

複合材サンドイッチ平板と殻
の振動減衰特性

1998年3月

関根 孝次

目 次

第1章 緒 論	1
1.1 本研究の目的と意義	1
1.2 従来の研究概要と本研究の位置づけ	3
1.2.1 サンドイッチはりおよび平板に関する研究概要	3
1.2.2 円筒および円錐殻に関する研究概要	5
1.2.3 球殻に関する研究概要	6
1.2.4 偏平殻に関する研究概要	7
1.3 各章の構成と概要	8
第2章 複合材サンドイッチ長方形板の振動減衰特性	10
2.1 緒 言	10
2.2 理論解析	11
2.2.1 形状と座標系	11
2.2.2 変位場の仮定とひずみ	13
2.2.3 応力-ひずみ関係式	16
2.2.4 積層表面材の剛性	18
2.2.5 エネルギー評価	20
2.2.6 変位関数と振動数方程式	25
2.2.7 表面材に古典積層理論を適用した定式化	32
2.3 ハニカムサンドイッチ長方形板の自由振動	41
2.3.1 数値計算精度の検討	42
2.3.2 変位場の検討	46
2.3.3 固有振動数と振動モード	48
2.3.4 実験結果との比較	65
2.4 粘弾性心材を有するサンドイッチ長方形板の振動減衰特性	67
2.4.1 数値計算精度の検討	68
2.4.2 固有振動数とモード損失係数	70
2.5 結 言	75

第3章 複合材サンドイッチ円錐殻の振動減衰特性	77
3.1 緒言	77
3.2 理論解析	78
3.2.1 形状と座標系	78
3.2.2 変位場の仮定とひずみ	80
3.2.3 応力-ひずみ関係式	82
3.2.4 エネルギー評価	83
3.2.5 変位関数と振動数方程式	92
3.3 数値計算と考察	101
3.3.1 数値計算精度の検討	101
3.3.2 固有振動数, モード損失係数および振動モード	109
3.4 結言	136

第4章 複合材サンドイッチ球殻の振動減衰特性	138
4.1 緒言	138
4.2 理論解析	139
4.2.1 形状と座標系	139
4.2.2 変位場の仮定とひずみ	141
4.2.3 応力-ひずみ関係式	144
4.2.4 エネルギー評価	146
4.2.5 変位関数と振動数方程式	156
4.3 数値計算と考察	166
4.3.1 数値計算精度の検討	166
4.3.2 固有振動数, モード損失係数および振動モード	176
4.4 結言	192

第5章 複合材サンドイッチ偏平殻の振動減衰特性	194
5.1 緒言	194
5.2 理論解析	195
5.2.1 形状と座標系	195
5.2.2 変位場の仮定とひずみ	198
5.2.3 応力-ひずみ関係式	199
5.2.4 エネルギー評価	201
5.2.5 振動数方程式	203
5.3 数値計算と考察	208
5.3.1 数値計算精度の検討	208
5.3.2 固有振動数, モード損失係数および振動モード	215
5.4 結言	223
第6章 結論	224
謝辞	228
参考文献	229
研究業績	238

第1章 緒 論

1.1 本研究の目的と意義

現在、さまざまな機械工業分野において、機械の高性能化、高速化、知能化が進んでいる。また、省エネルギー、生産コスト低減を目的とする新素材の開発により構造材料の軽量化が図られ、それに伴い、これまで予期しなかった振動や騒音の問題が多く発生している。このため、振動や騒音の軽減および制御を行い、システムの精度の向上、信頼性や経済性の向上を促す新しい設計技術の確立が求められている。そこで、機械構造物の設計、開発の段階においては、構造物の振動特性を正確かつ迅速に把握する必要性が高まっており、振動特性を精度良く定量的に評価・予測する解析手法が求められている。

近年、軽量化を目的として、複合材料が航空機構造をはじめさまざまな分野に幅広く利用されている。このような複合材料は、エポキシ樹脂などを母材(マトリックス)にして、これを高強度の繊維、すなわちガラス、カーボン、ボロンなどの無機繊維あるいはアラミド系の有機繊維で強化したもので、一般に繊維強化プラスチック(Fiber Reinforced Plastics : FRP)と総称されている。比重は従来の慣用材(鉄鋼材料など)に比べて小さく、破壊強さは、カーボン繊維などの使用により、常温では金属系の材料よりもすぐれた特性を有する。また、耐腐食性、耐候性がよいことに加え、繊維方向を自由に配向することにより所要に応じた力学的特性をもたせることができるという金属材料では得られない有利さを持っている。一方、FRPの用途拡大に伴い、FRP構造物が示す大きな振動応答倍率が問題となっている。このため、振動応答の低減は、システムの安定性や信頼性の向上のみならず、開発費や運用コスト低減の面で極めて重要である。また、FRPの振動減衰能を示す材料損失係数は従来の金属材料と比較して決して大きな値ではなく、FRPの減衰能の改善は重要な課題となっている。

FRPは一般に、金属材料に比べると弾性率が低いという欠点がある。一

般には高弾性率の繊維を母材中に多く混入することで、弾性率の向上が計られている。その一方で、成形が容易であるという長所を生かしたサンドイッチ構造、ハイブリッド構造あるいはスチフナ構造などを適用することにより、軽量でかつ剛性の高い構造物の設計が可能となる。とくにサンドイッチ構造は機械的特性を向上させるだけでなく、心材の選択により衝撃吸収性、遮音性、断熱性など所要に応じた機能を持たせることができる。ハニカム材を心材として使用した場合、優れた軽量性、高剛性が発揮され、制振効果のある粘弾性材料を心材に適用することにより、構造材の振動減衰能が向上し、システムの安定性が促進される。このような多機能性を有するサンドイッチ構造材は、支持条件、積層形態、構造材の形状などによって振動減衰特性が異なる。したがって、サンドイッチ構造から成る板や殻の動的特性を明らかにすることは、構造物の開発・設計上極めて重要である。

本研究では、このような状況を踏まえて、積層表面材とハニカム心材および粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ板と殻の振動減衰特性を検討する。様々な積層形態、支持条件を有する板と殻について固有振動数、振動モードおよびモード損失係数を求め、各種パラメータが複合材サンドイッチ板および殻の振動減衰特性に与える影響を定量的に明らかにする。

はじめに、FRP積層材とハニカム心材から成る複合材サンドイッチ板の自由振動をリッツ法に基づいて解析し、表面材の積層形態、境界条件など各種パラメータが振動特性に及ぼす影響を検討する。さらに、粘弾性心材を有する複合材サンドイッチ板の振動減衰特性を固有振動数とモード損失係数の観点から検討し、各種パラメータが振動減衰特性に及ぼす影響を検討する。

ついで、積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ円錐殻、球殻および偏平殻の振動減衰特性をリッツ法に基づいて解析し、各種パラメータが複合材サンドイッチ殻の振動減衰特性に及ぼす影響を検討する。

以上、リッツ法に基づいた解析によりそれぞれの問題について検討を行い、固有振動数、振動モードおよびモード損失係数に関するデータを提供することにより、今後の同種の研究における比較基準ならびに構造物の設計における有用な知見を与えることを本研究の目的とする。

1.2 従来の研究概要と本研究の位置づけ

機械構造物の基本構造部材として使用されるはり，板および殻などの連続体の振動に関しては，これまで多くの研究報告がなされている．従来では，研究対象の多くが等方性材料を使用したものであったが，近年，各工業分野において軽量化，多機能化の必要性が増すに従い，FRP積層材を使用した連続体の振動に関する研究報告が多く見受けられるようになってきた．そのようなはり，板および殻などの連続体に関する研究概要は以下のようである．

1.2.1 サンドイッチはりおよび板に関する研究概要

サンドイッチ板の振動問題は，航空機分野における構造物の設計上，重要なテーマとしてこれまで多くの研究報告がなされてきた．例えば，Ibrahimら⁽¹⁾は，MonfortonとIbrahim⁽²⁾⁽³⁾が提案した変位場モデルを使用して，対称および逆対称クロスプライ積層表面材と逆対称アングルプライ積層表面材をもつ周辺単純支持されたハニカムサンドイッチ長方形板の自由振動を解析している．また，Kanematsuら⁽⁴⁾は対称クロスプライ積層表面材と対称アングルプライ積層表面材をもつ周辺固定されたハニカムサンドイッチ長方形板の自由振動をリッツ法により解析し，実験(ホログラフィー干渉法)による固有振動数と固有モードの比較から解析結果の妥当性を示している．さらに，Ha⁽⁵⁾は有限要素法によるサンドイッチ板の解析において，変位場，材料特性，表面材と心材における応力分布の仮定などについてとりまとめている．加鳥と石原⁽⁶⁾は有限要素法により異方性表面材を有する周辺単純支持されたサンドイッチ長方形板の曲げと自由振動解析を行い，他の文献との比較から解析手法の有効性を示しており，宮地と渡辺⁽⁷⁾⁽⁸⁾は有限要素法により，異方性表面材をもつ周辺単純支持および片持ちサンドイッチ板の曲げおよび自由振動解析を行い，実験結果との比較を行っている．また，Shiau⁽⁹⁾は複合材サンドイッチ板のフラッタ問題を扱っており，フラッタ境界における心材厚さおよび表面材の積層形態の影響を論じている．ついで，MallikarjunaとKant⁽¹⁰⁾はアイソパラメトリック要素を用いた有限要素法により，FRP積層板と複合材サンドイッチ板の曲げと自由振動解析を行い，古典積層理論，一次せん断変形理論および高次せん断変

形理論による固有振動数とたわみの比較を示し、境界条件や積層形態による影響を詳細に検討している。また、HuとHwu⁽¹¹⁾は、はく離した複合材サンドイッチはりの自由振動を扱い、心材のせん断弾性係数および厚さ、はく離長さ、積層表面材の積層形態が固有振動数に及ぼす影響を調べている。

一方、サンドイッチはりおよび板の振動減衰特性の研究に関しては、MeadとMarkus⁽¹²⁾によるサンドイッチはりの強制振動をはじめ、1960年代後半から活発な研究報告がなされている。例えば、Rao⁽¹³⁾は心材の内部減衰を考慮した複素弾性係数を用い、種々の境界条件をもつサンドイッチはりの固有振動数とモード損失係数の厳密解、近似解および最適設計問題について調べている。また、NarayananとShanbhag⁽¹⁴⁾は不規則圧力を受ける弾性支持されたサンドイッチ板の騒音伝播を解析的に調べており、Lallら⁽¹⁵⁾は部分的な粘弾性層をもつ周辺単純支持されたサンドイッチ板の振動減衰特性をリッツ法により解析している。さらに、鹿内ら⁽¹⁶⁾は面内荷重を受ける周辺固定されたサンドイッチ板の振動減衰特性について、基本振動数とモード損失係数をガラーキン法により解析し、実験との比較により解析手法の有効性を示している。ついで、宇津野ら⁽¹⁷⁾は粘弾性心材の温度依存性と振動数依存性を考慮した三層制振材料の動特性予測について検討しており、Sakiyamaら⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾はグリーン関数を適用した解析法を示している。また、Barrett⁽²⁰⁾は変分原理を用い、粘弾性心材の振動数依存性を考慮した解析を行い、積層表面材の積層形態がモード損失係数に及ぼす影響を検討しており、CupialとNiziol⁽²¹⁾は周辺単純支持されたクロスプライ積層表面材をもつサンドイッチ長方形板の固有振動数とモード損失係数を厳密に解析している。

一方、有限要素法による振動減衰特性の研究は、SoniとBogner⁽²²⁾が片持ちサンドイッチはりについて調べており、JohnsonとKienholz⁽²³⁾はモードひずみエネルギー法によりサンドイッチはりおよび長方形板について検討している。また、NabiとGanesan⁽²⁴⁾は三角形要素を使用し、周辺単純支持と周辺固定サンドイッチ長方形板について調べており、Sunら⁽²⁵⁾は有限要素法と実験により表面材に異方性材料を使用した片持ちサンドイッチはりの振動減衰特性を検討している。さらに、設計上の問題では、Lifshitzと

Leibowitz⁽²⁶⁾ がサンドイッチはりのモード損失係数を最大化する最適化問題を扱っている。

1.2.2 円筒および円錐殻に関する研究概要

円筒および円錐殻の振動に関しては、Irieら⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾による等方性円錐殻の自由振動をはじめ、数多くの研究が報告されており、Kapania⁽²⁹⁾は約150編の積層殻の振動と座屈に関する論文を紹介し、工業分野における積層殻の研究の重要性を示唆している。

積層円筒殻の振動に関する研究は、Soldatos⁽³⁰⁾が単純支持されたクロスプライ積層円筒殻についてDonnell, Love, SandersおよびFlüggeの各理論による固有振動数の比較を行っており、小林と長島⁽³¹⁾はFlügge型の振動数方程式を用いて厳密解を求めている。また、アングルプライ積層円筒殻の振動に関する研究は、Naritaら⁽³²⁾が任意の境界条件を有する円筒殻の解析法を示しており、Ipら⁽³³⁾が自由端をもつ円筒殻の自由振動をリッツ法により解析し、実験との比較を行っている。

さらに、積層円錐殻の自由振動に関する研究は、Shu⁽³⁴⁾がLoveの第一次近似理論に基づいて種々の境界条件をもつ円錐殻について調べており、KayranとVinson⁽³⁵⁾およびTong⁽³⁶⁾⁽³⁷⁾が面外せん断変形と回転慣性を考慮した積層円錐殻の解析を行っている。また、変厚積層円錐殻の振動に関しては、Sankaranarayananら⁽³⁸⁾⁽³⁹⁾が種々の境界条件をもつ円錐殻の軸対称振動と非軸対称振動をLoveの第一次近似理論に基づいてリッツ法により解析しており、SivadasとGanesan⁽⁴⁰⁾は固定された円錐殻を有限要素法により解析している。

ついで、サンドイッチ構造から成る円筒および円錐殻の振動に関しては、Mirza⁽⁴¹⁾が約80編の研究論文を紹介し、サンドイッチ殻の研究動向を調査している。さらに、SiuとBert⁽⁴²⁾は自由端をもつ等方性サンドイッチ円錐殻の自由振動をリッツ法により解析し、Wilkinsら⁽⁴³⁾は種々の境界条件を有する直交異方性サンドイッチ円錐殻の自由振動をガラーキン法により解析している。また、KumarとSingh⁽⁴⁴⁾は変位を近似する試験関数にBezier関数を使用し、固定されたサンドイッチ円筒殻の自由振動を変分原理を用いて調べている。

一方、積層円筒殻および積層円錐殻の振動減衰特性に関する研究は、AlamとAsnani⁽⁴⁵⁾をはじめ、KhatriとAsnani⁽⁴⁶⁾⁽⁴⁷⁾がガラーキン法を用いて軸対称自由振動に関する振動減衰特性を種々の境界条件について調べている。また、RameshとGanesan⁽⁴⁸⁾⁽⁴⁹⁾は種々の境界条件をもつ等方性サンドイッチ円筒・円錐殻の振動減衰特性を有限要素法により解析し、せん断変形と回転慣性の有無の違いをもつ三つの解析モデルについて比較検討を行っている。さらに、ZhouとRao⁽⁵⁰⁾は積層材と粘弾性層をもつ円筒殻の振動減衰特性を粘弾性材料の振動数・温度依存性を考慮して解析している。

1.2.3 球殻に関する研究概要

球殻は、航空宇宙機器に搭載される高圧ガス容器をはじめさまざまな工業分野で応用されており、これまで多くの研究報告がなされている。

等方性球殻の振動に関する研究は、GlocknerとTawadros⁽⁵¹⁾がポリ塩化ビニル系プラスチックから成る球殻の軸対称自由振動を実験的に検証し、SouzaとCroll⁽⁵²⁾は固定された球殻の軸対称および非軸対称振動について、開き角による固有振動数と固有モードの変化、および膜力と曲げの作用に関するひずみエネルギー分布を解析している。また、Kunieda⁽⁵³⁾は変位を近似する試験関数にLegendre多項式を使用し、固定された球殻の軸対称振動に関する厳密解を示している。さらに、有限要素法による解析では、Singh⁽⁵⁴⁾⁽⁵⁵⁾が試験関数にBezier関数を使用し、固定と単純支持の境界条件をもつ球殻の非軸対称振動について調べており、TesslerとSpiridigliozzi⁽⁵⁶⁾は面外せん断変形と回転慣性を考慮し、固定された球殻の軸対称振動を解析している。

一方、積層球殻に関する研究は、福永と植村⁽⁵⁷⁾がFW(フィラメント・ワインディング)圧力容器の最適設計について検討し、ドーム形状の最適決定法を積層膜理論に基づいて調べている。また、植村⁽⁵⁸⁾はFRP圧力容器の最近の開発動向について調査し、青山と勝亦⁽⁵⁹⁾はFRP圧力容器の使用分野や技術的側面での検討項目を挙げて、FRP圧力容器の用途拡大の可能性を示唆している。さらに、Chao⁽⁶⁰⁾らは種々の境界条件をもつ直交異方性半球殻の軸対称振動について、NarasimhanとAlwar⁽⁶¹⁾は円孔を有する積層球殻の自由振動について、それぞれガラーキン法により解析してい

る。また、KumarとSingh⁽⁶²⁾は試験関数にBezier関数を使用したリッツ法によりクロスプライ積層球殻の自由振動を調べており、GauthamとGanesan⁽⁶³⁾は積層球殻の自由振動を有限要素法により解析し、積層形態や形状寸法比などの各種パラメータが基本振動数に及ぼす影響を調べている。

さらに、サンドイッチ球殻の振動に関する研究は、KoplikとYu⁽⁶⁴⁾が試験関数にBessel関数を使用し、固定されたサンドイッチ半球殻の軸対称振動を調べている。また、CulkowskiとReismann⁽⁶⁵⁾は固定された球殻の軸対称振動について、MirzaとSingh⁽⁶⁶⁾⁽⁶⁷⁾は軸対称および非軸対称振動について厳密解を求めている。一方、有限要素法による解析では、Singhら⁽⁶⁸⁾⁽⁶⁹⁾が固定と単純支持の境界条件をもつ等方性サンドイッチ球殻の軸対称振動および非軸対称振動を調べている。

サンドイッチ球殻の振動減衰特性に関する研究は、Okazakiら⁽⁷⁰⁾が試験関数にBessel関数を使用して種々の境界条件をもつ浅い球殻を扱っており、GauthamとGanesan⁽⁷¹⁾が固定と単純支持の境界条件をもつ球殻の振動減衰特性を有限要素法により解析している。

1.2.4 偏平殻に関する研究概要

等方性偏平殻の振動に関しては、これまで多くの研究報告がなされており、Leissaら⁽⁷²⁾⁽⁷³⁾は片持ち偏平殻の自由振動を検討し、NaritaとLeissa⁽⁷⁴⁾⁽⁷⁵⁾は四隅で点支持された偏平殻と周辺自由の偏平殻の自由振動をリッツ法により解析している。

さらに、積層偏平殻の振動に関しては、Reddy⁽⁷⁶⁾とTouratier⁽⁷⁷⁾がクロスプライ積層偏平殻の厳密解を求めており、LeissaとQatu^{(78)~(80)}はエネルギー法に基づく偏平殻の定式化を示し、片持ちおよび周辺自由の偏平殻の自由振動をリッツ法により解析している。また、有限要素法による解析では、Chandrashekhara⁽⁸¹⁾が周辺単純支持および周辺固定された偏平殻について、面内変位の拘束条件が固有振動数に及ぼす影響を検討しており、Chakravortyら⁽⁸²⁾⁽⁸³⁾は点支持、周辺単純支持および周辺固定された偏平殻について、積層形態、曲率比および形状寸法比が基本振動数に及ぼす影響を調べている。

また、サンドイッチ偏平殻の研究に関しては、Ahmed⁽⁸⁴⁾が有限要素法

により周辺固定されたサンドイッチ偏平殻の自由振動を扱い，HoltとWebber⁽⁸⁵⁾が有限要素法に基づくハニカムサンドイッチ偏平殻の厳密解に関する定式化を示している．また，Тамуров⁽⁸⁶⁾は心材の材料非線形性を考慮したサンドイッチ偏平殻の定式化を示している．

サンドイッチ偏平殻の振動減衰特性に関しては，XiaとLukasiewicz⁽⁸⁷⁾が幾何学的非線形性を考慮して，サンドイッチ円筒偏平殻の減衰特性を散逸エネルギーにより評価している．

以上の研究概要からわかるように，これまでのサンドイッチ板および殻の振動減衰特性に関する研究は等方性材料を使用したものが多く，板，円筒殻，偏平殻については，厳密解が存在する単純支持に関するものがほとんどである．また，表面材に積層材を使用したサンドイッチ板の振動に関する研究は少なく，円錐殻，球殻および偏平殻に関してはほとんど見当たらない．さらに，解析手法としては有限要素法を使用した場合が多く，リッツ法による解析例は少ない．したがって，有限要素法などほかの数値解法に比べて小さい行列次数で格段により収束性を示すリッツ法による本解析結果は，今後の同種の研究における比較基準や指針を与えるものとして極めて有用である．

1.3 各章の構成と概要

本論文は全6章で構成されており，以下に各章の概要を述べる．

第2章では，FRP積層表面材とハニカム心材および粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ長方形板の振動減衰特性を検討する．はじめに，不減衰の自由振動を解析対象として，板の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価し，ラグランジュ関数を極小化することにより振動数方程式を導く．この際，表面材の変形において，面外せん断変形を考慮する場合としない場合の二つの変位場を使用し，それぞれについて定式化を行う．次に，この二つの変位場の適用範囲を検討し，表面材の変形において面外せん断変形を考慮しない変位場を用いて，境界条件，表面材の積層形態および心材の厚さが固有振動数と振動モードに及ぼす影響を調べる．さらに，一般的なFRP積層板との比較により複合材サンドイッチ板の動特

性を考察し，ホログラフィー干渉法による実験結果との比較から本解析法が十分に妥当な近似解法であることを示す．ついで，心材に内部減衰の大きい粘弾性材料を使用したサンドイッチ長方形板の振動減衰特性を検討する．この際，心材の弾性係数は内部減衰を考慮した複素数で取り扱う．また，数値計算では心材の振動数依存性，表面材の積層形態および心材厚さがサンドイッチ長方形板の振動減衰特性に及ぼす影響を調べる．

