とよく一致することを確認した。

そして、3 つの理論について計算結果の比較検討を行った結果、厚さ比が 0.01 程度まで小さい場合は差は見られないが、大きくなると HSDT と DLT の精度の高さを確認できた。

Table7. Comparison of frequency parameters from CFRP for CLT, HSDT, DLT and ANSYS.

b/a	Mode	Frequency parameters					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
1.0	CLT	18.97	58.90	70.30	83.90	92.12	128.8
	HSDT	17.60	53.77	62.30	73.12	78.81	105.5
	DLT	17.59	53.60	62.11	72.89	78.56	105.0
	ANSYS	17.67	53.81	62.33	73.15	78.87	105.4
1.5	CLT	12.58	26.18	36.63	72.18	81.61	83.89
	HSDT	11.86	25.07	33.80	63.12	70.10	73.11
	DLT	11.86	25.04	33.75	62.82	69.80	72.89
	ANSYS	11.88	25.07	33.76	63.20	70.11	73.15
2.0	CLT	9.352	14.73	24.16	40.61	49.67	83.79
	HSDT	8.891	14.36	22.65	37.46	44.76	70.16
	DLT	8.889	14.35	22.63	37.36	44.66	69.77
	ANSYS	8.893	14.37	22.61	37.50	44.73	68.36
2.5	CLT	7.416	9.426	17.92	25.99	34.61	54.44
	HSDT	7.083	9.274	16.94	24.64	31.93	47.41
	DLT	7.082	9.270	16.93	24.60	31.89	47.23
	ANSYS	7.081	9.276	16.90	24.65	31.88	45.94
3.0	CLT	6.130	6.546	14.21	18.05	26.21	37.81
	HSDT	5.871	6.472	13.51	17.38	24.50	34.06
	DLT	5.870	6.470	13.50	17.36	24.47	33.96
	ANSYS	5.868	6.467	13.47	17.37	24.43	32.82

Table8. Comparison of specific damping capacities from CFRP for CLT, HSDT and DLT.

b/a	Mode	Specific damping capacities ($\times 10^{-3}$)					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
1.0	CLT	15.61	2.329	6.252	1.691	4.028	6.824
	HSDT	15.81	4.173	7.636	4.688	6.721	8.823
	DLT	15.82	4.257	7.709	4.765	6.793	8.903
1.5	CLT	15.51	2.333	8.785	2.329	5.204	1.686
	HSDT	15.70	3.250	9.347	5.187	7.686	4.683
	DLT	15.70	3.290	9.378	5.298	7.785	4.761
2.0	CLT	15.41	2.333	10.59	2.334	6.721	1.700
	HSDT	15.57	2.872	10.91	4.133	8.147	5.845
	DLT	15.57	2.894	10.92	4.206	8.209	5.961
2.5	CLT	15.35	2.333	11.77	2.333	8.095	2.333
	HSDT	15.48	2.685	12.01	3.555	8.985	4.980
	DLT	15.48	2.700	12.02	3.604	9.025	5.065
3.0	CLT	15.33	2.333	12.56	2.333	9.250	2.334
	HSDT	15.43	2.580	12.75	3.211	9.851	4.405
	DLT	15.43	2.590	12.75	3.246	9.877	4.470