第3章では，FRP積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ円錐殻の振動減衰特性をリッツ法により解析する．そのため，微小変形理論および積層理論に基づいて円錐殻の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価し，円錐殻のラグランジュ関数を極小化することにより振動数方程式を導く．この際，表面材および心材の内部減衰を考慮し，各材料の弾性係数を複素数で近似する．数値計算では，既知の解析および実験結果との比較を行い，本解析結果の精度と妥当性を検討する．さらに，周方向波数，表面材の積層形態，半頂角，各形状寸法比が固有振動数，モード損失係数および振動モードに及ぼす影響を調べる．

第4章では，FRP積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ球殻の振動減衰特性をリッツ法により解析する．そのため，微小変形理論および積層理論に基づいて球殻の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価し，球殻のラグランジュ関数を極小化することにより振動数方程式を導出する．数値計算では，既知の解析結果との比較を行い，本解析結果の精度と妥当性を検討する．さらに，周方向波数，表面材の積層形態，開き角，各形状寸法比が固有振動数，モード損失係数および振動モードに及ぼす影響を調べる．

第5章では，FRP積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ偏平殻の振動減衰特性をリッツ法により解析する．そのため，偏平殻の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価し，偏平殻のラグランジュ関数を極小化することにより振動数方程式を導出する．数値計算では，既知の解析結果との比較を行い，本解析結果の精度と妥当性を検討する．さらに，表面材の積層形態と曲率比が固有振動数，モード損失係数および振動モードに及ぼす影響を調べる．

第6章は本論文の結論であり，本研究において得られた成果を取りまとめている．

第2章 複合材サンドイッチ長方形板の振動減衰特性

2.1 緒言

サンドイッチ平板の振動に関する研究は、航空宇宙構造分野における重要なテーマとして一定の関心が寄せられてきた。これまで、研究対象の多くが等方性材料を使用したものであったが、近年、構造物の軽量化の必要性が増すに従い、表面材にFRP積層材を使用したサンドイッチ板の自由振動に関する研究^{(1)(4),(6)~(9)}が進展している。しかし、これらの研究は境界条件が周辺単純支持に限られる厳密解、あるいは有限要素法による近似解を示したものがほとんどであり、境界条件、表面材の積層形態および各形状寸法比の違いによる固有振動数と振動モードの変化については十分に解明されているとはいえない。また、これまでの研究では表面材の変形において面外せん断変形を考慮しない場合が多く見受けられたが、本章ではこの表面材の面外せん断変形の影響について考察を加える。

一方、心材に内部減衰の大きい粘弾性材料を使用した等方性サンドイッチ板の振動減衰特性に関しては、1960年代から多くの研究報告^{(12)~(19),(22)~(26)}がなされている。近年、構造物の軽量化の必要性が増すに従い、表面材にFRP積層材を使用したサンドイッチ板の振動減衰特性に関する研究⁽²⁰⁾⁽²¹⁾が進展している。しかし、これらの研究は、厳密解や有限要素法による近似解を扱ったものがほとんどである。また、粘弾性材料が振動数依存性および温度依存性を有する場合でも、解析において弾性係数と材料損失係数を定数で扱う場合が多い。

このような背景を踏まえ、本章ではFRP積層表面材とハニカム心材および粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ長方形板の振動減衰特性をリッツ法により解析する。はじめに、線形弾性論および積層理論に基づいて板の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価し、板のラグランジュ関数を極小化することにより、板の振動数方程式を導く。この際、表面材の変形において、面外せん断変形を考慮する場合としない場合の二

つの変位場を仮定し、それぞれについて定式化を行う。次に、この二つの変位場の適用範囲を検討し、表面材の変形において面外せん断変形を考慮しない変位場を用いて、境界条件、表面材の積層形態、心材の厚さが固有振動数と振動モードに及ぼす影響を調べる。さらに、一般的なFRP積層板の固有振動数と振動モードの比較からサンドイッチ板の動特性を考察し、ホログラフィー干渉法による実験結果との比較から本解析結果の妥当性を検討する。ついで、内部減衰の比較的大きい粘弾性心材を使用したサンドイッチ長方形板の振動減衰特性について検討する。この際、心材の弾性係数は内部減衰を考慮した複素数で取り扱う。また、数値計算では心材の弾性係数および材料損失係数における振動数依存性、表面材の積層形態、心材の厚さがサンドイッチ長方形板の振動減衰特性に及ぼす影響を調べる。

2.2 理論解析

解析において、以下の仮定を用いる。

(1) 表面材と心材は完全に接着されており、それらの界面において、はく離やすべりは生じない。

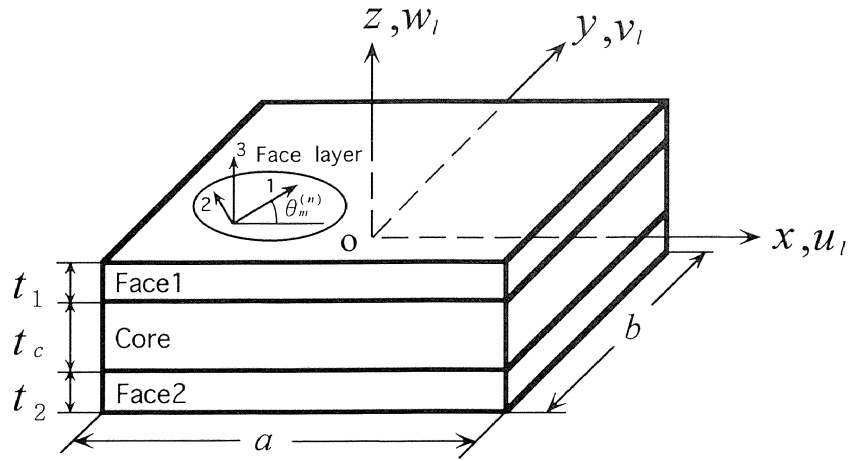
(2) 表面材と心材の厚さは辺長に比べて小さく、面外方向の垂直応力は他の応力に比べて微小となるため無視できる。また、変位、回転およびひずみは微小であり、線形弾性体としての扱いが可能である。

(3) 心材の面内応力は表面材に比べ十分に小さいとし、これを無視する。したがって、心材部分では面外せん断変形のみを考える。

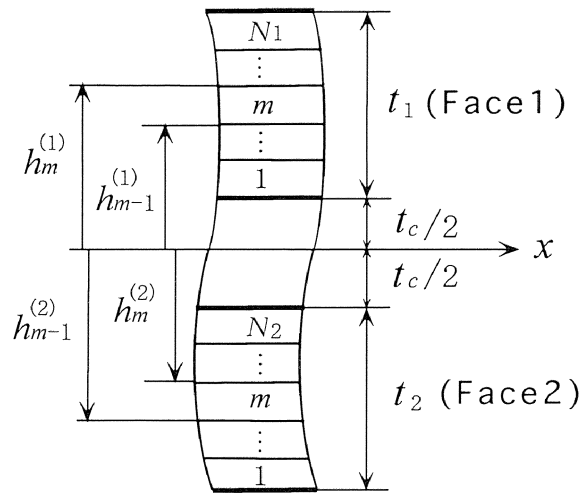
以上の仮定により、変位を面外方向に連続な関数を用いて表すことができ、複合材サンドイッチ長方形板を積層表面材を有する均質な連続体と考えて異方性弾性論の適用が可能となる。

2.2.1 形状と座標系

図2-1にサンドイッチ長方形板の形状と座標系を示す。板は心材とそれを挟む上下の積層表面材から構成されている。座標系の原点 O を板の中央にとり、図のように座標 (x, y, z) をとる。また、板の任意点における x , y , z 方向の各変位を u_l , v_l , w_l ($l=1$; 表面材1, 2; 表面材2, c ; 心



(a) サンドイッチ長方形板の形状と諸元



(b) サンドイッチ長方形板の積層形態

図2-1 サンドイッチ長方形板の形状と座標系

材)とする。 a および b はそれぞれ x および y 方向の辺長であり、 t_1 、 t_2 および t_c は、それぞれ表面材1、表面材2、心材の厚さを表す。さらに、表面材1と表面材2がそれぞれ N_1 層および N_2 層から成るとし、第 m 層上面への中央面からの距離をそれぞれ $h_m^{(1)}$ 、 $h_m^{(2)}$ とする。ここで、中央面とは板の上下面から等距離にあって、幾何学的に中央となる面を指す。また、各ラミナにおいて繊維方向、繊維と直角方向および面外方向にそれぞれ1軸、2軸および3軸をとり、材料主軸1（ラミナの繊維方向）と x 軸がなす角度を繊維角度 $\theta_m^{(n)}$ ($n=1,2$) とする。

2.2.2 変位場の仮定とひずみ

図2-2に $x-z$ 断面から見た板の変形状態を示す。図に示すように、変形前の断面 AB は変形後、断面 $A'B'$ に移るものとする。 ψ_x および ϕ_x は、それぞれ心材と表面材における z 軸からの回転を表す。板の厚さは辺長に比べて小さいため、表面材および心材の変形を板の中央面における変位量 u_0 、 v_0 および w_0 を用いて記述することを考えると、 x 、 y 、 z 方向の各変位 u_l 、 v_l 、 w_l ($l=1,2,c$) は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_0 - z\phi_x + \frac{t_c}{2}(\phi_x - \psi_x) \\
 v_1 &= v_0 - z\phi_y + \frac{t_c}{2}(\phi_y - \psi_y) \\
 u_2 &= u_0 - z\phi_x - \frac{t_c}{2}(\phi_x - \psi_x) \\
 v_2 &= v_0 - z\phi_y - \frac{t_c}{2}(\phi_y - \psi_y) \\
 u_c &= u_0 - z\psi_x \\
 v_c &= v_0 - z\psi_y \\
 w_1 &= w_2 = w_c = w_0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで、 ψ_y および ϕ_y は、それぞれ $y-z$ 断面における心材と表面材の z 軸からの回転を表す。

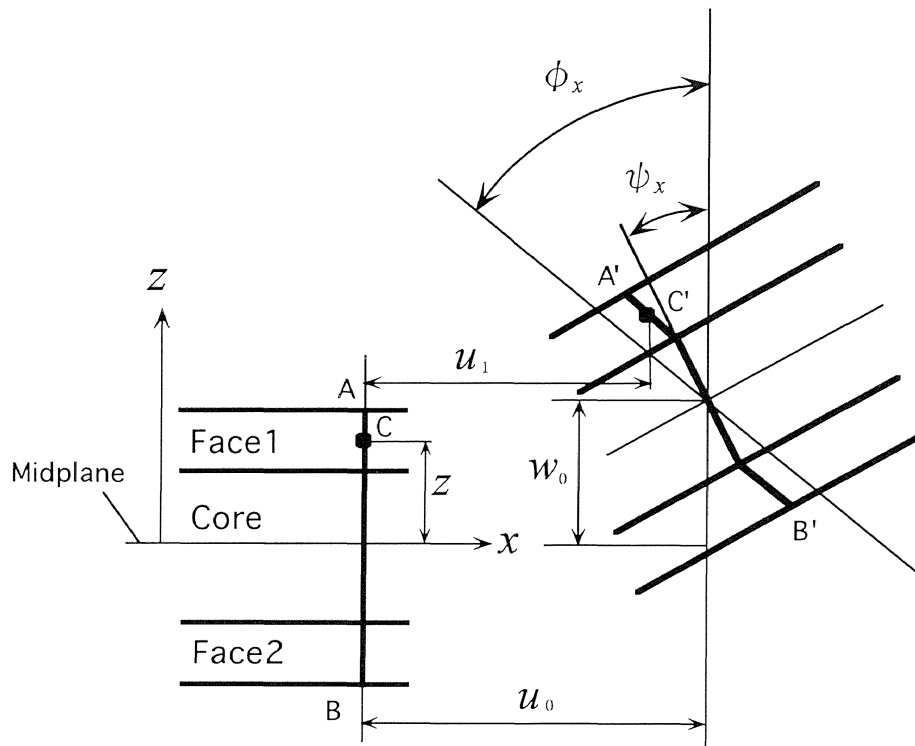


図2-2 サンドイッチ長方形板の変形状態

ただし，表面材の面外せん断変形を無視すると回転 ϕ_x および ϕ_y は

$$\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.2)$$

と書ける．本章では，表面材の面外せん断変形を無視した変位場を Type-1，面外せん断変形を考慮した変位場を Type-2 と称し，両変位場の適用範囲を検討するが，はじめに，Type-2 の変位場による定式化を行う．

微小変形理論に基づくと，表面材 n ($n=1,2$) と心材 c のひずみ-変位関係式は

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(n)} &= \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(n)} = \frac{\partial v_n}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^{(n)} = \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \\ \gamma_{yz}^{(n)} &= \frac{\partial v_n}{\partial z} + \frac{\partial w_n}{\partial y}, \quad \gamma_{zx}^{(n)} = \frac{\partial u_n}{\partial z} + \frac{\partial w_n}{\partial x} \\ \gamma_{zx}^c &= \frac{\partial u_c}{\partial z} + \frac{\partial w_c}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^c = \frac{\partial v_c}{\partial z} + \frac{\partial w_c}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.3)$$

で与えられる．

式(2.1)を式(2.3)に代入すると積層表面材 n の各ひずみは

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(n)} &= \varepsilon_{x0} + z\kappa_x + (-1)^n \frac{t_c}{2} \gamma_x \\ \varepsilon_y^{(n)} &= \varepsilon_{y0} + z\kappa_y + (-1)^n \frac{t_c}{2} \gamma_y \\ \gamma_{xy}^{(n)} &= \gamma_{xy0} + z\kappa_{xy} + (-1)^n \frac{t_c}{2} \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx}^{(n)} &= \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz}^{(n)} &= \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる．

式(2.4)において

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{y0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\
 \kappa_x &= -\frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \quad \kappa_{xy} = -\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_x &= \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial(\phi_x - \psi_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi_y - \psi_y)}{\partial x} \\
 \gamma_{zx} &= -\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = -\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

であり, $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}$ および γ_{xy0} は中央面におけるひずみ, κ_x, κ_y および κ_{xy} は曲率およびねじり率を表す. 一方, 心材の各ひずみは

$$\gamma_{zx}^c = -\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^c = -\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{2.6}$$

となり, 表面材および心材の任意点におけるひずみは中央面におけるひずみ, または曲率を用いて表すことができる.

2.2.3 応力-ひずみ関係式

表面材における各ラミナは 1, 2, 3 軸のいずれの軸に対しても対称面をもつ直交異方性材料である. したがって, 異方性弾性論における一般化されたフックの法則により, 表面材 n の第 m 層目のラミナにおける応力-ひずみ関係式は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^{(n,m)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n,m)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^{(n,m)} \tag{2.7}$$

で与えられる. ただし, 前述の仮定により, 各ラミナにおける面外方向の垂直応力と垂直ひずみは考慮していない. なお, 式(2.7)中の剛性係数 Q_{ij} は第 m 層目のラミナの縦弾性係数 E_i , 横弾性係数 G_{ij} およびポアソン比 ν_{ij}

を用いて

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{12} &= \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{44} &= G_{23}, & Q_{55} &= G_{31}, & Q_{66} &= G_{12}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

で与えられる．ここで，添字 1, 2, 3 はそれぞれ 1, 2, 3 軸方向の諸量を意味しており， E_i と ν_{ij} の間には $\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j$ ($i, j = 1, 2$) の関係が成り立つ．また，各ラミナの材料主軸上における応力-ひずみ関係式(2.7)を，図 2-1(a)に示す (x, y, z) 座標上に変換すると

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n,m)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(n,m)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \tag{2.9}$$

となる．ただし，ひずみは板の面外方向に連続で，ラミナの積層形態に関係なく板全体に対して共通であるため，式(2.9)中においてひずみベクトルに関する添字 m は不要となる．しかし，個々のラミナがそれぞれ異なる配向をしているため剛性係数 $\bar{Q}_{ij}^{(n,m)}$ はラミナごとに異なる値となり，それに対応して応力が面外方向に不連続となる．したがって，応力ベクトルと剛性係数 $\bar{Q}_{ij}^{(n,m)}$ に関しては添字 m を付している．また，座標変換された剛性係数 $\bar{Q}_{ij}^{(n,m)}$ ($i, j = 1, 2, 4, 5, 6$) は次式で与えられる．ただし， $c = \cos \theta_m^{(n)}$, $s = \sin \theta_m^{(n)}$ である．

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11}^{(n,m)} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 \\
\bar{Q}_{12}^{(n,m)} &= Q_{12}(c^4 + s^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})c^2s^2 \\
\bar{Q}_{16}^{(n,m)} &= Q_{11}c^3s - Q_{22}cs^3 - cs(c^2 - s^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) \\
\bar{Q}_{22}^{(n,m)} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 \\
\bar{Q}_{26}^{(n,m)} &= Q_{11}cs^3 - Q_{22}c^3s + cs(c^2 - s^2)(Q_{12} + 2Q_{66})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{44}^{(n,m)} &= Q_{44}c^2 + Q_{55}s^2, \quad \bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})cs \\
\bar{Q}_{55}^{(n,m)} &= Q_{55}c^2 + Q_{44}s^2 \\
\bar{Q}_{66}^{(n,m)} &= Q_{66}(c^2 - s^2)^2 + (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})c^2s^2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

一方，心材は前述の仮定より，antiplane ($\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$) とみなし，面外せん断変形のみを考える．したがって，心材における応力-ひずみ関係式は

$$\begin{Bmatrix} \tau_{zx}^c \\ \tau_{yz}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_x^c & 0 \\ 0 & G_y^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{zx}^c \\ \gamma_{yz}^c \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

となる．ここで， G_x^c, G_y^c は心材の面外せん断弾性係数を表す．心材にハニカム材などの直交異方性材料を使用する場合， $x-z$ および $y-z$ 面における弾性特性がそれぞれ異なるため，一般に $G_x^c \neq G_y^c$ となる．

2.2.4 積層表面材の剛性

表面材 n ($n=1, 2$) に作用する単位幅あたりの合応力 ($N_x^{(n)}, N_y^{(n)}, N_{xy}^{(n)}$)，合せん断力 ($Q_x^{(n)}, Q_y^{(n)}$) および合モーメント ($M_x^{(n)}, M_y^{(n)}, M_{xy}^{(n)}$) は，式(2.9)で与えられる応力を板厚方向に積分することにより

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}^{(n)} &= \int_{z_n} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(n,m)} dz = \sum_{m=1}^{N_n} \int_{h_{m-1}^{(n)}}^{h_m^{(n)}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(n,m)} dz \\
\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} &= \int_{z_n} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n,m)} z dz = \sum_{m=1}^{N_n} \int_{h_{m-1}^{(n)}}^{h_m^{(n)}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n,m)} z dz
\end{aligned} \tag{2.12}$$

となる．ここで，

$$\int_{z_1} dz = \int_{t_c/2}^{t_c/2+t_1} dz, \quad \int_{z_2} dz = \int_{-t_c/2-t_2}^{-t_c/2} dz \tag{2.13}$$

である．さらに，表面材 1 および 2 の合応力，合せん断力および合モーメントの和 $N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}$ は

$$\begin{aligned} N_x &= N_x^{(1)} + N_x^{(2)}, N_y = N_y^{(1)} + N_y^{(2)}, N_{xy} = N_{xy}^{(1)} + N_{xy}^{(2)} \\ Q_x &= Q_x^{(1)} + Q_x^{(2)}, Q_y = Q_y^{(1)} + Q_y^{(2)} \\ M_x &= M_x^{(1)} + M_x^{(2)}, M_y = M_y^{(1)} + M_y^{(2)}, M_{xy} = M_{xy}^{(1)} + M_{xy}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

であり，式(2.5)による中央面におけるひずみおよび曲率を用いて次のように記述できる．

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & C_{11} & C_{12} & C_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & C_{12} & C_{22} & C_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & C_{16} & C_{26} & C_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \varepsilon_{xy0} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

ここで， k はせん断補正係数である．また， $A_{ij}^{(n)}, B_{ij}^{(n)}, D_{ij}^{(n)}$ ($i, j = 1, 2, 6$) は，それぞれ，表面材の面内伸縮，連成，曲げに関する剛性， $A_{ij}^{(n)}$ ($i, j = 4, 5$) は表面材の面外せん断変形に関する剛性を表し，式(2.10)で与えられる第 m 番目のラミナの剛性係数 $\bar{Q}_{ij}^{(n,m)}$ を用いて

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^{(1)} + A_{ij}^{(2)}, B_{ij} = B_{ij}^{(1)} + B_{ij}^{(2)}, D_{ij} = D_{ij}^{(1)} + D_{ij}^{(2)} \\ C_{ij} &= \frac{t_c}{2} (A_{ij}^{(1)} - A_{ij}^{(2)}), E_{ij} = \frac{t_c}{2} (B_{ij}^{(1)} - B_{ij}^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$(A_{ij}^{(n)}, B_{ij}^{(n)}, D_{ij}^{(n)}) = \sum_{m=1}^{N_n} \int_{h_{m-1}^{(n)}}^{h_m^{(n)}} \bar{Q}_{ij}^{(n,m)} (1, z, z^2) dz \quad (n = 1, 2 \mid i, j = 1, 2, 4, 5, 6)$$

と与えられる．

2.2.5 エネルギー評価

サンドイッチ長方形板の自由振動に対して角振動数 ω の調和振動を考え、板の各変位を

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= U_0(x, y) \sin \omega t \\
 v_0(x, y, t) &= V_0(x, y) \sin \omega t \\
 w_0(x, y, t) &= W_0(x, y) \sin \omega t \\
 \psi_x(x, y, t) &= \bar{\psi}_x(x, y) \sin \omega t \\
 \psi_y(x, y, t) &= \bar{\psi}_y(x, y) \sin \omega t \\
 \phi_x(x, y, t) &= \bar{\phi}_x(x, y) \sin \omega t \\
 \phi_y(x, y, t) &= \bar{\phi}_y(x, y) \sin \omega t
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

のように与える．ここでは，式(2.17)を用いて板の最大ひずみエネルギーと最大運動エネルギーを導く．

板の最大ひずみエネルギー U は表面材のひずみエネルギー U_f と心材のひずみエネルギー U_c との和で

$$U = U_f + U_c \tag{2.18}$$

と表すことができる．さらに，表面材のひずみエネルギー U_f は，表面材 1 のひずみエネルギー U_{f1} と表面材 2 のひずみエネルギー U_{f2} の和

$$U_f = U_{f1} + U_{f2} \tag{2.19}$$

である．さらに，表面材 n のひずみエネルギー U_{fn} ($n=1, 2$) は

$$\begin{aligned}
 U_{fn} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N_n} \int_{h_{m-1}^{(n)}}^{h_m^{(n)}} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} \\
 + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{yz} \gamma_{yz}]^{(n,m)} dx dy dz
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

であり，式(2.20)に式(2.4)と(2.9)を代入し，式(2.16)で与えられる剛性と式(2.17)を用いると，表面材の最大ひずみエネルギー U_f は

$$\begin{aligned}
 U_f = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [\{\varepsilon\}^T [A^{(m)}] \{\varepsilon\} + 2\{\varepsilon\}^T [B] \{\kappa\} + 2\{\varepsilon\}^T [C] \{\gamma\} \\
 + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} + (t_c^2/4) \{\gamma\}^T [A^{(m)}] \{\gamma\} \\
 + 2\{\gamma\}^T [E] \{\kappa\} + k\{\phi\}^T [A^{(s)}] \{\phi\}] dx dy
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

となる．上式において各剛性マトリックスは

$$\begin{aligned}
 [A^{(m)}] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, & [B] &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, & [D] &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \\
 [E] &= \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{bmatrix}, & [A^{(s)}] &= \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

であり，各ひずみベクトルは次のようになる．

$$\begin{aligned}
 \{\varepsilon\} &= \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{\partial V_0}{\partial y}, \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right\}^T \\
 \{\kappa\} &= \left\{ -\frac{\partial \bar{\phi}_x}{\partial x}, -\frac{\partial \bar{\phi}_y}{\partial y}, -\frac{\partial \bar{\phi}_x}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\phi}_y}{\partial x} \right\}^T \\
 \{\gamma\} &= \left\{ \frac{\partial(\bar{\phi}_x - \bar{\psi}_x)}{\partial x}, \frac{\partial(\bar{\phi}_y - \bar{\psi}_y)}{\partial y}, \frac{\partial(\bar{\phi}_x - \bar{\psi}_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\phi}_y - \bar{\psi}_y)}{\partial x} \right\}^T \\
 \{\phi\} &= \left\{ -\bar{\phi}_y + \frac{\partial W_0}{\partial y}, -\bar{\phi}_x + \frac{\partial W_0}{\partial x} \right\}^T
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

一方，心材のひずみエネルギー U_c は式(2.6)および(2.11)を用いて

$$\begin{aligned}
 U_c &= \frac{1}{2} \int_{-t_c/2}^{t_c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [\tau_{zx}^c \gamma_{zx}^c + \tau_{yz}^c \gamma_{yz}^c] dx dy dz \\
 &= \frac{t_c}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \{\gamma^c\}^T [G^c] \{\gamma^c\} dx dy
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

と表せる．上式において剛性マトリックスは

$$[G^c] = \begin{bmatrix} G_x^c & 0 \\ 0 & G_y^c \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

であり，ひずみベクトル $\{\gamma^c\}$ は

$$\{Y^c\} = \left\{ -\bar{\psi}_x + \frac{\partial W_0}{\partial x}, -\bar{\psi}_y + \frac{\partial W_0}{\partial y} \right\}^T \quad (2.26)$$

となる。

一方、板の最大運動エネルギー T は表面材の運動エネルギー T_f と心材の運動エネルギー T_c との和

$$T = T_f + T_c \quad (2.27)$$

であり、表面材の運動エネルギー T_f は表面材1の運動エネルギー T_{f1} と表面材2の運動エネルギー T_{f2} の和

$$T_f = T_{f1} + T_{f2} \quad (2.28)$$

である。また、表面材 n の運動エネルギー T_{fn} ($n=1,2$)はそれぞれ

$$T_{f1} = \frac{\rho_1}{2} \int_{t_c/2}^{t_c/2+t_1} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [\dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2 + \dot{w}_1^2] dx dy dz \quad (2.29)$$

$$T_{f2} = \frac{\rho_2}{2} \int_{-t_c/2-t_2}^{-t_c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [\dot{u}_2^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{w}_2^2] dx dy dz \quad (2.30)$$

と表すことができる。つぎに、心材の運動エネルギー T_c は

$$T_c = \frac{\rho_c}{2} \int_{-t_c/2}^{t_c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2 + \dot{w}_c^2] dx dy dz \quad (2.31)$$

である。式(2.29)~(2.31)において、 ρ_n および ρ_c はそれぞれ表面材 n と心材の平均密度であり、 $(\dot{})$ は時間微分を表す。式(2.17)を代入した式(2.1)を式(2.29)~(2.31)に代入し、 z 方向に積分すると、板の最大運動エネルギー T は変位の最大振幅を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} T = \frac{\omega^2}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [& I_1(U_0^2 + V_0^2 + W_0^2) \\ & + I_2 t_c \{ U_0(\bar{\phi}_x - \bar{\psi}_x) + V_0(\bar{\phi}_y - \bar{\psi}_y) \} \\ & + I_3 (U_0 \bar{\phi}_x + V_0 \bar{\phi}_y) \\ & + I_4 t_c \{ \bar{\phi}_x(\bar{\phi}_x - \bar{\psi}_x) + \bar{\phi}_y(\bar{\phi}_y - \bar{\psi}_y) \} \\ & + I_5 (\bar{\phi}_x^2 + \bar{\phi}_y^2) \\ & + I_6 (t_c^2/4) \{ (\bar{\phi}_x - \bar{\psi}_x)^2 + (\bar{\phi}_y - \bar{\psi}_y)^2 \} \\ & + I_7 (\bar{\psi}_x^2 + \bar{\psi}_y^2)] dx dy \end{aligned} \quad (2.32)$$

上式において、 I_i ($i=1,2,3,\dots,7$) は慣性量であり

$$\begin{aligned}
I_1 &= \rho_1 t_1 + \rho_2 t_2 + \rho_c t_c \\
I_2 &= \rho_1 t_1 - \rho_2 t_2 \\
I_3 &= -\rho_1 t_1 (t_1 + t_c) + \rho_2 t_2 (t_2 + t_c) \\
I_4 &= -\rho_1 t_1 (t_1 + t_c)/2 - \rho_2 t_2 (t_2 + t_c)/2 \\
I_5 &= \rho_1 (t_c^2 t_1/4 + t_c t_1^2/2 + t_1^3/3) + \rho_2 (t_c^2 t_2/4 + t_c t_2^2/2 + t_2^3/3) \\
I_6 &= \rho_1 t_1 + \rho_2 t_2 \\
I_7 &= \rho_c t_c^3/12
\end{aligned} \tag{2.33}$$

と与えられる。

つぎに、解析の簡単化のために、サンドイッチ長方形板の最大ひずみエネルギーと最大運動エネルギーに次の無次元量を導入する。ただし、 $H = t_1 + t_2 + t_c$ 、 $S_0 = E_1 a^3 \times 10^{-4}$ である。

$$\text{(無次元座標)} \quad \xi = x/(a/2), \quad \eta = y/(b/2)$$

$$\text{(寸法比)} \quad \alpha = a/b, \quad \beta = a/H, \quad \lambda = t_c/H, \quad \lambda_1 = t_1/a, \\ \lambda_2 = t_2/a, \quad \lambda_c = t_c/a$$

$$\text{(無次元変位)} \quad \bar{u} = U_0/H, \quad \bar{v} = V_0/H, \quad \bar{w} = W_0/H$$

$$\text{(密度比)} \quad \mu_1 = \rho_2/\rho_1, \quad \mu_2 = \rho_c/\rho_1 \tag{2.34}$$

(無次元剛性)

$$\begin{aligned}
(\bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}, \bar{C}_{ij}, \bar{D}_{ij}, \bar{E}_{ij}) &= (a^2 A_{ij}, a B_{ij}, a C_{ij}, D_{ij}, E_{ij})/S_0 \\
(\bar{G}_x, \bar{G}_y) &= a^3 (G_x^c, G_y^c)/S_0
\end{aligned}$$

$$\text{(無次元振動数)} \quad \Omega = \omega a \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} \times 10^2$$

以上の無次元量を式(2.23)、(2.26)のひずみベクトルに代入すると

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} &= \frac{2}{\beta} \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right\}^T \\
&= \frac{2}{\beta} \{\bar{\varepsilon}\} \\
\{\kappa\} &= \frac{2}{a} \left\{ -\frac{\partial \bar{\phi}_x}{\partial \xi}, -\alpha \frac{\partial \bar{\phi}_y}{\partial \eta}, -\alpha \frac{\partial \bar{\phi}_x}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{\phi}_y}{\partial \xi} \right\}^T \\
&= \frac{2}{a} \{\bar{\kappa}\} \\
\{\gamma\} &= \frac{2}{a} \left\{ \frac{\partial (\bar{\phi}_x - \bar{\psi}_x)}{\partial \xi}, \alpha \frac{\partial (\bar{\phi}_y - \bar{\psi}_y)}{\partial \eta}, \alpha \frac{\partial (\bar{\phi}_x - \bar{\psi}_x)}{\partial \eta} + \frac{\partial (\bar{\phi}_y - \bar{\psi}_y)}{\partial \xi} \right\}^T \quad (2.35) \\
&= \frac{2}{a} \{\bar{\gamma}\} \\
\{\phi\} &= \left\{ -\bar{\phi}_y + 2 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta}, -\bar{\phi}_x + \left(\frac{2}{\beta} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right\}^T \\
&= \{\bar{\phi}\} \\
\{\gamma^c\} &= \left\{ -\bar{\psi}_x + \left(\frac{2}{\beta} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}, -\bar{\psi}_y + 2 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right\}^T \\
&= \{\bar{\gamma}^c\}
\end{aligned}$$

となる．さらに，式(2.34)の無次元量と式(2.35)をひずみエネルギー式(2.21)および(2.24)に代入すると，板の最大ひずみエネルギー U は次のように書き直すことができる．

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \left(\frac{S_0}{\alpha \beta^2} \right) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\{\bar{\varepsilon}\}^T [\bar{A}^{(m)}] \{\bar{\varepsilon}\} + 2\beta \{\bar{\varepsilon}\}^T [\bar{B}] \{\bar{\kappa}\} \\
&\quad + 2\beta \{\bar{\varepsilon}\}^T [\bar{C}] \{\bar{\gamma}\} + \beta^2 \{\bar{\kappa}\}^T [\bar{D}] \{\bar{\kappa}\} \\
&\quad + (\lambda^2/4) \{\bar{\gamma}\}^T [\bar{A}^{(m)}] \{\bar{\gamma}\} + 2\beta^2 \{\bar{\gamma}\}^T [\bar{E}] \{\bar{\kappa}\} \\
&\quad + k(\beta^2/4) \{\bar{\phi}\}^T [\bar{A}^{(s)}] \{\bar{\phi}\} \\
&\quad + (\lambda\beta/4) \{\bar{\gamma}^c\}^T [\bar{G}^c] \{\bar{\gamma}^c\}] d\xi d\eta \quad (2.36)
\end{aligned}$$

ここで，各剛性マトリックスの各要素は式(2.34)で定義された無次元剛性で構成される．

つぎに，無次元量を導入した板の最大運動エネルギー T は次のようになる．

$$\begin{aligned}
T = \frac{1}{2} \Omega^2 \left(\frac{S_0}{\alpha \beta^2} \right) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [& \bar{I}_1 (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) \\
& + \bar{I}_2 \lambda \{ \bar{u} (\bar{\phi}_x - \bar{\psi}_x) + \bar{v} (\bar{\phi}_y - \bar{\psi}_y) \} \\
& + \bar{I}_3 \beta (\bar{u} \bar{\phi}_x + \bar{v} \bar{\phi}_y) \\
& + \bar{I}_4 \lambda \beta \{ \bar{\phi}_x (\bar{\phi}_x - \bar{\psi}_x) + \bar{\phi}_y (\bar{\phi}_y - \bar{\psi}_y) \} \\
& + \bar{I}_5 \beta^2 (\bar{\phi}_x^2 + \bar{\phi}_y^2) \\
& + \bar{I}_6 \lambda^2 \{ (\bar{\phi}_x - \bar{\psi}_x)^2 + (\bar{\phi}_y - \bar{\psi}_y)^2 \} \\
& + \bar{I}_7 \beta^2 (\bar{\psi}_x^2 + \bar{\psi}_y^2)] d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{2.37}$$

ここで、 \bar{I}_i ($i=1,2,\dots,7$) は無次元化された慣性量であり、それぞれ

$$\begin{aligned}
\bar{I}_1 &= (\lambda_1 + \mu_1 \lambda_2 + \mu_2 \lambda_c) / 4 \\
\bar{I}_2 &= (\lambda_1 - \mu_1 \lambda_2) / 4 \\
\bar{I}_3 &= -\lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_c) / 4 + \mu_1 \lambda_2 (\lambda_2 + \lambda_c) / 4 \\
\bar{I}_4 &= -\lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_c) / 8 - \mu_1 \lambda_2 (\lambda_2 + \lambda_c) / 8 \\
\bar{I}_5 &= \lambda_1 \lambda_c^2 / 16 + \lambda_1^2 \lambda_c / 8 + \lambda_1^3 / 12 \\
&+ \mu_1 (\lambda_2 \lambda_c^2 / 16 + \lambda_2^2 \lambda_c / 8 + \lambda_2^3 / 12) \\
\bar{I}_6 &= (\lambda_1 + \mu_1 \lambda_2) / 16 \\
\bar{I}_7 &= \mu_2 \lambda_c^3 / 48
\end{aligned} \tag{2.38}$$

である。

2.2.6 変位関数と振動数方程式

本解析では、板の周辺における幾何学的境界条件を満足する変位関数を二重級数により次のように仮定する。

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} U_{ij} X_{1i}(\xi) Y_{1j}(\eta) \\
\bar{v}(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} V_{ij} X_{2i}(\xi) Y_{2j}(\eta) \\
\bar{w}(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} W_{ij} X_{3i}(\xi) Y_{3j}(\eta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \psi_{xij} X_{4i}(\xi) Y_{4j}(\eta) \\
\bar{\psi}_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \psi_{yij} X_{5i}(\xi) Y_{5j}(\eta) \\
\bar{\phi}_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \phi_{xij} X_{6i}(\xi) Y_{6j}(\eta) \\
\bar{\phi}_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \phi_{yij} X_{7i}(\xi) Y_{7j}(\eta)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

ここで、上式中の U_{ij} , V_{ij} , W_{ij} , ψ_{xij} , ψ_{yij} , ϕ_{xij} , ϕ_{yij} は未定係数である。また、試験関数 $X_{ni}(\xi)$ および $Y_{nj}(\eta)$ は、選択する境界条件により決定される。境界条件が周辺単純支持の場合、拘束条件は

$$\begin{aligned}
\bar{u} = \bar{w} = \bar{\psi}_y = \bar{\phi}_y &= 0 \text{ at } \xi = \pm 1 \\
\bar{v} = \bar{w} = \bar{\psi}_x = \bar{\phi}_x &= 0 \text{ at } \eta = \pm 1
\end{aligned}$$

で与えられるので、試験関数として

$$\begin{aligned}
X_{1i}(\xi) &= X_{3i}(\xi) = X_{5i}(\xi) = X_{7i}(\xi) = \sin \left\{ \frac{(i+1)\pi}{2} (\xi+1) \right\} \\
X_{2i}(\xi) &= X_{4i}(\xi) = X_{6i}(\xi) = \cos \left\{ \frac{(i+1)\pi}{2} (\xi+1) \right\} \\
Y_{1j}(\eta) &= Y_{5j}(\eta) = Y_{7j}(\eta) = \cos \left\{ \frac{(j+1)\pi}{2} (\eta+1) \right\} \\
Y_{2j}(\eta) &= Y_{3j}(\eta) = Y_{4j}(\eta) = Y_{6j}(\eta) = \sin \left\{ \frac{(j+1)\pi}{2} (\eta+1) \right\}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

を使用すればよい。

つぎに、ラグランジュ関数 $L = T - U$ に関する停留条件を用いて、サンドイッチ板の振動数方程式を誘導する。このために、式(2.39)で与えられる変位関数をエネルギー式(2.36), (2.37)に代入し、ラグランジュ関数 $L = T - U$ に停留条件

$$\frac{\partial L}{\partial U_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial V_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial W_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial \psi_{xmn}} = \frac{\partial L}{\partial \psi_{ymn}} = \frac{\partial L}{\partial \phi_{xmn}} = \frac{\partial L}{\partial \phi_{ymn}} = 0 \tag{2.41}$$

$$(m=1, 2, \dots, I ; n=1, 2, \dots, J)$$

を適用すると、以下のような振動数方程式が得られる。

$$[[K_{ij}^{(mn)}] - \Omega^2[M_{ij}^{(mn)}]] \begin{Bmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \\ W_{ij} \\ \psi_{xij} \\ \psi_{yij} \\ \phi_{xij} \\ \phi_{yij} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.42)$$

($i, m=1,2,\dots,I$; $j, n=1,2,\dots,J$)

この固有値問題の固有値 Ω^2 から無次元振動数 Ω が得られ、各固有値に対応する固有ベクトルとして未定係数によるベクトル $\{U_{ij} V_{ij} W_{ij} \psi_{xij} \psi_{yij} \phi_{xij} \phi_{yij}\}^T$ が求められ、未定係数を変位の式(2.39)に代入することにより固有振動モードが得られる。ここで、式(2.42)中の係数マトリックス $[K_{ij}^{(mn)}]$ および $[M_{ij}^{(mn)}]$ は

$$[K_{ij}^{(mn)}] = \begin{bmatrix} Kaa_{ij}^{(mn)} & Kab_{ij}^{(mn)} & Kac_{ij}^{(mn)} & Kad_{ij}^{(mn)} & Kae_{ij}^{(mn)} & Kaf_{ij}^{(mn)} & Kag_{ij}^{(mn)} \\ & Kbb_{ij}^{(mn)} & Kbc_{ij}^{(mn)} & Kbd_{ij}^{(mn)} & Kbe_{ij}^{(mn)} & Kbf_{ij}^{(mn)} & Kbg_{ij}^{(mn)} \\ & & Kcc_{ij}^{(mn)} & Kcd_{ij}^{(mn)} & Kce_{ij}^{(mn)} & Kcf_{ij}^{(mn)} & Kcg_{ij}^{(mn)} \\ & & & Kdd_{ij}^{(mn)} & Kde_{ij}^{(mn)} & Kdf_{ij}^{(mn)} & Kdg_{ij}^{(mn)} \\ & & & & Kee_{ij}^{(mn)} & Kef_{ij}^{(mn)} & Keg_{ij}^{(mn)} \\ & \text{Sym.} & & & & Kff_{ij}^{(mn)} & Kfg_{ij}^{(mn)} \\ & & & & & & Kgg_{ij}^{(mn)} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$[M_{ij}^{(mn)}] = \begin{bmatrix} Maa_{ij}^{(mn)} & Mab_{ij}^{(mn)} & Mac_{ij}^{(mn)} & Mad_{ij}^{(mn)} & Mae_{ij}^{(mn)} & Maf_{ij}^{(mn)} & Mag_{ij}^{(mn)} \\ & Mbb_{ij}^{(mn)} & Mbc_{ij}^{(mn)} & Mbd_{ij}^{(mn)} & Mbe_{ij}^{(mn)} & Mbf_{ij}^{(mn)} & Mbg_{ij}^{(mn)} \\ & & Mcc_{ij}^{(mn)} & Mcd_{ij}^{(mn)} & Mce_{ij}^{(mn)} & Mcf_{ij}^{(mn)} & Mcg_{ij}^{(mn)} \\ & & & Mdd_{ij}^{(mn)} & Mde_{ij}^{(mn)} & Mdf_{ij}^{(mn)} & Mdg_{ij}^{(mn)} \\ & & & & Mee_{ij}^{(mn)} & Mef_{ij}^{(mn)} & Meg_{ij}^{(mn)} \\ & \text{Sym.} & & & & Mff_{ij}^{(mn)} & Mfg_{ij}^{(mn)} \\ & & & & & & Mgg_{ij}^{(mn)} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