今後は材料特性の大きく異なるゴム等を積層した材料に関して検証を行いたいと考えている。

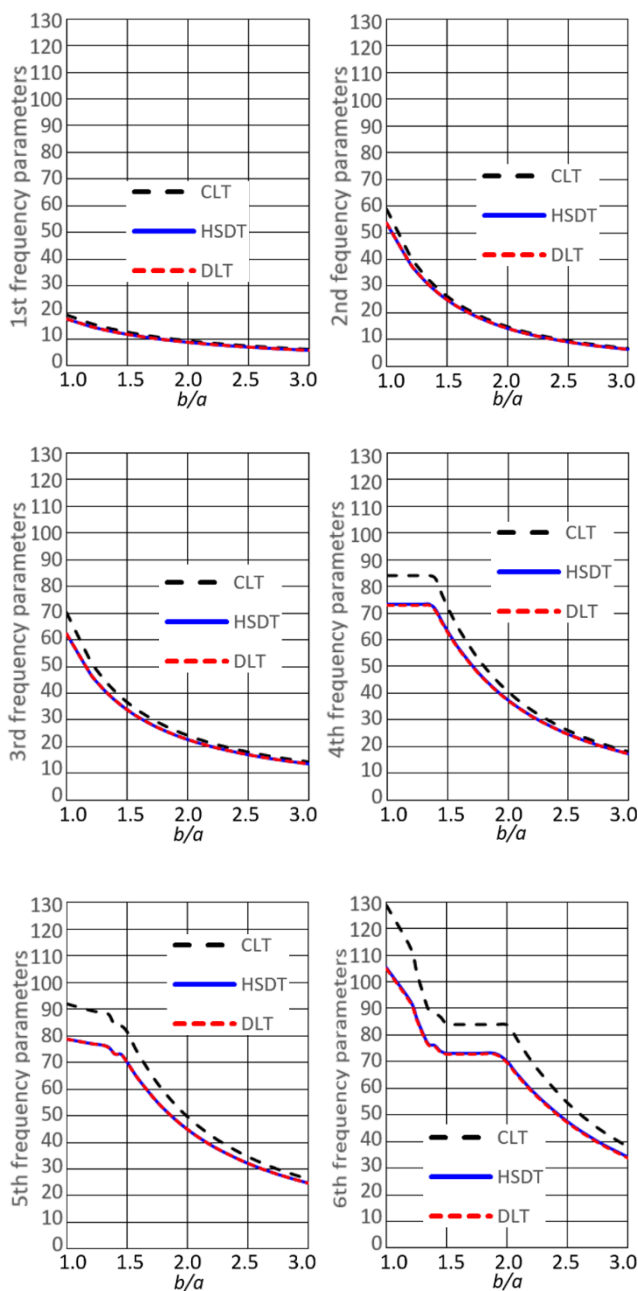


Fig.9. Variations of frequency parameters from CFRP for CLT, HSDT and DLT.

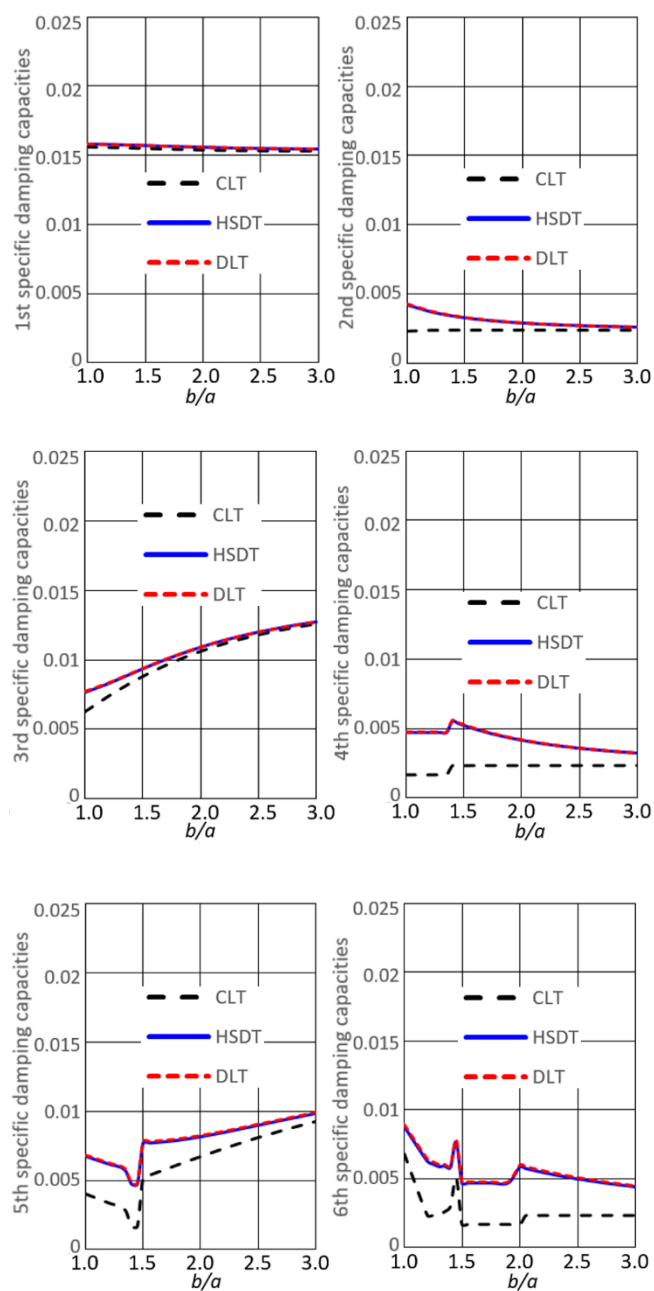


Fig.10. Variations of specific damping capacities from CFRP for CLT, HSDT and DLT.

参考文献

- (1) Arthur W. LEISSA : VIBRATION OF PLATES, NASA SP-160, 1969.
- (2) Cho, K. N., Bert, C. W. and Striz, A. G., Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual layer-theory, J. Sound. Vib, 145-3, pp.429-442, 1991.
- (3) 太田佳樹, 成田吉弘 : 多層理論を用いたクロスプライ積層平板の振動解析, 日本機械学会論文集(C編) 594, pp.444-450, 1996.
- (4) 太田佳樹, 奈良岡武志, 山口雄平 : 離散層別理論を用いた積層複合平板の自由振動解析, 日本機械学会 D&D 2007 CD-ROM 論文集, No.07-8, 201, 2007.
- (5) 太田佳樹, 奈良岡武志 : 離散層別理論を用いた積層複合平板の自由振動解析:第2報:多層理論・積層理論による解との比較, 日本機械学会 D&D 2008 CD-ROM 論文集, No.08-14, 155, 2008.
- (6) 伊東保典, 太田佳樹 : FRP 積層平板の減衰振動解析における解析モデルについて, 日本機械学会 D&D 2011 CD-ROM 論文集, 350, 2011.