であり，マトリックス $[K_{ij}^{(mn)}]$ の各要素は次のようになる．

$$Kaa_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{A}_{11} X'_{1i} X'_{1m} Y_{1j} Y_{1n} + \alpha \bar{A}_{16} X_{1i} X'_{1m} Y'_{1j} Y_{1n} \\ + \alpha \bar{A}_{16} X'_{1i} X_{1m} Y_{1j} Y'_{1n} + \alpha^2 \bar{A}_{66} X_{1i} X_{1m} Y'_{1j} Y'_{1n}] d\xi d\eta$$

$$Kab_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha \bar{A}_{12} X_{2i} X'_{1m} Y'_{2j} Y_{1n} + \bar{A}_{16} X'_{2i} X'_{1m} Y_{2j} Y_{1n} \\ + \alpha^2 \bar{A}_{26} X_{2i} X_{1m} Y'_{2j} Y'_{1n} + \alpha \bar{A}_{66} X'_{2i} X_{1m} Y_{2j} Y'_{1n}] d\xi d\eta$$

$$Kac_{ij}^{(mn)} = 0$$

$$Kad_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\beta \bar{C}_{11} X'_{4i} X'_{1m} Y_{4j} Y_{1n} - \alpha \beta \bar{C}_{16} X_{4i} X'_{1m} Y'_{4j} Y_{1n} \\ - \alpha \beta \bar{C}_{16} X'_{4i} X_{1m} Y_{4j} Y'_{1n} - \alpha^2 \beta \bar{C}_{66} X_{4i} X_{1m} Y'_{4j} Y'_{1n}] d\xi d\eta$$

$$Kae_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\alpha \beta \bar{C}_{12} X_{5i} X'_{1m} Y'_{5j} Y_{1n} - \beta \bar{C}_{16} X'_{5i} X'_{1m} Y_{5j} Y_{1n} \\ - \alpha^2 \beta \bar{C}_{26} X_{5i} X_{1m} Y'_{5j} Y'_{1n} - \alpha \beta \bar{C}_{66} X'_{5i} X_{1m} Y_{5j} Y'_{1n}] d\xi d\eta$$

$$Kaf_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\beta(\bar{C}_{11} - \bar{B}_{11}) X'_{6i} X'_{1m} Y_{6j} Y_{1n} + \alpha \beta (\bar{C}_{16} - \bar{B}_{16}) X_{6i} X'_{1m} Y'_{6j} Y_{1n} \\ + \alpha \beta (\bar{C}_{16} - \bar{B}_{16}) X'_{6i} X_{1m} Y_{6j} Y'_{1n} + \alpha^2 \beta (\bar{C}_{66} - \bar{B}_{66}) X_{6i} X_{1m} Y'_{6j} Y'_{1n}] d\xi d\eta$$

$$Kag_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha \beta (\bar{C}_{12} - \bar{B}_{12}) X_{7i} X'_{1m} Y'_{7j} Y_{1n} + \beta (\bar{C}_{16} - \bar{B}_{16}) X'_{7i} X'_{1m} Y_{7j} Y_{1n} \\ + \alpha^2 \beta (\bar{C}_{26} - \bar{B}_{26}) X_{7i} X_{1m} Y'_{7j} Y'_{1n} + \alpha \beta (\bar{C}_{66} - \bar{B}_{66}) X'_{7i} X_{1m} Y_{7j} Y'_{1n}] d\xi d\eta$$

$$Kbb_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha^2 \bar{A}_{22} X_{2i} X_{2m} Y'_{2j} Y'_{2n} + \alpha \bar{A}_{26} X_{2i} X'_{2m} Y'_{2j} Y_{2n} \\ + \alpha \bar{A}_{26} X'_{2i} X_{2m} Y_{2j} Y'_{2n} + \bar{A}_{66} X'_{2i} X'_{2m} Y_{2j} Y_{2n}] d\xi d\eta$$

$$Kbc_{ij}^{(mn)} = 0$$

$$Kbd_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\alpha \beta \bar{C}_{12} X'_{4i} X_{2m} Y_{4j} Y'_{2n} - \beta \bar{C}_{16} X'_{4i} X'_{2m} Y_{4j} Y_{2n} \\ - \alpha^2 \beta \bar{C}_{26} X_{4i} X_{2m} Y'_{4j} Y'_{2n} - \alpha \beta \bar{C}_{66} X_{4i} X'_{2m} Y'_{4j} Y_{2n}] d\xi d\eta$$

$$Kbe_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\alpha^2 \beta \bar{C}_{22} X_{5i} X_{2m} Y'_{5j} Y'_{2n} - \alpha \beta \bar{C}_{26} X_{5i} X'_{2m} Y'_{5j} Y_{2n} \\ - \alpha \beta \bar{C}_{26} X'_{5i} X_{2m} Y_{5j} Y'_{2n} - \beta \bar{C}_{66} X'_{5i} X'_{2m} Y_{5j} Y_{2n}] d\xi d\eta$$

$$Kbf_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha \beta (\bar{C}_{12} - \bar{B}_{12}) X'_{6i} X_{2m} Y_{6j} Y'_{2n} + \alpha \beta (\bar{C}_{16} - \bar{B}_{16}) X'_{6i} X'_{2m} Y_{6j} Y_{2n} \\ + \alpha^2 \beta (\bar{C}_{26} - \bar{B}_{26}) X_{6i} X_{2m} Y'_{6j} Y'_{2n} + \alpha \beta (\bar{C}_{66} - \bar{B}_{66}) X_{6i} X'_{2m} Y'_{6j} Y_{2n}] d\xi d\eta$$

$$Kbg_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha^2 \beta (\bar{C}_{22} - \bar{B}_{22}) X_{7i} X_{2m} Y'_{7j} Y'_{2n} + \alpha \beta (\bar{C}_{26} - \bar{B}_{26}) X_{7i} X'_{2m} Y'_{7j} Y_{2n} \\ + \alpha \beta (\bar{C}_{26} - \bar{B}_{26}) X'_{7i} X_{2m} Y_{7j} Y'_{2n} + \alpha \beta (\bar{C}_{66} - \bar{B}_{66}) X'_{7i} X'_{2m} Y_{7j} Y_{2n}] d\xi d\eta$$

$$Kcc_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [k\alpha^2 \bar{A}_{44} X_{3i} X_{3m} Y'_{3j} Y'_{3n} + k\bar{A}_{45} X_{3i} X'_{3m} Y'_{3j} Y_{3n} \\ + k\alpha \bar{A}_{45} X'_{3i} X_{3m} Y_{3j} Y'_{3n} + k\bar{A}_{55} X'_{3i} X'_{3m} Y_{3j} Y_{3n} \\ + (\lambda/\beta) \bar{G}_x X'_{3i} X'_{3m} Y_{3j} Y_{3n} + \alpha^2 (\lambda/\beta) \bar{G}_y X_{3i} X_{3m} Y'_{3j} Y'_{3n}] d\xi d\eta$$

$$Kcd_{ij}^{(mn)} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\lambda \bar{G}_x X_{4i} X'_{3m} Y_{4j} Y_{3n}] d\xi d\eta$$

$$Kce_{ij}^{(mn)} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\lambda \alpha \bar{G}_y X_{5i} X_{3m} Y_{5j} Y'_{3n}] d\xi d\eta$$

$$Kcf_{ij}^{(mn)} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [k\alpha\beta \bar{A}_{45} X_{6i} X_{3m} Y_{6j} Y'_{3n} + k\beta \bar{A}_{55} X_{6i} X'_{3m} Y_{6j} Y_{3n}] d\xi d\eta$$

$$Kcg_{ij}^{(mn)} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [k\alpha\beta \bar{A}_{44} X_{7i} X_{3m} Y_{7j} Y'_{3n} + k\beta \bar{A}_{45} X_{7i} X'_{3m} Y_{7j} Y_{3n}] d\xi d\eta$$

$$Kdd_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\lambda^2/4) \bar{A}_{11} X'_{4i} X'_{4m} Y_{4j} Y_{4n} + (\lambda^2/4) \alpha \bar{A}_{16} X_{4i} X'_{4m} Y'_{4j} Y_{4n} \\ + (\lambda^2/4) \alpha \bar{A}_{16} X'_{4i} X_{4m} Y_{4j} Y'_{4n} + (\lambda^2/4) \alpha^2 \bar{A}_{66} X_{4i} X_{4m} Y'_{4j} Y'_{4n} \\ + (\lambda\beta/4) \bar{G}_x X_{4i} X_{4m} Y_{4j} Y_{4n}] d\xi d\eta$$

$$Kde_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\lambda^2/4) \alpha \bar{A}_{12} X_{5i} X'_{4m} Y'_{5j} Y_{4n} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{16} X'_{5i} X'_{4m} Y_{5j} Y_{4n} \\ + (\lambda^2/4) \alpha^2 \bar{A}_{26} X_{5i} X_{4m} Y'_{5j} Y'_{4n} + (\lambda^2/4) \alpha \bar{A}_{66} X'_{5i} X_{4m} Y_{5j} Y'_{4n}] d\xi d\eta$$

$$Kdf_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\{ \beta^2 \bar{E}_{11} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{11} \} X'_{6i} X'_{4m} Y_{6j} Y_{4n} \\ + \alpha \{ \beta^2 \bar{E}_{16} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{16} \} X_{6i} X'_{4m} Y'_{6j} Y_{4n} \\ + \alpha \{ \beta^2 \bar{E}_{16} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{16} \} X'_{6i} X_{4m} Y_{6j} Y'_{4n} \\ + \alpha^2 \{ \beta^2 \bar{E}_{66} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{66} \} X_{6i} X_{4m} Y'_{6j} Y'_{4n}] d\xi d\eta$$

$$Kdg_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha \{ \beta^2 \bar{E}_{12} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{12} \} X_{7i} X'_{4m} Y'_{7j} Y_{4n} \\ + \{ \beta^2 \bar{E}_{16} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{16} \} X'_{7i} X'_{4m} Y_{7j} Y_{4n} \\ + \alpha^2 \{ \beta^2 \bar{E}_{26} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{26} \} X_{7i} X_{4m} Y'_{7j} Y'_{4n} \\ + \alpha \{ \beta^2 \bar{E}_{66} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{66} \} X'_{7i} X_{4m} Y_{7j} Y'_{4n}] d\xi d\eta$$

$$Kee_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha^2 (\lambda^2/4) \bar{A}_{22} X_{5i} X_{5m} Y'_{5j} Y'_{5n} + \alpha (\lambda^2/4) \bar{A}_{26} X_{5i} X'_{5m} Y'_{5j} Y_{5n} \\ + \alpha (\lambda^2/4) \bar{A}_{26} X'_{5i} X_{5m} Y_{5j} Y'_{5n} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{66} X'_{5i} X'_{5m} Y_{5j} Y_{5n} \\ + (\lambda\beta/4) \bar{G}_y X_{5i} X_{5m} Y_{5j} Y_{5n}] d\xi d\eta$$

$$Kef_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha \{ \beta^2 \bar{E}_{12} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{12} \} X'_{6i} X_{5m} Y_{6j} Y'_{5n} \\ + \{ \beta^2 \bar{E}_{16} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{16} \} X'_{6i} X'_{5m} Y_{6j} Y_{5n} \\ + \alpha^2 \{ \beta^2 \bar{E}_{26} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{26} \} X_{6i} X_{5m} Y'_{6j} Y'_{5n} \\ + \alpha \{ \beta^2 \bar{E}_{66} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{66} \} X_{6i} X'_{5m} Y'_{6j} Y_{5n}] d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned}
Keg_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha^2 \{ \beta^2 \bar{E}_{22} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{22} \} X_{7i} X_{5m} Y'_{7j} Y'_{5n} \\
&\quad + \alpha \{ \beta^2 \bar{E}_{26} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{26} \} X_{7i} X'_{5m} Y'_{7j} Y_{5n} \\
&\quad + \alpha \{ \beta^2 \bar{E}_{26} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{26} \} X'_{7i} X_{5m} Y_{7j} Y'_{5n} \\
&\quad + \{ \beta^2 \bar{E}_{66} - (\lambda^2/4) \bar{A}_{66} \} X'_{7i} X'_{5m} Y_{7j} Y_{5n}] d\xi d\eta \\
Kff_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\{ \beta^2 \bar{D}_{11} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{11} - 2\beta^2 \bar{E}_{11} \} X'_{6i} X'_{6m} Y_{6j} Y_{6n} \\
&\quad + \alpha \{ \beta^2 \bar{D}_{16} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{16} - 2\beta^2 \bar{E}_{16} \} X_{6i} X'_{6m} Y'_{6j} Y_{6n} \\
&\quad + \alpha \{ \beta^2 \bar{D}_{16} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{16} - 2\beta^2 \bar{E}_{16} \} X'_{6i} X_{6m} Y_{6j} Y'_{6n} \\
&\quad + \alpha^2 \{ \beta^2 \bar{D}_{66} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{66} - 2\beta^2 \bar{E}_{66} \} X_{6i} X_{6m} Y'_{6j} Y'_{6n} \\
&\quad + k\beta^2 \bar{A}_{55} X_{6i} X_{6m} Y_{6j} Y_{6n}] d\xi d\eta \\
Kfg_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\{ \beta^2 \bar{D}_{12} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{12} - 2\beta^2 \bar{E}_{12} \} X_{7i} X'_{6m} Y'_{7j} Y_{6n} \\
&\quad + \alpha \{ \beta^2 \bar{D}_{16} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{16} - 2\beta^2 \bar{E}_{16} \} X'_{7i} X'_{6m} Y_{7j} Y_{6n} \\
&\quad + \alpha \{ \beta^2 \bar{D}_{26} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{26} - 2\beta^2 \bar{E}_{26} \} X_{7i} X_{6m} Y'_{7j} Y'_{6n} \\
&\quad + \alpha^2 \{ \beta^2 \bar{D}_{66} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{66} - 2\beta^2 \bar{E}_{66} \} X'_{7i} X_{6m} Y_{7j} Y'_{6n} \\
&\quad + k\beta^2 \bar{A}_{45} X_{7i} X_{6m} Y_{7j} Y_{6n}] d\xi d\eta \\
Kgg_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha^2 \{ \beta^2 \bar{D}_{22} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{22} - 2\beta^2 \bar{E}_{22} \} X_{7i} X_{7m} Y'_{7j} Y'_{7n} \\
&\quad + \alpha \{ \beta^2 \bar{D}_{26} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{26} - 2\beta^2 \bar{E}_{26} \} X_{7i} X'_{7m} Y'_{7j} Y_{7n} \\
&\quad + \alpha \{ \beta^2 \bar{D}_{26} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{26} - 2\beta^2 \bar{E}_{26} \} X'_{7i} X_{7m} Y_{7j} Y'_{7n} \\
&\quad + \{ \beta^2 \bar{D}_{66} + (\lambda^2/4) \bar{A}_{66} - 2\beta^2 \bar{E}_{66} \} X'_{7i} X'_{7m} Y_{7j} Y_{7n} \\
&\quad + k\beta^2 \bar{A}_{44} X_{7i} X_{7m} Y_{7j} Y_{7n}] d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{2.45}$$

マトリックス $[M_{ij}^{(mn)}]$ の各要素は次のようになる。

$$\begin{aligned}
Maa_{ij}^{(mn)} &= \bar{I}_1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{1i} X_{1m} Y_{1j} Y_{1n} d\xi d\eta \\
Mab_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mac_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mad_{ij}^{(mn)} &= -(\bar{I}_2/2)\lambda \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{4i} X_{1m} Y_{4j} Y_{1n} d\xi d\eta \\
Mae_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Maf_{ij}^{(mn)} &= (-\bar{I}_3\beta/2 + \bar{I}_2\lambda/2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{6i} X_{1m} Y_{6j} Y_{1n} d\xi d\eta \\
Mag_{ij}^{(mn)} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Mbb_{ij}^{(mn)} &= \bar{I}_1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{2i} X_{2m} Y_{2j} Y_{2n} d\xi d\eta \\
Mbc_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mbd_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mbe_{ij}^{(mn)} &= -(\bar{I}_2 \lambda / 2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{5i} X_{2m} Y_{5j} Y_{2n} d\xi d\eta \\
Mbf_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mbg_{ij}^{(mn)} &= (\bar{I}_2 \lambda / 2 + \bar{I}_3 \beta / 2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{7i} X_{2m} Y_{7j} Y_{2n} d\xi d\eta \\
Mcc_{ij}^{(mn)} &= \bar{I}_1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{3i} X_{3m} Y_{3j} Y_{3n} d\xi d\eta \\
Mcd_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mce_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mcf_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mcg_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mdd_{ij}^{(mn)} &= (\bar{I}_6 \lambda^2 + \beta^2 \bar{I}_7) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{4i} X_{4m} Y_{4j} Y_{4n} d\xi d\eta \\
Mde_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mdf_{ij}^{(mn)} &= -(\bar{I}_4 \lambda \beta / 2 + \bar{I}_6 \lambda^2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{6i} X_{4m} Y_{6j} Y_{4n} d\xi d\eta \\
Mdg_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mee_{ij}^{(mn)} &= (\bar{I}_6 \lambda^2 + \beta^2 \bar{I}_7) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{5i} X_{5m} Y_{5j} Y_{5n} d\xi d\eta \\
Mef_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Meg_{ij}^{(mn)} &= -(\bar{I}_4 \lambda \beta / 2 + \bar{I}_6 \lambda^2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{7i} X_{5m} Y_{7j} Y_{5n} d\xi d\eta \\
Mff_{ij}^{(mn)} &= (\bar{I}_4 \lambda \beta + \beta^2 \bar{I}_5 + \lambda^2 \bar{I}_6) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{6i} X_{6m} Y_{6j} Y_{6n} d\xi d\eta \\
Mfg_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mgg_{ij}^{(mn)} &= (\bar{I}_4 \lambda \beta + \beta^2 \bar{I}_5 + \lambda^2 \bar{I}_6) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{7i} X_{7m} Y_{7j} Y_{7n} d\xi d\eta \tag{2.46}
\end{aligned}$$

式(2.45)および式(2.46)において(')は

$$X'_{pq} = \frac{\partial X_{pq}}{\partial \xi}, \quad Y'_{pq} = \frac{\partial Y_{pq}}{\partial \eta} \tag{2.47}$$

を表す。

2.2.7 表面材に古典積層理論を適用した定式化

“中央面に垂直な直線上の点は変形後も変形した中央面の法線上にある”とするキルヒホッフの仮定が成り立つ古典積層理論を表面材に適用する場合、2.2.1～2.2.6節において表面材に関するいくつかの部分を修正することにより定式化が可能となる。

まず、変位場の式(2.1)において

$$\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.48)$$

が成り立つ。したがって、式(2.3)において

$$\gamma_{yz}^{(n)} = \gamma_{zx}^{(n)} = 0 \quad (2.49)$$

となり、式(2.5)は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{y0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \gamma_x &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.50)$$

と書き改められる。また、座標 (x, y, z) 上に変換されたラミナの応力-ひずみ関係式(2.9)は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n,m)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(n,m)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (2.51)$$

のように縮小される。ここで、剛性係数 $\bar{Q}_{ij}^{(n,m)}$ は式(2.10)で与えられる。

式(2.50)を考慮すると，式(2.20)の表面材のひずみエネルギー U_{fn} は

$$U_{fn} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N_n} \int_{h_m^{(n-1)}}^{h_m^{(n)}} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}]^{(n,m)} dx dy dz \quad (2.52)$$

となる．つぎに，式(2.50)と式(2.51)を式(2.52)に代入し，式(2.16)を用いると，表面材のひずみエネルギー U_f は

$$\begin{aligned} U_f = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} & \{ \{\varepsilon\}^T [A^{(m)}] \{\varepsilon\} + 2 \{\varepsilon\}^T [B] \{\kappa\} + 2 \{\varepsilon\}^T [C] \{\gamma\} \\ & + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} + (t_c^2 / 4) \{\gamma\}^T [A^{(m)}] \{\gamma\} \\ & + 2 \{\gamma\}^T [E] \{\kappa\} \} dx dy \end{aligned} \quad (2.53)$$

となる．上式において各剛性マトリックスは式(2.22)で与えられ，各ひずみベクトルは次のようになる．

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{\partial V_0}{\partial y}, \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right\}^T \\ \{\kappa\} &= \left\{ -\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right\}^T \\ \{\gamma\} &= \left\{ \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial x}, \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial y}, 2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial x} \right\}^T \end{aligned} \quad (2.54)$$

この場合，サンドイッチ板の最大ひずみエネルギー U は表面材のひずみエネルギー式(2.53)および心材のひずみエネルギー式(2.24)の和で与えられる．

一方，サンドイッチ板の最大運動エネルギー T は式(2.48)を考慮すると，式(2.32)より

$$\begin{aligned} T = \frac{\omega^2}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} & \left[I_1 (U_0^2 + V_0^2 + W_0^2) \right. \\ & + I_2 t_c \left\{ U_0 \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} - \bar{\psi}_x \right) + V_0 \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} - \bar{\psi}_y \right) \right\} \\ & \left. + I_3 \left(U_0 \frac{\partial W_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial W_0}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + I_4 t_c \left\{ \frac{\partial W_0}{\partial x} \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} - \bar{\psi}_x \right) + \frac{\partial W_0}{\partial y} \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} - \bar{\psi}_y \right) \right\} \\
& + I_5 \left\{ \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} \right)^2 \right\} \\
& + I_6 (t_c^2 / 4) \left\{ \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} - \bar{\psi}_x \right)^2 + \left(\frac{\partial W_0}{\partial y} - \bar{\psi}_y \right)^2 \right\} \\
& + I_7 (\bar{\psi}_x^2 + \bar{\psi}_y^2)] dx dy
\end{aligned} \tag{2.55}$$

となる.

つぎに, 式(2.34)で与えられる無次元量を式(2.54)に代入すると

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} &= \frac{2}{\beta} \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right\}^T \\
&= \frac{2}{\beta} \{\bar{\varepsilon}\} \\
\{\kappa\} &= \frac{2}{a} \left\{ -\frac{2}{\beta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2}, -\frac{2\alpha^2}{\beta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2}, -\frac{4\alpha}{\beta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} \right\}^T \\
&= \frac{2}{a} \{\bar{\kappa}\} \\
\{\gamma\} &= \frac{2}{a} \left\{ \frac{2}{\beta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \xi}, \frac{2\alpha^2}{\beta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} - \alpha \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \eta}, \frac{4\alpha}{\beta} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \eta} - \alpha \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \xi} \right\}^T \\
&= \frac{2}{a} \{\bar{\gamma}\}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

となる. さらに, 式(2.34)の無次元量と式(2.56)を最大ひずみエネルギー式(2.53)に代入すると

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \left(\frac{S_0}{\alpha \beta^2} \right) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\{\bar{\varepsilon}\}^T [\bar{A}^{(m)}] \{\bar{\varepsilon}\} + 2\beta \{\bar{\varepsilon}\}^T [\bar{B}] \{\bar{\kappa}\} \\
&\quad + 2\beta \{\bar{\varepsilon}\}^T [\bar{C}] \{\bar{\gamma}\} + \beta^2 \{\bar{\kappa}\}^T [\bar{D}] \{\bar{\kappa}\} \\
&\quad + (\lambda^2 / 4) \{\bar{\gamma}\}^T [\bar{A}^{(m)}] \{\bar{\gamma}\} + 2\beta^2 \{\bar{\gamma}\}^T [\bar{E}] \{\bar{\kappa}\} \\
&\quad + (\lambda\beta / 4) \{\bar{\gamma}^c\}^T [\bar{G}^c] \{\bar{\gamma}^c\}] d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{2.57}$$

となる. ここで, 各剛性マトリックスの各要素は式(2.34)で定義される無次元剛性で構成される.

つぎに、式(2.34)の無次元量を運動エネルギー式(2.55)に代入すると

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{2} \Omega^2 \left(\frac{S_0}{\alpha \beta^2} \right) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{I}_1 (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) \\
& + \bar{I}_2 \lambda \left\{ \bar{u} \left(\frac{2}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} - \bar{\psi}_x \right) + \bar{v} \left(\frac{2\alpha}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} - \bar{\psi}_y \right) \right\} \\
& + \bar{I}_3 \beta \left(\bar{u} \frac{2}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{2\alpha}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right) \\
& + \bar{I}_4 \lambda \beta \left\{ \frac{2}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \left(\frac{2}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} - \bar{\psi}_x \right) + \frac{2\alpha}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \left(\frac{2\alpha}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} - \bar{\psi}_y \right) \right\} \\
& + \bar{I}_5 \beta^2 \left\{ \left(\frac{2}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{2\alpha}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} \right)^2 \right\} \\
& + \bar{I}_6 (\lambda^2 / 4) \left\{ \left(\frac{2}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} - \bar{\psi}_x \right)^2 + \left(\frac{2\alpha}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} - \bar{\psi}_y \right)^2 \right\} \\
& + \bar{I}_7 \beta^2 (\bar{\psi}_x^2 + \bar{\psi}_y^2)] d\xi d\eta \tag{2.58}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 \bar{I}_i ($i=1, 2, \dots, 7$) は無次元化された慣性量であり、それぞれ式(2.38)で与えられる。

ここで必要となる変位関数は \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} 、 $\bar{\psi}_x$ および $\bar{\psi}_y$ の五つであり、各変位関数を式(2.39)と同様に二重級数により次のように仮定する。

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} U_{ij} X_{1i}(\xi) Y_{1j}(\eta) \\
\bar{v}(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} V_{ij} X_{2i}(\xi) Y_{2j}(\eta) \\
\bar{w}(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} W_{ij} X_{3i}(\xi) Y_{3j}(\eta) \\
\bar{\psi}_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \psi_{xij} X_{4i}(\xi) Y_{4j}(\eta) \\
\bar{\psi}_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \psi_{yij} X_{5i}(\xi) Y_{5j}(\eta) \tag{2.59}
\end{aligned}$$

ここで、上式中の U_{ij} 、 V_{ij} 、 W_{ij} 、 ψ_{xij} 、 ψ_{yij} は未定係数である。また、 $X_{ni}(\xi)$ および $Y_{nj}(\eta)$ は、板の幾何学的境界条件を満足する試験関数である。

ここでは、板の境界条件を周辺自由，周辺単純支持，周辺固定および片持ちの4通りとし，各々の境界条件において試験関数を次のように使い分ける。

(a) 周辺自由

$$\begin{aligned} X_{1i}(\xi) &= X_{2i}(\xi) = X_{3i}(\xi) = X_{4i}(\xi) = X_{5i}(\xi) = \xi^i \\ Y_{1j}(\eta) &= Y_{2j}(\eta) = Y_{3j}(\eta) = Y_{4j}(\eta) = Y_{5j}(\eta) = \eta^j \end{aligned} \quad (2.60)$$

(b) 周辺単純支持

$$\text{拘束条件： } \bar{u} = \bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} = \bar{\psi}_y = 0 \text{ at } \xi = \pm 1$$

$$\bar{v} = \bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = \bar{\psi}_x = 0 \text{ at } \eta = \pm 1$$

$$\begin{aligned} X_{1i}(\xi) &= X_{3i}(\xi) = X_{5i}(\xi) = \sin \left\{ \frac{(i+1)\pi}{2} (\xi+1) \right\} \\ X_{2i}(\xi) &= X_{4i}(\xi) = \cos \left\{ \frac{(i+1)\pi}{2} (\xi+1) \right\} \\ Y_{1j}(\eta) &= Y_{5j}(\eta) = \cos \left\{ \frac{(j+1)\pi}{2} (\eta+1) \right\} \\ Y_{2j}(\eta) &= Y_{3j}(\eta) = Y_{4j}(\eta) = \sin \left\{ \frac{(j+1)\pi}{2} (\eta+1) \right\} \end{aligned} \quad (2.61)$$

または

$$\begin{aligned} X_{1i}(\xi) &= X_{3i}(\xi) = X_{5i}(\xi) = \xi^i (\xi^2 - 1) \\ X_{2i}(\xi) &= X_{4i}(\xi) = \xi^i \\ Y_{2j}(\eta) &= Y_{3j}(\eta) = Y_{4j}(\eta) = \eta^j (\eta^2 - 1) \\ Y_{1j}(\eta) &= Y_{5j}(\eta) = \eta^j \end{aligned} \quad (2.62)$$

(c) 周辺固定

$$\text{拘束条件： } \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = \bar{\psi}_x = \bar{\psi}_y = 0 \text{ at } \xi = \pm 1$$

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} = \bar{\psi}_x = \bar{\psi}_y = 0 \text{ at } \eta = \pm 1$$

$$\begin{aligned}
X_{1i}(\xi) &= X_{2i}(\xi) = X_{4i}(\xi) = X_{5i}(\xi) = \xi^i(\xi^2 - 1) \\
X_{3i}(\xi) &= \xi^i(\xi^2 - 1)^2 \\
Y_{1j}(\eta) &= Y_{2j}(\eta) = Y_{4j}(\eta) = Y_{5j}(\eta) = \eta^j(\eta^2 - 1) \\
Y_{3j}(\eta) &= \eta^j(\eta^2 - 1)^2
\end{aligned} \tag{2.63}$$

(d) 片持ち

$$\text{拘束条件: } \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} = \bar{\psi}_x = \bar{\psi}_y = 0 \text{ at } \xi = -1$$

$$\begin{aligned}
X_{1i}(\xi) &= X_{2i}(\xi) = X_{4i}(\xi) = X_{5i}(\xi) = \xi^i(\xi + 1) \\
X_{3i}(\xi) &= \xi^i(\xi + 1)^2 \\
Y_{1j}(\eta) &= Y_{2j}(\eta) = Y_{3j}(\eta) = Y_{4j}(\eta) = Y_{5j}(\eta) = \eta^j
\end{aligned} \tag{2.64}$$

以上のような試験関数を使い分けることにより種々の境界条件をもつサンドイッチ長方形板の解析が可能となる。

ここで、式(2.41)と同様な方法でサンドイッチ長方形板の振動数方程式を誘導すると、固有値問題

$$\left[[K_{ij}^{(mn)}] - \Omega^2 [M_{ij}^{(mn)}] \right] \begin{Bmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \\ W_{ij} \\ \psi_{xij} \\ \psi_{yij} \end{Bmatrix} = 0 \tag{2.65}$$

が得られ、この固有値問題の固有値 Ω^2 から無次元振動数 Ω が得られる。また、各固有値に対応する固有ベクトルとして、未定係数によるベクトル $\{U_{ij} \ V_{ij} \ W_{ij} \ \psi_{xij} \ \psi_{yij}\}^T$ が得られ、未定係数を式(2.59)の変位に代入することにより振動モードが求められる。

ここで、式(2.65)中の係数マトリックス $[K_{ij}^{(mn)}]$ および $[M_{ij}^{(mn)}]$ は

$$[K_{ij}^{(mn)}] = \begin{bmatrix} Kaa_{ij}^{(mn)} & Kab_{ij}^{(mn)} & Kac_{ij}^{(mn)} & Kad_{ij}^{(mn)} & Kae_{ij}^{(mn)} \\ & Kbb_{ij}^{(mn)} & Kbc_{ij}^{(mn)} & Kbd_{ij}^{(mn)} & Kbe_{ij}^{(mn)} \\ & & Kcc_{ij}^{(mn)} & Kcd_{ij}^{(mn)} & Kce_{ij}^{(mn)} \\ & \text{Sym.} & & Kdd_{ij}^{(mn)} & Kde_{ij}^{(mn)} \\ & & & & Kee_{ij}^{(mn)} \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

$$[M_{ij}^{(mn)}] = \begin{bmatrix} Maa_{ij}^{(mn)} & Mab_{ij}^{(mn)} & Mac_{ij}^{(mn)} & Maa_{ij}^{(mn)} & Mae_{ij}^{(mn)} \\ & Mbb_{ij}^{(mn)} & Mbc_{ij}^{(mn)} & Mbd_{ij}^{(mn)} & Mbe_{ij}^{(mn)} \\ & & Mcc_{ij}^{(mn)} & Mcd_{ij}^{(mn)} & Mce_{ij}^{(mn)} \\ & \text{Sym.} & & Mdd_{ij}^{(mn)} & Mde_{ij}^{(mn)} \\ & & & & Mee_{ij}^{(mn)} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

であり，マトリックス $[K_{ij}^{(mn)}]$ の各要素は次のようになる。

$$\begin{aligned} Kaa_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{A}_{11} X'_{1i} X'_{1m} Y_{1j} Y_{1n} + \alpha \bar{A}_{16} X_{1i} X'_{1m} Y'_{1j} Y_{1n} \\ &\quad + \alpha \bar{A}_{16} X'_{1i} X_{1m} Y_{1j} Y'_{1n} + \alpha^2 \bar{A}_{66} X_{1i} X_{1m} Y'_{1j} Y'_{1n}] d\xi d\eta \\ Kab_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha \bar{A}_{12} X_{2i} X'_{1m} Y'_{2j} Y_{1n} + \bar{A}_{16} X'_{2i} X'_{1m} Y_{2j} Y_{1n} \\ &\quad + \alpha^2 \bar{A}_{26} X_{2i} X_{1m} Y'_{2j} Y'_{1n} + \alpha \bar{A}_{66} X'_{2i} X_{1m} Y_{2j} Y'_{1n}] d\xi d\eta \\ Kac_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2(\bar{C}_{11} - \bar{B}_{11}) X''_{1i} X'_{1m} Y_{1j} Y_{1n} \\ &\quad + 4\alpha^2 (\bar{C}_{66} - \bar{B}_{66}) X_{1i} X'_{1m} Y'_{1j} Y'_{1n} \\ &\quad + 2\alpha^2 (\bar{C}_{12} - \bar{B}_{12}) X_{1i} X'_{1m} Y''_{1j} Y_{1n} \\ &\quad + 4\alpha (\bar{C}_{16} - \bar{B}_{16}) X'_{1i} X'_{1m} Y'_{1j} Y_{1n} \\ &\quad + 2\alpha (\bar{C}_{16} - \bar{B}_{16}) X''_{1i} X_{1m} Y_{1j} Y'_{1n} \\ &\quad + 2\alpha^3 (\bar{C}_{26} - \bar{B}_{26}) X_{1i} X_{1m} Y''_{1j} Y'_{1n}] d\xi d\eta \\ Kad_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\beta \bar{C}_{11} X'_{4i} X'_{1m} Y_{4j} Y_{1n} - \alpha \beta \bar{C}_{16} X_{4i} X'_{1m} Y'_{4j} Y_{1n} \\ &\quad - \alpha \beta \bar{C}_{16} X'_{4i} X_{1m} Y_{4j} Y'_{1n} - \alpha^2 \beta \bar{C}_{66} X_{4i} X_{1m} Y'_{4j} Y'_{1n}] d\xi d\eta \\ Kae_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\alpha \beta \bar{C}_{12} X_{5i} X'_{1m} Y'_{5j} Y_{1n} - \beta \bar{C}_{16} X'_{5i} X'_{1m} Y_{5j} Y_{1n} \\ &\quad - \alpha^2 \beta \bar{C}_{26} X_{5i} X_{1m} Y'_{5j} Y'_{1n} - \alpha \beta \bar{C}_{66} X'_{5i} X_{1m} Y_{5j} Y'_{1n}] d\xi d\eta \\ Kbb_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha^2 \bar{A}_{22} X_{2i} X_{2m} Y'_{2j} Y'_{2n} + \alpha \bar{A}_{26} X_{2i} X'_{2m} Y'_{2j} Y_{2n} \\ &\quad + \alpha \bar{A}_{26} X'_{2i} X_{2m} Y_{2j} Y'_{2n} + \bar{A}_{66} X'_{2i} X'_{2m} Y_{2j} Y_{2n}] d\xi d\eta \\ Kbc_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2\alpha^3 (\bar{C}_{22} - \bar{B}_{22}) X_{3i} X_{2m} Y''_{3j} Y'_{2n} \\ &\quad + 4\alpha (\bar{C}_{66} - \bar{B}_{66}) X'_{3i} X'_{2m} Y'_{3j} Y_{2n} \\ &\quad + 2\alpha (\bar{C}_{12} - \bar{B}_{12}) X''_{3i} X_{2m} Y_{3j} Y'_{2n} \\ &\quad + 2(\bar{C}_{16} - \bar{B}_{16}) X''_{3i} X'_{2m} Y_{3j} Y_{2n} \\ &\quad + 4\alpha^2 (\bar{C}_{26} - \bar{B}_{26}) X'_{3i} X_{2m} Y'_{3j} Y'_{2n} \\ &\quad + 2\alpha^2 (\bar{C}_{26} - \bar{B}_{26}) X_{3i} X'_{2m} Y''_{3j} Y_{2n}] d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$Kbd_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\alpha\beta \bar{C}_{12} X'_{4i} X_{2m} Y_{4j} Y'_{2n} - \beta \bar{C}_{16} X'_{4i} X'_{2m} Y_{4j} Y_{2n} \\ - \alpha^2 \beta \bar{C}_{26} X_{4i} X_{2m} Y'_{4j} Y'_{2n} - \alpha \beta \bar{C}_{66} X_{4i} X'_{2m} Y'_{4j} Y_{2n}] d\xi d\eta$$

$$Kbe_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\alpha^2 \beta \bar{C}_{22} X_{5i} X_{2m} Y'_{5j} Y'_{2n} - \alpha \beta \bar{C}_{26} X_{5i} X'_{2m} Y'_{5j} Y_{2n} \\ - \alpha \beta \bar{C}_{26} X'_{5i} X_{2m} Y_{5j} Y'_{2n} - \beta \bar{C}_{66} X'_{5i} X'_{2m} Y_{5j} Y_{2n}] d\xi d\eta$$

$$Kcc_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [4\{\bar{D}_{11} + (\lambda^2/4\beta^2)\bar{A}_{11} - 2\bar{E}_{11}\} X''_{3i} X''_{3m} Y_{3j} Y_{3n} \\ + 4\alpha^4 \{\bar{D}_{22} + (\lambda^2/4\beta^2)\bar{A}_{22} - 2\bar{E}_{22}\} X_{3i} X_{3m} Y''_{3j} Y''_{3n} \\ + 16\alpha^2 \{\bar{D}_{66} + (\lambda^2/4\beta^2)\bar{A}_{66} - 2\bar{E}_{66}\} X'_{3i} X'_{3m} Y'_{3j} Y'_{3n} \\ + 4\alpha^2 \{\bar{D}_{12} + (\lambda^2/4\beta^2)\bar{A}_{12} - 2\bar{E}_{12}\} X''_{3i} X_{3m} Y_{3j} Y''_{3n} \\ + 4\alpha^2 \{\bar{D}_{12} + (\lambda^2/4\beta^2)\bar{A}_{12} - 2\bar{E}_{12}\} X_{3i} X''_{3m} Y''_{3j} Y_{3n} \\ + 8\alpha \{\bar{D}_{16} + (\lambda^2/4\beta^2)\bar{A}_{16} - 2\bar{E}_{16}\} X''_{3i} X'_{3m} Y_{3j} Y'_{3n} \\ + 8\alpha \{\bar{D}_{16} + (\lambda^2/4\beta^2)\bar{A}_{16} - 2\bar{E}_{16}\} X'_{3i} X''_{3m} Y'_{3j} Y_{3n} \\ + 8\alpha^3 \{\bar{D}_{26} + (\lambda^2/4\beta^2)\bar{A}_{26} - 2\bar{E}_{26}\} X_{3i} X'_{3m} Y''_{3j} Y'_{3n} \\ + 8\alpha^3 \{\bar{D}_{26} + (\lambda^2/4\beta^2)\bar{A}_{26} - 2\bar{E}_{26}\} X'_{3i} X_{3m} Y'_{3j} Y''_{3n} \\ + (\lambda/\beta)\bar{G}_x X'_{3i} X'_{3m} Y_{3j} Y_{3n} + \alpha^2(\lambda/\beta)\bar{G}_y X_{3i} X_{3m} Y'_{3j} Y'_{3n}] d\xi d\eta$$

$$Kcd_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2\{\beta \bar{E}_{11} - (\lambda^2/4\beta)\bar{A}_{11}\} X'_{4i} X''_{3m} Y_{4j} Y_{3n} \\ + 4\alpha^2 \{\beta \bar{E}_{66} - (\lambda^2/4\beta)\bar{A}_{66}\} X_{4i} X'_{3m} Y'_{4j} Y'_{3n} \\ + 2\alpha^2 \{\beta \bar{E}_{12} - (\lambda^2/4\beta)\bar{A}_{12}\} X'_{4i} X_{3m} Y_{4j} Y''_{3n} \\ + 4\alpha \{\beta \bar{E}_{16} - (\lambda^2/4\beta)\bar{A}_{16}\} X'_{4i} X'_{3m} Y_{4j} Y'_{3n} \\ + 2\alpha \{\beta \bar{E}_{16} - (\lambda^2/4\beta)\bar{A}_{16}\} X_{4i} X''_{3m} Y'_{4j} Y_{3n} \\ + 2\alpha^3 \{\beta \bar{E}_{26} - (\lambda^2/4\beta)\bar{A}_{26}\} X_{4i} X_{3m} Y'_{4j} Y''_{3n} \\ - (\lambda/2)\bar{G}_x X_{4i} X'_{3m} Y_{4j} Y_{3n}] d\xi d\eta$$

$$Kce_{ij}^{(mn)} = -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2\alpha^3 \{\beta \bar{E}_{22} - (\lambda^2/4\beta)\bar{A}_{22}\} X_{5i} X_{3m} Y'_{5j} Y''_{3n} \\ + 4\alpha \{\beta \bar{E}_{66} - (\lambda^2/4\beta)\bar{A}_{66}\} X'_{5i} X'_{3m} Y_{5j} Y'_{3n} \\ + 2\alpha \{\beta \bar{E}_{12} - (\lambda^2/4\beta)\bar{A}_{12}\} X_{5i} X''_{3m} Y'_{5j} Y_{3n} \\ + 2\{\beta \bar{E}_{16} - (\lambda^2/4\beta)\bar{A}_{16}\} X'_{5i} X''_{3m} Y_{5j} Y_{3n} \\ + 4\alpha^2 \{\beta \bar{E}_{26} - (\lambda^2/4\beta)\bar{A}_{26}\} X_{5i} X'_{3m} Y'_{5j} Y'_{3n} \\ + 2\alpha^2 \{\beta \bar{E}_{26} - (\lambda^2/4\beta)\bar{A}_{26}\} X'_{5i} X_{3m} Y_{5j} Y''_{3n} \\ - (\lambda\alpha/2)\bar{G}_y X_{4i} X'_{3m} Y_{4j} Y_{3n}] d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned}
Kdd_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\lambda^2/4)\bar{A}_{11} X'_{4i} X'_{4m} Y_{4j} Y_{4n} + (\lambda^2/4)\alpha \bar{A}_{16} X_{4i} X'_{4m} Y'_{4j} Y_{4n} \\
&\quad + (\lambda^2/4)\alpha \bar{A}_{16} X'_{4i} X_{4m} Y_{4j} Y'_{4n} + (\lambda^2/4)\alpha^2 \bar{A}_{66} X_{4i} X_{4m} Y'_{4j} Y'_{4n} \\
&\quad + (\lambda\beta/4)\bar{G}_x X_{4i} X_{4m} Y_{4j} Y_{4n}] d\xi d\eta \\
Kde_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\lambda^2/4)\alpha \bar{A}_{12} X_{5i} X'_{4m} Y'_{5j} Y_{4n} + (\lambda^2/4)\bar{A}_{16} X'_{5i} X'_{4m} Y_{5j} Y_{4n} \\
&\quad + (\lambda^2/4)\alpha^2 \bar{A}_{26} X_{5i} X_{4m} Y'_{5j} Y'_{4n} + (\lambda^2/4)\alpha \bar{A}_{66} X'_{5i} X_{4m} Y_{5j} Y'_{4n}] d\xi d\eta \\
Kee_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha^2(\lambda^2/4)\bar{A}_{22} X_{5i} X_{5m} Y'_{5j} Y'_{5n} + \alpha(\lambda^2/4)\bar{A}_{26} X_{5i} X'_{5m} Y'_{5j} Y_{5n} \\
&\quad + \alpha(\lambda^2/4)\bar{A}_{26} X'_{5i} X_{5m} Y_{5j} Y'_{5n} + (\lambda^2/4)\bar{A}_{66} X'_{5i} X'_{5m} Y_{5j} Y_{5n}] d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{2.68}$$

また，マトリックス $[M_{ij}^{(mn)}]$ の各要素は次のようになる．

$$\begin{aligned}
Maa_{ij}^{(mn)} &= \bar{I}_1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_i X_{1m} Y_{1j} Y_{1n} d\xi d\eta \\
Mab_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mac_{ij}^{(mn)} &= \{(\lambda/\beta)\bar{I}_2 + 2\bar{I}_3\} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X'_{3i} X_{1m} Y_{3j} Y_{1n} d\xi d\eta \\
Mad_{ij}^{(mn)} &= -(\lambda\bar{I}_2/2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{4i} X_{1m} Y_{4j} Y_{1n} d\xi d\eta \\
Mae_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mbb_{ij}^{(mn)} &= \bar{I}_1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{2i} X_{2m} Y_{2j} Y_{2n} d\xi d\eta \\
Mbc_{ij}^{(mn)} &= \alpha\{(\lambda/\beta)\bar{I}_2 + 2\bar{I}_3\} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{3i} X_{2m} Y'_{3j} Y_{2n} d\xi d\eta \\
Mbd_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mbe_{ij}^{(mn)} &= -(\lambda\bar{I}_2/2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{5i} X_{2m} Y_{5j} Y_{2n} d\xi d\eta \\
Mcc_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{I}_1 X_{3i} X_{3m} Y_{3j} Y_{3n} \\
&\quad + \{4(\lambda/\beta)\bar{I}_4 + 4\bar{I}_5 + (\lambda^2/\beta^2)\bar{I}_6\} X'_{3i} X'_{3m} Y_{3j} Y_{3n} \\
&\quad + \alpha^2\{4(\lambda/\beta)\bar{I}_4 + 4\bar{I}_5 + (\lambda^2/\beta^2)\bar{I}_6\} X_{3i} X_{3m} Y'_{3j} Y'_{3n}] d\xi d\eta \\
Mcd_{ij}^{(mn)} &= -[\lambda\bar{I}_4 + (\lambda^2/4\beta)\bar{I}_6] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{4i} X'_{3m} Y_{4j} Y_{3n} d\xi d\eta \\
Mce_{ij}^{(mn)} &= -\alpha[\lambda\bar{I}_4 + (\lambda^2/4\beta)\bar{I}_6] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{5i} X'_{3m} Y_{5j} Y_{3n} d\xi d\eta \\
Mdd_{ij}^{(mn)} &= (\lambda^2\bar{I}_6 + \beta^2\bar{I}_7) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{4i} X_{4m} Y_{4j} Y_{4n} d\xi d\eta \\
Mde_{ij}^{(mn)} &= 0 \\
Mee_{ij}^{(mn)} &= (\lambda^2\bar{I}_6 + \beta^2\bar{I}_7) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 X_{5i} X_{5m} Y_{5j} Y_{5n} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{2.69}$$

式(2.68)および式(2.69)において(')および('')は

$$X'_{pq} = \frac{\partial X_{pq}}{\partial \xi}, \quad X''_{pq} = \frac{\partial^2 X_{pq}}{\partial \xi^2}, \quad Y'_{pq} = \frac{\partial Y_{pq}}{\partial \eta}, \quad Y''_{pq} = \frac{\partial^2 Y_{pq}}{\partial \eta^2} \quad (2.70)$$

を表す。

2.3 ハニカムサンドイッチ長方形板の自由振動⁽⁸⁸⁾⁽⁸⁹⁾

本節では、心材にハニカム材を使用したハニカムサンドイッチ長方形板の自由振動について検討する。

積層表面材1,2のラミナはともにGraphite/Epoxy (以下G/E材と称す)とし、数値計算では表2-1に示す材料定数⁽⁹⁰⁾⁽⁹¹⁾を使用した。

表 2-1 G/E材とハニカム材の材料定数

Graphite/Epoxy (T300/5208) ⁽⁹⁰⁾						
E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	ν_{12}	G_{12} [GPa]	ρ_1 [kg/m ³]	E_1/E_2	G_{12}/E_2
153	10.9	0.3	5.6	1.59×10^3	14.0	0.51

Al-Honeycomb (AL 3/16-5052-.0015) ⁽⁹¹⁾					
G_x^c [MPa]	G_y^c [MPa]	ρ_c [kg/m ³]	G_x^c/G_{12}	G_x^c/G_y^c	ρ_c/ρ_1
323.6	147.1	75	0.058	2.20	0.047

一方、変位場Type-2を使用する際に必要となる面外方向の材料定数については、ラミナが一方向強化材であることから、面外等方性を仮定し

$$G_{31}/G_{12} = 1, \quad G_{23} = E_2/[2(1+\nu_{23})], \quad \nu_{23} = 0.3 \quad (2.71)$$

とした。また、せん断補正係数 k は $5/6$ ⁽⁹²⁾を使用した。

板の積層形態については、(表面材2/心材C/表面材1)とし、 $(\theta_1^{(2)}/\dots/\theta_m^{(2)}/\dots/\theta_{N_2}^{(2)}/C/\theta_1^{(1)}/\dots/\theta_m^{(1)}/\dots/\theta_{N_1}^{(1)})$ のように表す。ただし、 $\theta_m^{(n)}$ は表面材 n ($n=1,2$)の第 m 層目のラミナの繊維角度を表す。

2.3.1 数値計算精度の検討

本解析はリッツ法を用いているため、解の精度は変位関数式(2.39)および式(2.59)の項数 $I \times J$ に依存する。したがって、はじめに、項数の変化による無次元振動数の収束状況を調べ、解の精度を検討する。さらに、他の著者らによる解析結果との比較により本解析値の妥当性を検討する。

表2-2は変位関数中の試験関数に三角関数を使用した場合の周辺単純支持されたサンドイッチ正方形板について、変位関数の項数による無次元振動数 Ω の収束状況を示したものである。ここで、 Ω_i の添字 i はモード次数を表す。また、上段の値がType-1の変位場（表面材の変形において面外せん断変形を無視）による結果であり、括弧付きの下段の値がType-2の変位場（表面材の変形において面外せん断変形を考慮）による結果を示す。さらに、板の積層形態を $(30^\circ / -30^\circ / C / -30^\circ / 30^\circ)$ とし、板厚比 a/H は100、10および1の3通りとした。 $a/H=1$ の場合、比較的低次で面内方向の伸縮モードが現れるが、ここでは曲げモードのみを扱う。収束状況をみると、 $a/H=100$ の場合、いずれの振動数に対しても収束が早く、Type-1では項数 6×6 で、Type-2では Ω_1 を除いて項数 7×7 において有効数字4桁で収束している。一方、 $a/H=10$ と1では収束がやや遅くなっているが、全体的に見て解の収束は良好であり、数値計算には $I \times J = 8 \times 8$ の項数を採用した。

表2-3は周辺自由、周辺単純支持、周辺固定および片持ちのサンドイッチ正方形板について、項数の変化による無次元振動数 Ω の収束状況を示したものである。ここでは、変位場Type-1を使用し、変位関数中の試験関数にべき関数を使用している。また、板厚比を $a/H=100$ とし、積層形態は $(30^\circ / -30^\circ / C / -30^\circ / 30^\circ)$ とした。境界条件、モード次数の違いにより収束状況はいくらか異なるが、いずれの場合も、項数 12×12 までとると有効数字2~4桁で収束した解が得られる。したがって、数値計算では、項数 $I \times J = 12 \times 12$ を採用した。

表2-4にIbrahimら⁽¹⁾によるサンドイッチ長方形板の固有振動数との比較を示す。同表中のモード (m, n) の m および n は x および y 方向の半波数を表す。文献(1)では表面材の面外せん断変形を考慮せずに、厳密解を求めている。文献(1)と同様に表面材における面外せん断変形を無視した変位場Type-1による結果は、変位関数の試験関数に三角関数あるいはべき

表2-2 項数の変化による無次元振動数 Ω の収束状況

【 $a/b=1, t_1/a=t_2/a=H/10a, t_c/a=4H/5a, E_1/E_2=14.0, G_{12}/E_2=0.51,$
 $G_{31}/G_{12}=1, G_{23}=E_2/2(1+\nu_{23}), \nu_{12}=0.3, \nu_{23}=0.3, G_x^c/G_{12}=0.058,$
 $G_x^c/G_y^c=2.20, \rho_c/\rho_1=0.047, \rho_1/\rho_2=1, (30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$ 】

a/H	$I \times J$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
100	6×6	5.598*	10.94	15.10	18.54	21.61
		(5.598)**	(10.94)	(15.10)	(18.54)	(21.61)
	7×7	5.598	10.94	15.10	18.54	21.61
		(5.598)	(10.94)	(15.10)	(18.54)	(21.60)
	8×8	5.598	10.94	15.10	18.54	21.61
		(5.597)	(10.94)	(15.10)	(18.54)	(21.60)
10	6×6	30.27	45.89	58.59	63.91	69.22
		(30.22)	(45.80)	(58.43)	(63.79)	(69.02)
	7×7	30.27	45.88	58.58	63.91	69.19
		(30.22)	(45.79)	(58.42)	(63.78)	(68.99)
	8×8	30.26	45.87	58.58	63.90	69.18
		(30.21)	(45.78)	(58.42)	(63.77)	(68.99)
1	6×6	48.22	78.47	101.7	106.5	124.8
		(45.39)	(70.67)	(90.27)	(99.49)	(105.9)
	7×7	48.17	78.23	101.4	106.2	124.5
		(45.32)	(70.55)	(90.17)	(99.24)	(105.8)
	8×8	48.09	78.08	101.3	106.1	124.2
		(45.29)	(70.47)	(90.11)	(99.09)	(105.7)

* Type-1 , ** Type-2

表2-3 変位関数の項数による無次元振動数 Ω の収束状況
 【 $a/b=1$, $a/H=100$, $t_1/a=t_2/a=10^{-3}$, $t_c/a=8 \times 10^{-3}$, $E_1/E_2=14.0$,
 $G_{12}/E_2=0.51$, $\nu_{12}=0.3$, $G_x^c/G_{12}=0.058$, $G_x^c/G_y^c=2.20$,
 $\rho_c/\rho_1=0.047$, $\rho_1/\rho_2=1$, $(30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$ 】

$I \times J$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6	Ω_7	Ω_8
(Free plate)								
9 × 9	2.664	3.995	6.887	7.906	8.517	10.97	14.27	16.39
10 × 10	2.664	3.989	6.887	7.904	8.511	10.96	14.21	16.38
11 × 11	2.664	3.989	6.884	7.901	8.501	10.96	14.21	16.36
12 × 12	2.664	3.988	6.884	7.900	8.500	10.95	14.20	16.36
(Simply - supported plate)								
9 × 9	5.595	10.93	15.10	18.54	21.60	28.40	29.80	30.38
10 × 10	5.595	10.93	15.10	18.54	21.60	28.40	29.79	30.38
11 × 11	5.595	10.93	15.10	18.54	21.59	28.38	29.79	30.38
12 × 12	5.594	10.93	15.10	18.53	21.59	28.38	29.79	30.37
(Clamped plate)								
9 × 9	9.237	14.90	21.08	23.15	27.19	33.68	35.87	37.52
10 × 10	9.237	14.89	21.07	23.15	27.16	33.65	35.84	37.62
11 × 11	9.234	14.89	21.06	23.13	27.16	33.64	35.82	37.59
12 × 12	9.234	14.89	21.06	23.13	27.14	33.62	35.81	37.58
(Cantilevered plate)								
9 × 9	1.077	2.574	5.200	6.902	8.785	11.16	14.72	17.71
10 × 10	1.077	2.569	5.198	6.901	8.763	11.14	14.72	17.70
11 × 11	1.076	2.568	5.189	6.898	8.761	11.14	14.70	17.67
12 × 12	1.076	2.567	5.188	6.897	8.754	11.14	14.69	17.67

表2-4 周辺単純支持されたサンドイッチ長方形板の無次元振動数 Ω の比較

【 $a/b=2$, $a/H=40$, $t_1/a=t_2/a=2.5 \times 10^{-3}$, $t_c/a=0.02$, $E_1/E_2=40$,
 $G_{12}/E_2=1$, $G_{31}/G_{12}=1$, $G_{23}=E_2/2(1+\nu_{23})$, $\nu_{12}=0.25$, $\nu_{23}=0.3$,
 $G_x^c/G_{12}=0.023$, $G_x^c/G_y^c=0.49$, $\rho_c/\rho_1=1.47$ 】

	Mode				
	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(1,3)
(30° / -30° / C / 30° / -30°)					
Ibrahim et al. ⁽¹⁾	8.612	14.70	19.92	24.18	36.49
Type-1 ^a	8.612	14.70	19.92	24.18	36.49
Type-1 ^b	8.612	14.70	19.92	24.18	36.49
Type-2	8.605	14.68	19.88	24.15	36.44
(90° / 0° / C / 0° / 90°)					
Ibrahim et al. ⁽¹⁾	11.19	13.99	31.21	32.42	52.27
Type-1 ^a	11.19	13.99	31.21	32.42	52.27
Type-1 ^b	11.19	13.99	31.21	32.42	52.27
Type-2	11.17	13.98	31.10	32.31	52.15
(0° / 90° / C / 90° / 0°)					
Ibrahim et al. ⁽¹⁾	10.26	13.80	28.18	29.76	47.12
Type-1 ^a	10.26	13.79	28.18	29.76	47.12
Type-1 ^b	10.26	13.79	28.18	29.76	47.12
Type-2	10.26	13.78	28.16	29.75	47.09

^a Fourier series solution , ^b Power series solution

表2-5 周辺固定されたサンドイッチ長方形板の無次元振動数 Ω の比較

【 $a/b=1.5$, $a/H=41.9$, $t_1/a=t_2/a=8.3 \times 10^{-4}$, $t_c/a=0.022$,
 $E_1/E_2=12.0$, $G_{12}/E_2=0.52$, $\nu_{12}=0.327$, $G_x^c/G_{12}=0.023$,
 $G_x^c/G_y^c=1.66$, $\rho_c/\rho_1=0.018$, $\rho_1/\rho_2=1$, (30° / C / 30°) 】

Source	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
Present	25.34	41.20	50.94	58.24	71.32
Kanematsu et al. ⁽⁴⁾	25.13	41.22	51.06	58.74	72.39

関数のいずれを使用しても、文献(1)の結果とよく一致している。一方、Type-2による結果は、表面材の面外せん断変形を考慮しているため、文献(1)による結果よりも最大で0.35%程度[(90°/0°/C/0°/90°), (1,2)モード]低い値を示す。

表2-5にアングルプライ積層表面材をもつ周辺固定されたサンドイッチ長方形板の無次元振動数 Ω の比較を示す。Kanematsuら⁽⁴⁾は変位関数に三角関数を用いたリッツ法により近似解を求めているが、両者の相対差は最大で1.5%程度(五次モード)であり、全体的によく一致している。

以上の結果から、本解析値は十分な精度と妥当性を有すると考えられる。

2.3.2 変位場の検討

一般に、FRPは面外せん断弾性係数が小さいため薄板でも面外せん断変形が無視できない場合がある。とくに、板が厚くなると積層表面材の面外せん断変形の影響が大きくなると考えられる。そこで、ここでは積層表面材の面外せん断変形を無視した変位場Type-1と面外せん断変形を考慮した変位場Type-2による固有振動数の比較を行い、積層表面材の面外せん断変形が固有振動数に及ぼす影響を調べ、両変位場の適用範囲について検討する。

図2-3に周辺単純支持されたサンドイッチ正方形板について、Type-1とType-2による一～三次の無次元振動数の比較を示す。ここでは、Type-1とType-2による無次元振動数の比をとり、Type-1による無次元振動数を1.0として表す。G/E材ラミナ材料定数は $E_1 = 153\text{GPa}$ 、 $G_{12}/E_2 = 0.6$ とし、式(2.71)の関係式を使用している。したがって、 E_1/E_2 が大きくなることは、表面材の面外せん断剛性 G_{31} および G_{23} が小さくなることに対応する。

モード次数が増すほど、曲率の大きい振動モードとなるため、表面材における面外せん断変形の影響が大きくなり、Type-1とType-2による振動数の差異は増加する。また、 $a/H = 10$ 以上では両変位場による振動数の差異は最大で0.5%程度(三次、 $E_1/E_2 = 30$)であり、あまり大きな差異は見られないが、 $a/H = 10$ 以下では表面材の面外せん断変形の影響が現れ、両者の差異は顕著になる。とくに、 $a/H = 1$ の場合、最大で20%程度(三次、

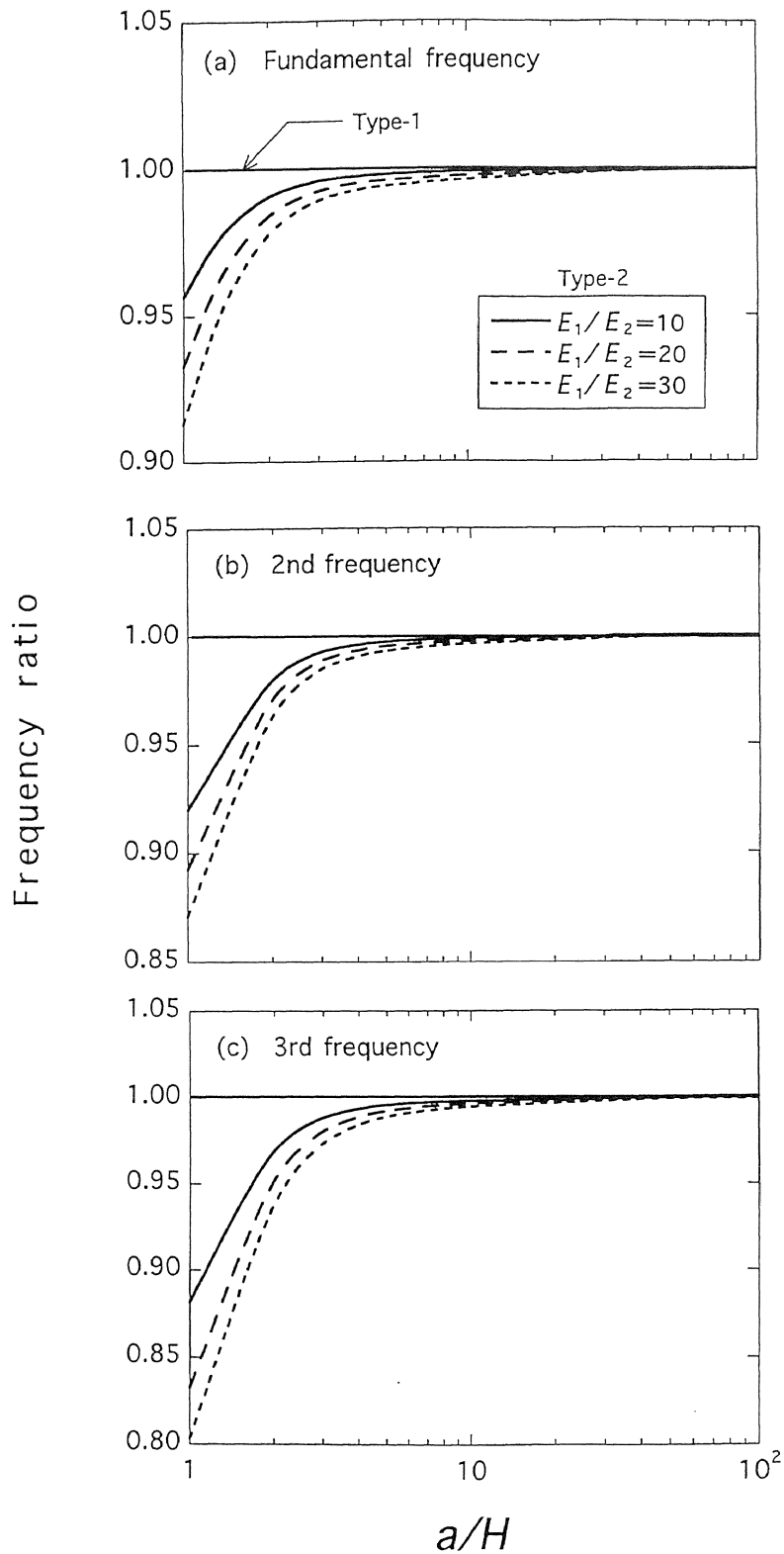


図2-3 Type-1 および Type-2 による無次元振動数 Ω の比較
 【 $a/b=1$, $t_1/a=t_2/a=H/10a$, $t_c/a=4H/5a$, $E_1/E_2=14.0$, $G_{12}/E_2=0.51$,
 $G_{31}/G_{12}=1$, $G_{23}=E_2/2(1+\nu_{23})$, $\nu_{12}=0.3$, $\nu_{23}=0.3$, $G_x^c/G_{12}=0.058$,
 $G_x^c/G_y^c=2.20$, $\rho_c/\rho_1=0.047$, $\rho_1/\rho_2=1$, $(30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$ 】

$E_1/E_2=30$)の差異を示す。したがって、 $a/H=10$ 以上では、変位場 Type-1の適用が十分可能であるといえるが、 $a/H=10$ 以下の厚い板を扱う場合、変位場 Type-2の適用が妥当であると考えられる。

2.3.3 固有振動数と振動モード

つぎに、境界条件、積層表面材のラミナの繊維角度、心材の厚さが固有振動数と振動モードに及ぼす影響を調べ、一般的な積層板の固有振動数と振動モードとの比較から複合材サンドイッチ長方形板の動特性を考察する。さらに、ホログラフィー干渉法による実験結果との比較を行い、本解析法の有用性と妥当性を検討する。

図2-4および図2-5に周辺自由サンドイッチ正方形板について、繊維角度 θ による無次元振動数 Ω およびそれに対応する振動モードの変化を示す。モード次数の異なる振動数曲線が接近する箇所が幾つかみられるが、このような振動数曲線の方向転換はヴィーリングと呼ばれ、ヴィーリングが生じるとその前後で振動モードの入れ替わりが生じる。例えば、 Ω_1 と Ω_2 は $\theta=0^\circ \sim 15^\circ$ の間でヴィーリングが起きているが、この前後で明らかに振動モードの入れ替わりが起きている。その他にも、 $\theta=0^\circ \sim 15^\circ$ の間で Ω_5 が Ω_7 に、 Ω_6 が Ω_5 に、 Ω_7 が Ω_6 に、それぞれ入れ替わる。また、 $\theta=15^\circ \sim 30^\circ$ の間で Ω_3 、 Ω_4 および Ω_5 の間でヴィーリングが起きているが、これにより、 Ω_3 と Ω_5 の振動モードが入れ替っている。

図2-6および図2-7に周辺単純支持されたサンドイッチ正方形板について、繊維角度 θ による無次元振動数 Ω の変化およびそれに対応する振動モードを示す。 $\theta=15^\circ \sim 30^\circ$ の間で Ω_3 と Ω_4 が、 $\theta=30^\circ \sim 45^\circ$ の間で Ω_6 と Ω_7 の振動モードに入れ替わりが生じている。

図2-8および図2-9に周辺固定されたサンドイッチ正方形板について、繊維角度 θ による無次元振動数 Ω の変化およびそれに対応する振動モードを示す。振動数曲線の傾向は、周辺単純支持と同様であるが、振動モードの順序をみると、 $\theta=0^\circ$ の場合、五次と六次が、 $\theta=30^\circ$ の場合、七次と八次がそれぞれ周辺単純支持と比較して振動モードの順序が異なる。これは、明らかに境界条件の違いに起因すると思われる。また、 $\theta=15^\circ \sim 30^\circ$ の間で Ω_3 と Ω_4 が、 $\theta=30^\circ \sim 45^\circ$ の間で Ω_6 が Ω_7 に、 Ω_7 が Ω_8 に、 Ω_8 が Ω_6

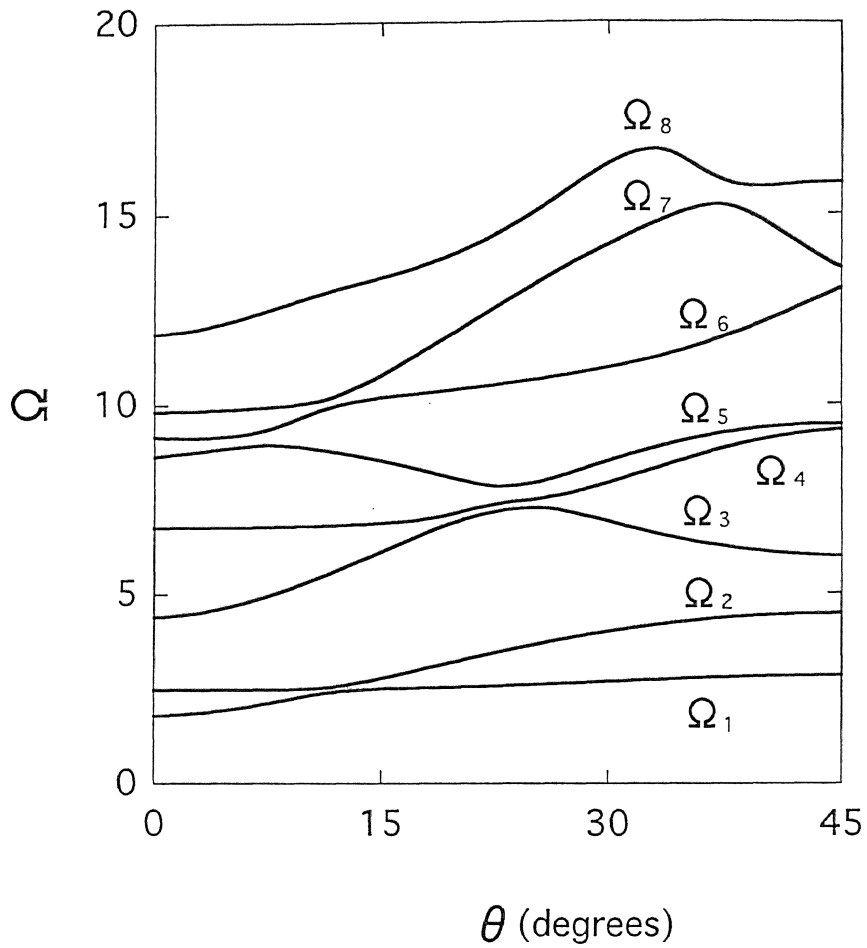


図2-4 繊維角度 θ による無次元振動数 Ω の変化 (周辺自由板)
 【 $a/b=1, a/H=100, t_1/a=t_2/a=10^{-3}, t_c/a=8 \times 10^{-3}, E_1/E_2=14.0,$
 $G_{12}/E_2=0.51, \nu_{12}=0.3, G_x^c/G_{12}=0.058, G_x^c/G_y^c=2.20,$
 $\rho_c/\rho_1=0.047, \rho_1/\rho_2=1, (\theta / -\theta / C / -\theta / \theta)]$ 】

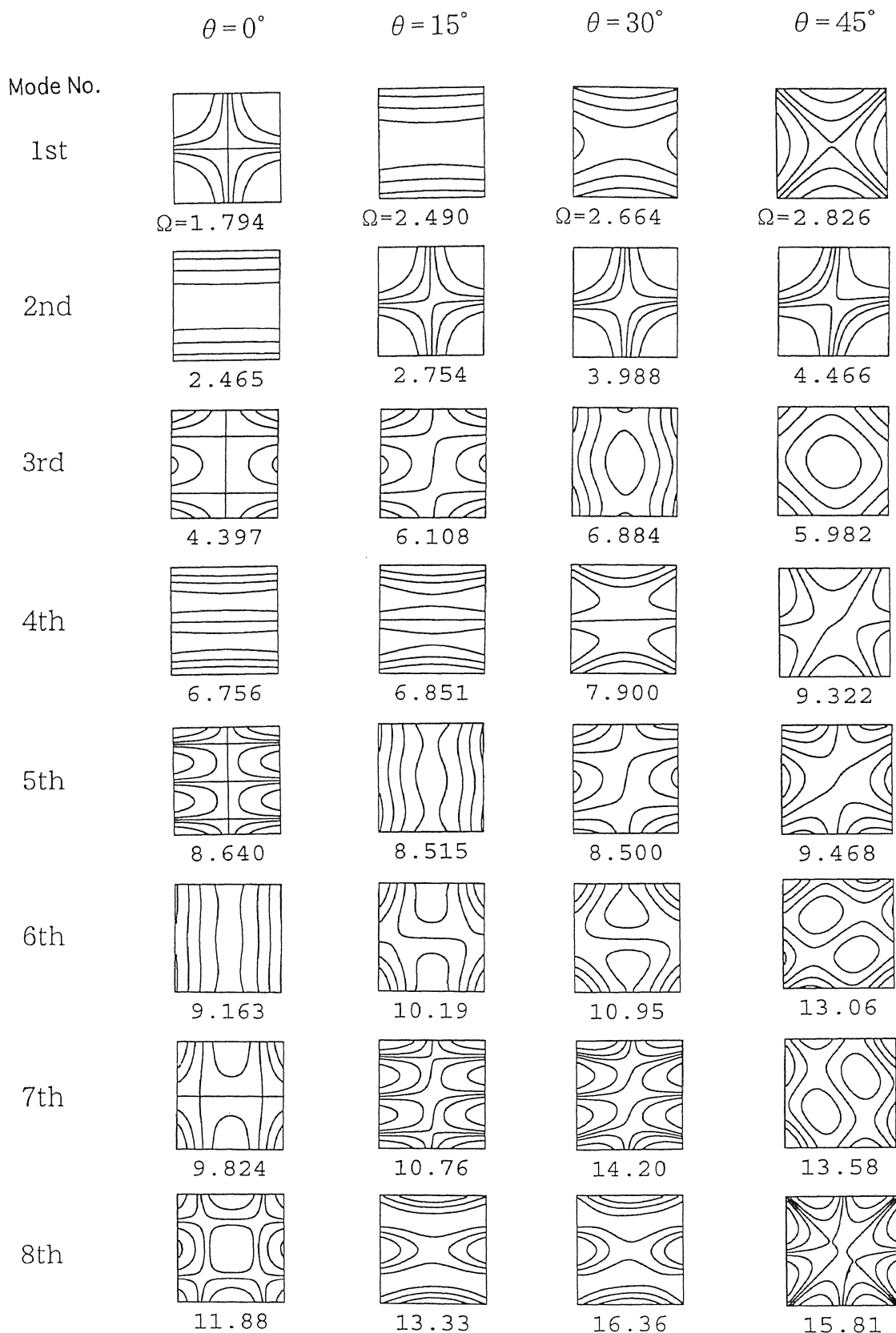


図2-5 繊維角度 θ による振動モードの変化 (周辺自由板)
【 $a/b=1$, $a/H=100$, $t_1/a=t_2/a=10^{-3}$, $t_c/a=8 \times 10^{-3}$, $E_1/E_2=14.0$,
 $G_{12}/E_2=0.51$, $\nu_{12}=0.3$, $G_x^c/G_{12}=0.058$, $G_x^c/G_y^c=2.20$,
 $\rho_c/\rho_1=0.047$, $\rho_1/\rho_2=1$, ($\theta/-\theta/C/-\theta/\theta$) 】

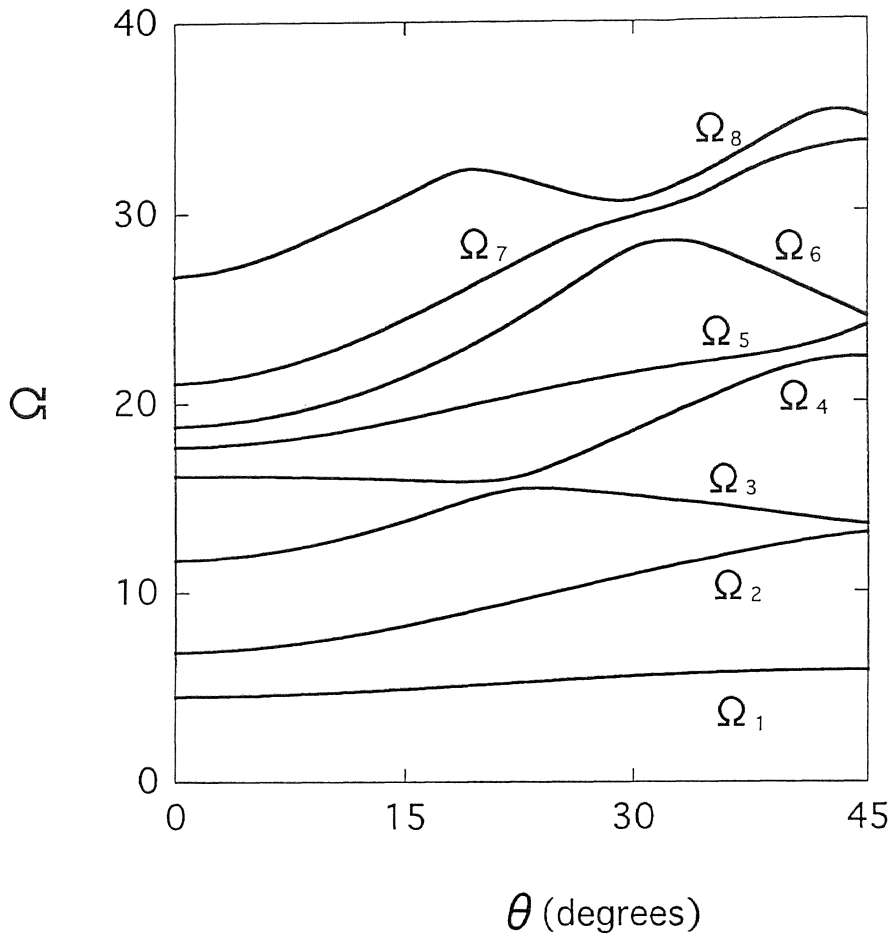


図2-6 繊維角度 θ による無次元振動数 Ω の変化 (周辺単純支持板)
 【 $a/b=1$, $a/H=100$, $t_1/a=t_2/a=10^{-3}$, $t_c/a=8 \times 10^{-3}$, $E_1/E_2=14.0$,
 $G_{12}/E_2=0.51$, $\nu_{12}=0.3$, $G_x^c/G_{12}=0.058$, $G_x^c/G_y^c=2.20$,
 $\rho_c/\rho_1=0.047$, $\rho_1/\rho_2=1$, ($\theta / -\theta / C / -\theta / \theta$) 】

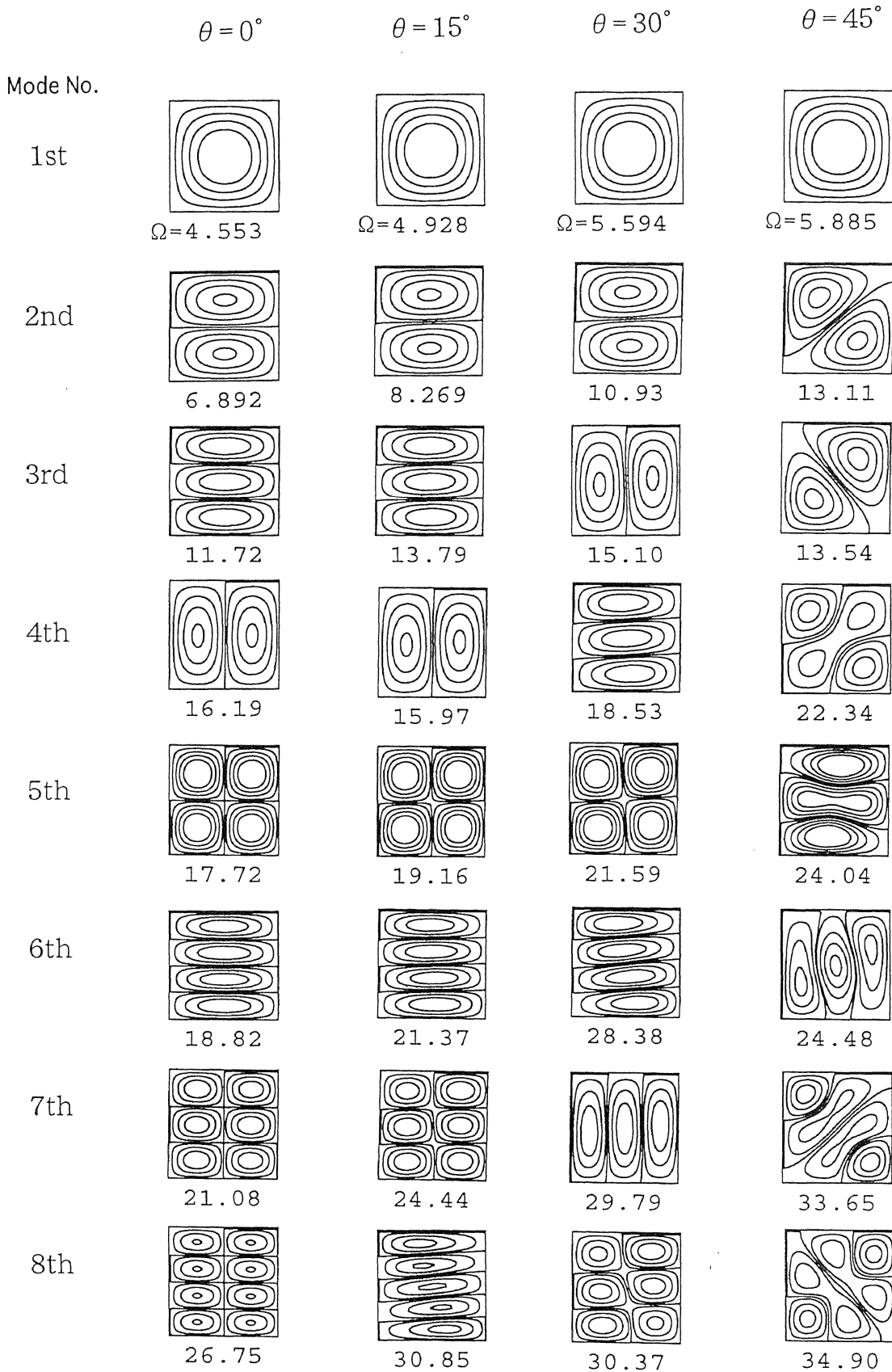


図2-7 繊維角度 θ による振動モードの変化 (周辺単純支持板)
 【 $a/b=1$, $a/H=100$, $t_1/a=t_2/a=10^{-3}$, $t_c/a=8 \times 10^{-3}$, $E_1/E_2=14.0$,
 $G_{12}/E_2=0.51$, $\nu_{12}=0.3$, $G_x^c/G_{12}=0.058$, $G_x^c/G_y^c=2.20$,
 $\rho_c/\rho_1=0.047$, $\rho_1/\rho_2=1$, ($\theta / -\theta / C / -\theta / \theta$) 】

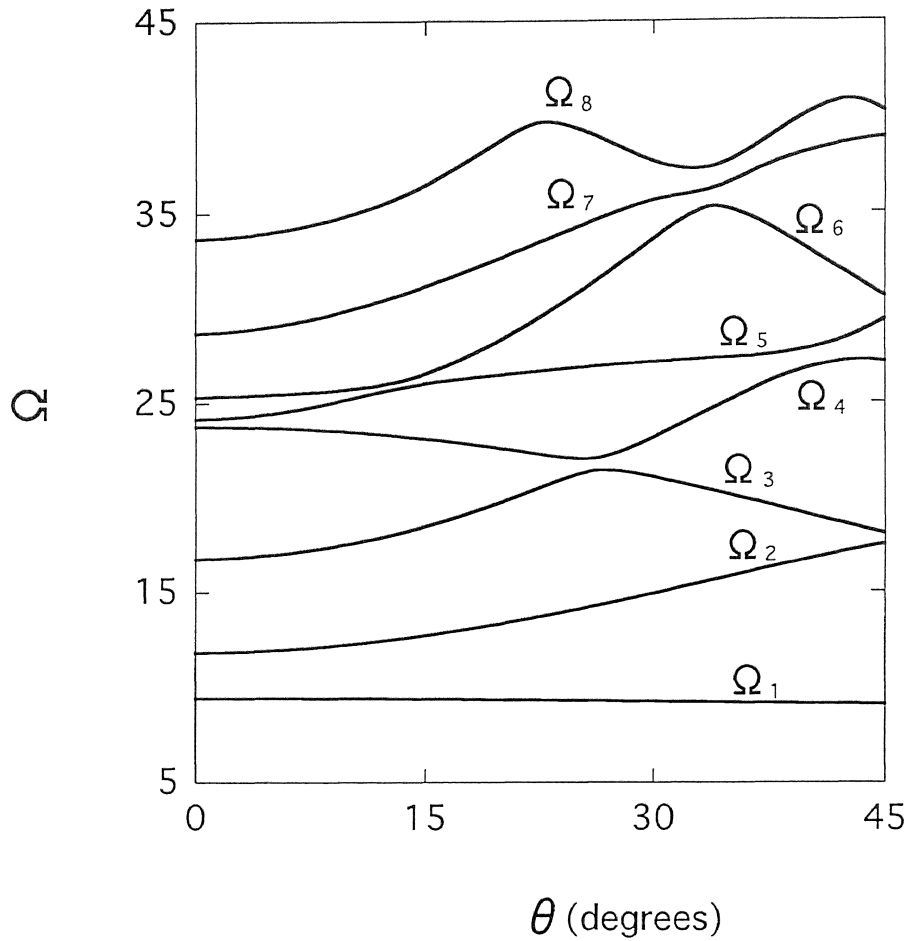


図2-8 繊維角度 θ による無次元振動数 Ω の変化 (周辺固定板)
 【 $a/b=1$, $a/H=100$, $t_1/a=t_2/a=10^{-3}$, $t_c/a=8 \times 10^{-3}$, $E_1/E_2=14.0$,
 $G_{12}/E_2=0.51$, $\nu_{12}=0.3$, $G_x^c/G_{12}=0.058$, $G_x^c/G_y^c=2.20$,
 $\rho_c/\rho_1=0.047$, $\rho_1/\rho_2=1$, ($\theta / -\theta / C / -\theta / \theta$) 】

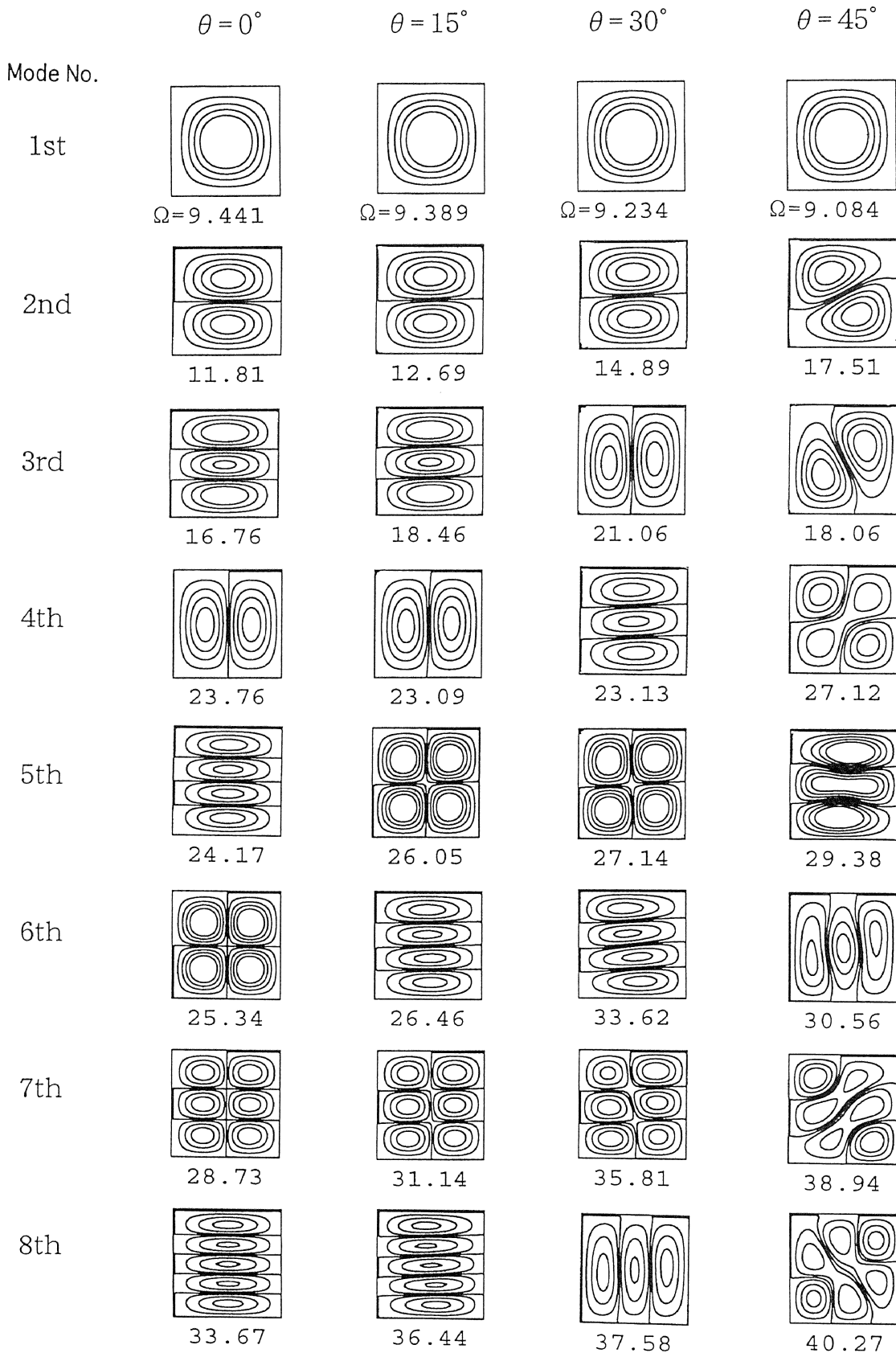


図2-9 繊維角度 θ による振動モードの変化 (周辺固定板)
 【 $a/b=1$, $a/H=100$, $t_1/a=t_2/a=10^{-3}$, $t_c/a=8 \times 10^{-3}$, $E_1/E_2=14.0$,
 $G_{12}/E_2=0.51$, $\nu_{12}=0.3$, $G_x^c/G_{12}=0.058$, $G_x^c/G_y^c=2.20$,
 $\rho_c/\rho_1=0.047$, $\rho_1/\rho_2=1$, ($\theta / -\theta / C / -\theta / \theta$) 】

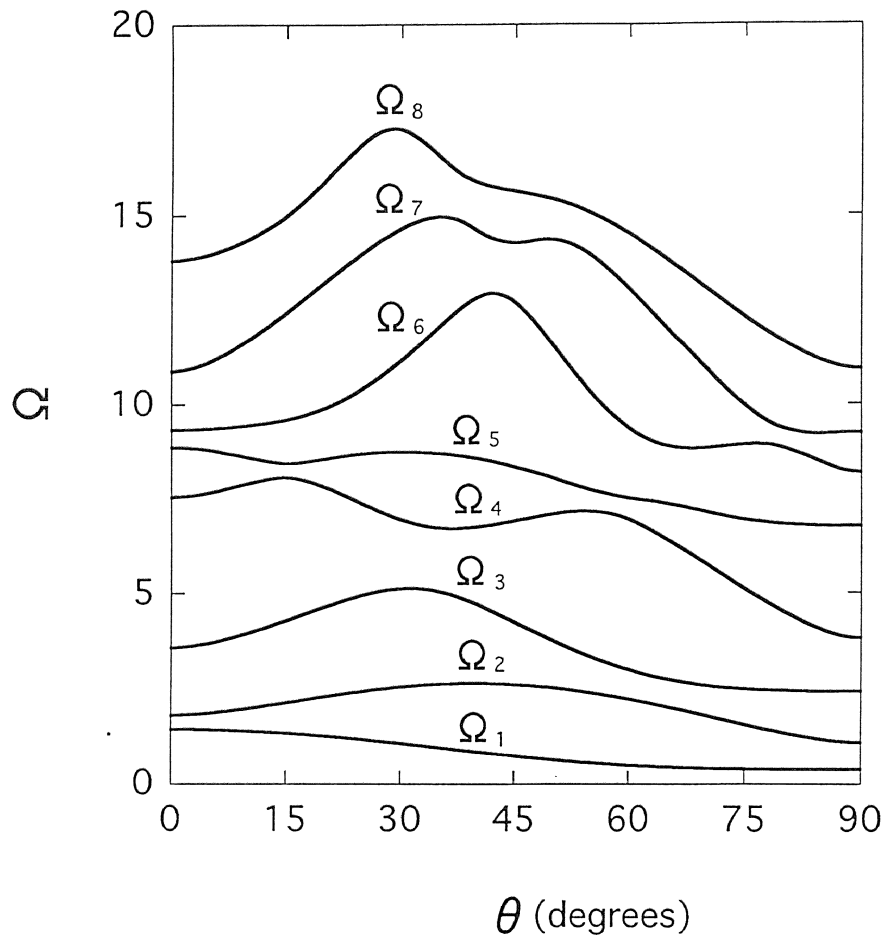


図2-10 繊維角度 θ による無次元振動数 Ω の変化 (片持ち板)
 【 $a/b=1$, $a/H=100$, $t_1/a=t_2/a=10^{-3}$, $t_c/a=8 \times 10^{-3}$, $E_1/E_2=14.0$,
 $G_{12}/E_2=0.51$, $\nu_{12}=0.3$, $G_x^c/G_{12}=0.058$, $G_x^c/G_y^c=2.20$,
 $\rho_c/\rho_1=0.047$, $\rho_1/\rho_2=1$, ($\theta / -\theta / C / -\theta / \theta$) 】

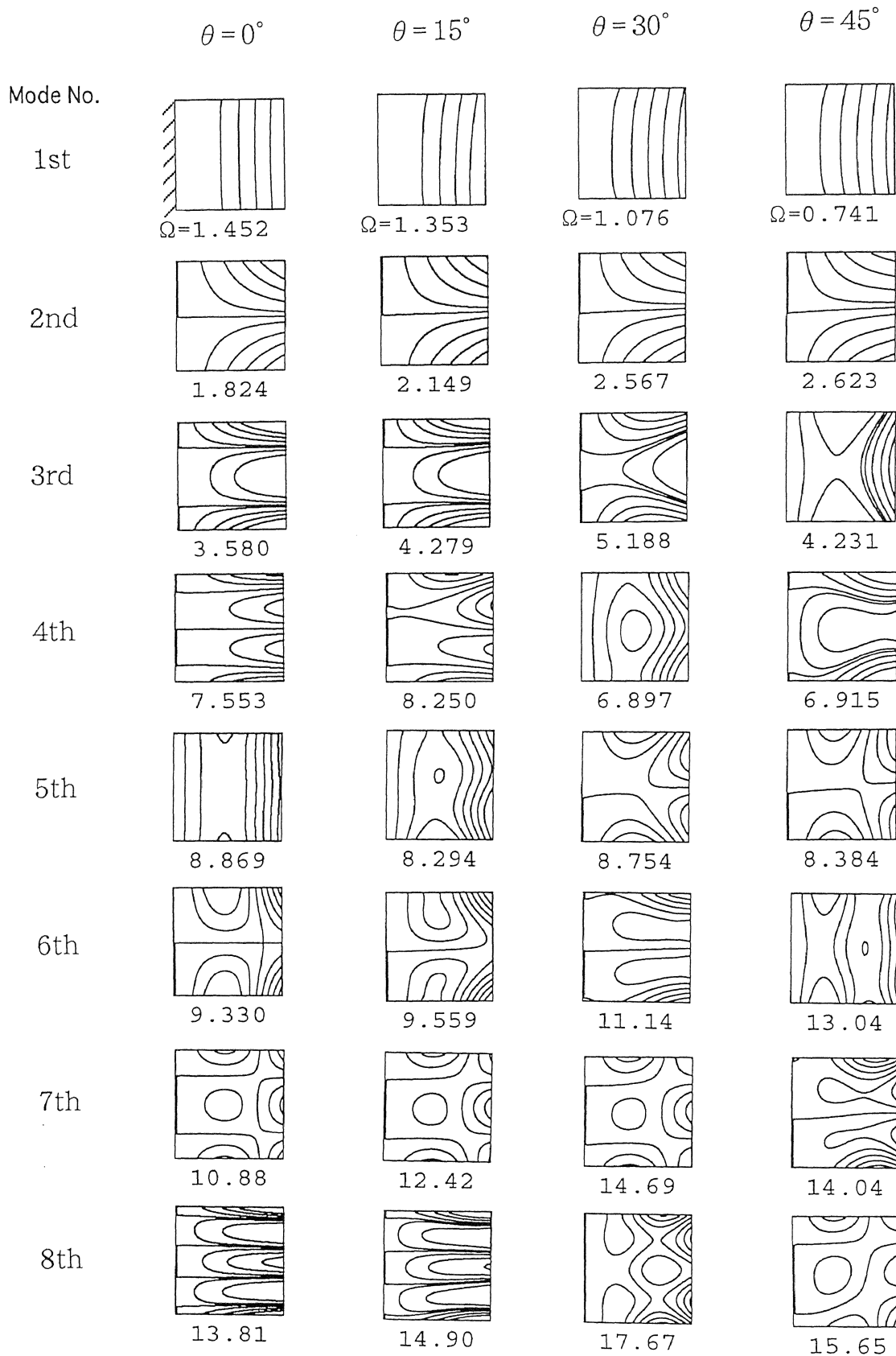


図2-11 繊維角度 θ による振動モードの変化 (片持ち板, その1)
 【 $a/b=1, a/H=100, t_1/a=t_2/a=10^{-3}, t_c/a=8 \times 10^{-3}, E_1/E_2=14.0,$
 $G_{12}/E_2=0.51, \nu_{12}=0.3, G_x^c/G_{12}=0.058, G_x^c/G_y^c=2.20,$
 $\rho_c/\rho_1=0.047, \rho_1/\rho_2=1, (\theta / -\theta / C / -\theta / \theta)]$

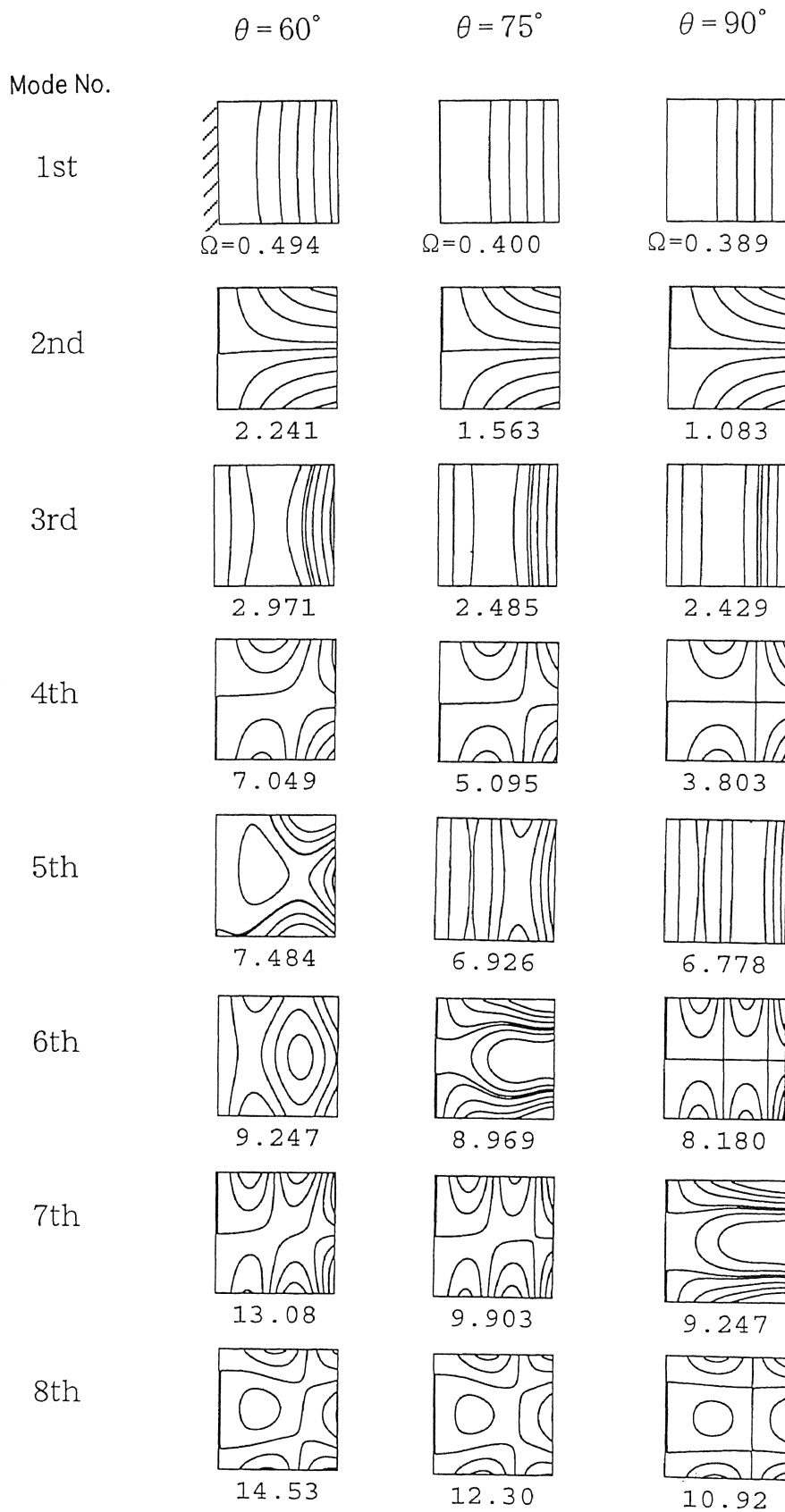


図2-11 繊維角度 θ による振動モードの変化 (片持ち板, その2)
 【 $a/b=1, a/H=100, t_1/a=t_2/a=10^{-3}, t_c/a=8 \times 10^{-3}, E_1/E_2=14.0,$
 $G_{12}/E_2=0.51, \nu_{12}=0.3, G_x^c/G_{12}=0.058, G_x^c/G_y^c=2.20,$
 $\rho_c/\rho_1=0.047, \rho_1/\rho_2=1, (\theta/-\theta/C/-\theta/\theta)$ 】

にそれぞれ入れ替わっている。

図2-10および図2-11に片持ちサンドイッチ正方形板について、繊維角度 θ による無次元振動数 Ω の変化およびそれに対応する振動モードを示す。 $\theta=15^\circ\sim 30^\circ$ の間で Ω_4 と Ω_5 が入れ替わり、 $\theta=30^\circ\sim 45^\circ$ の間で Ω_6 が Ω_7 に、 Ω_7 が Ω_8 に、 Ω_8 が Ω_6 にそれぞれ入れ替わる。また、 $\theta=45^\circ\sim 60^\circ$ の間で再度 Ω_4 と Ω_5 が入れ替わり、 $\theta=75^\circ\sim 90^\circ$ の間で Ω_6 と Ω_7 が入れ替わっている。

図2-12に心材厚さによる一～五次の無次元振動数 Ω の変化を示す。ここでは、積層形態を $(30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$ とし、周辺自由(図2-12(a))、周辺単純支持(図2-12(b))、周辺固定(図2-12(c))および片持ち(図2-12(d))のサンドイッチ正方形板について調べる。

いずれの境界条件に関しても、心材と板全体の厚さ比 t_c/H が0.8付近で各振動数が最大となることがわかる。 $t_c/H=0.8$ 付近までは心材が厚くなるにつれて表面材が薄くなるので、板全体として質量が小さくなり、いずれのモード次数においても振動数が増加する。しかし、 $t_c/H=0.8$ 以上になると、板全体の曲げ剛性の低下により振動数は減少する。また、低次よりも高次の振動数が t_c/H に対する変化割合が大きく、心材厚さの影響を受けやすいことがわかる。

図2-13にサンドイッチ正方形板と積層正方形板の無次元振動数 Ω の比較を示す。サンドイッチ板の積層形態は $(\theta/-\theta/C/-\theta/\theta)$ とし、積層板の積層形態は $(\theta/-\theta/-\theta/\theta)$ とした。また、境界条件は周辺自由、周辺単純支持および周辺固定の3通りとした。

いずれのモード次数においても積層板よりもサンドイッチ板の方が質量効果により振動数が高い。境界条件別にみると、周辺自由の場合、サンドイッチ板および積層板ともに一次と二次の振動数においてヴィーリングする箇所があるが、これはサンドイッチ板の方が小さい繊維角度で起きており、積層板よりも繊維角度の変化に対する変化割合がわずかに大きい。したがって、サンドイッチ板の方が繊維角度による影響を受け易いといえる。

図2-14にサンドイッチ正方形板と積層正方形板の振動モードの比較を示す。ここでは、サンドイッチ板の積層形態は $(30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$ とし、積層板の積層形態は $(30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ)$ とした。また、積層板

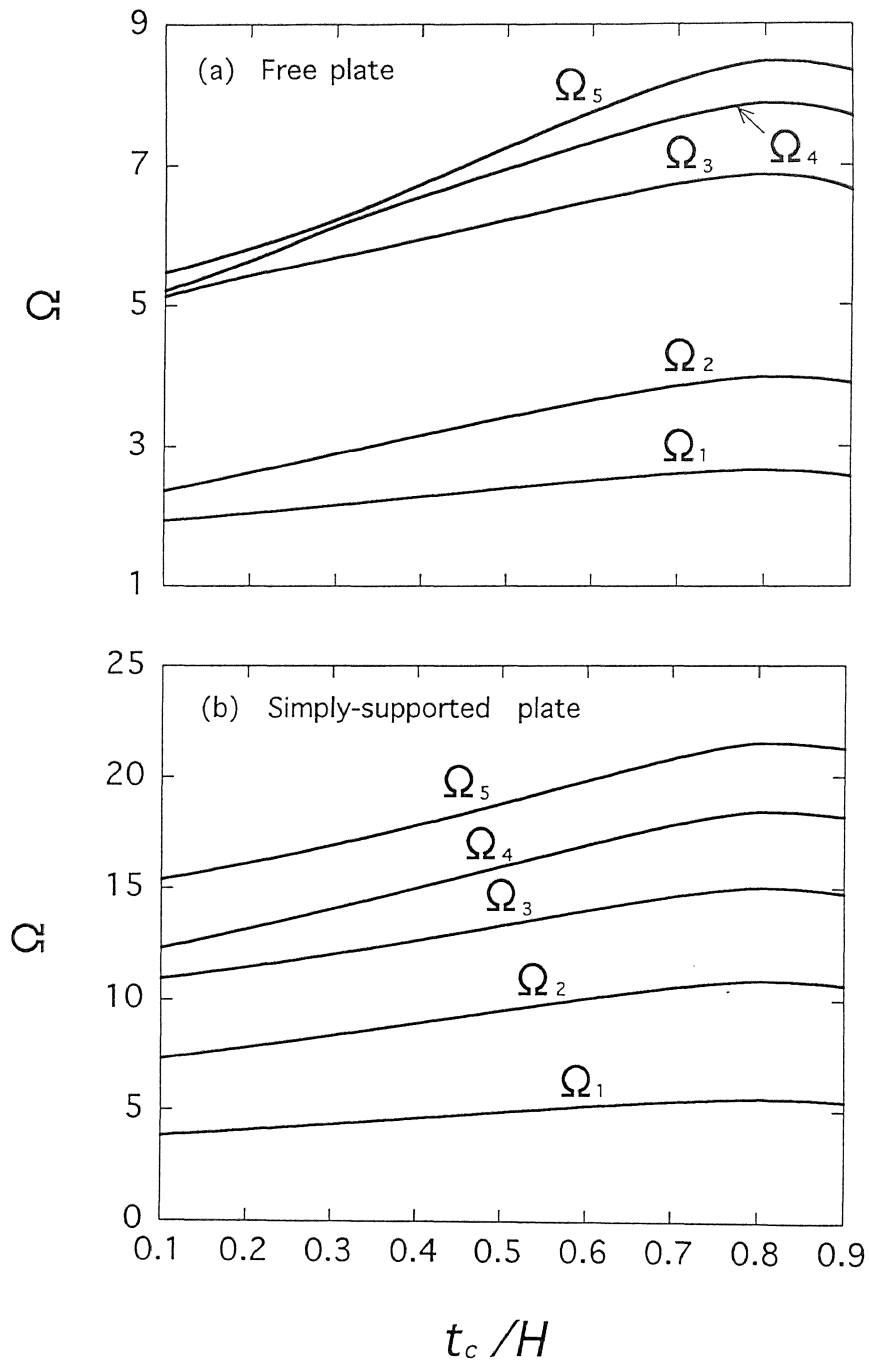


図2-12 心材の厚さによる無次元振動数 Ω の変化 (その1)
 【 $a/b=1, a/H=100, E_1/E_2=14.0, G_{12}/E_2=0.51, \nu_{12}=0.3,$
 $G_x^c/G_{12}=0.058, G_x^c/G_y^c=2.20, \rho_c/\rho_1=0.047, \rho_1/\rho_2=1,$
 ($30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ$) 】

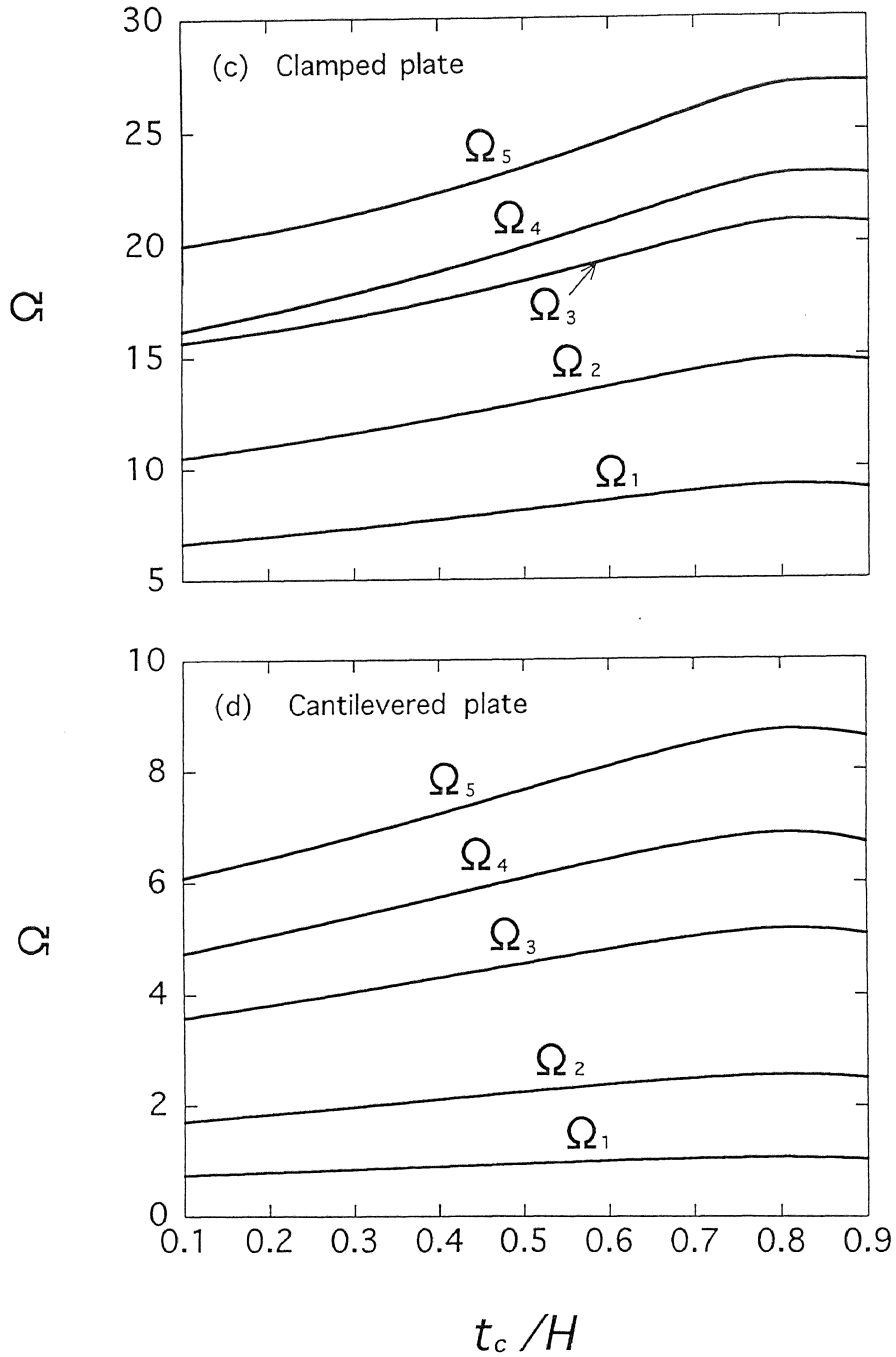


図2-12 心材の厚さによる無次元振動数 Ω の変化(その2)
 【 $a/b=1, a/H=100, E_1/E_2=14.0, G_{12}/E_2=0.51, \nu_{12}=0.3,$
 $G_x^c/G_{12}^c=0.058, G_x^c/G_y^c=2.20, \rho_c/\rho_1=0.047, \rho_1/\rho_2=1,$
 $(30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$ 】

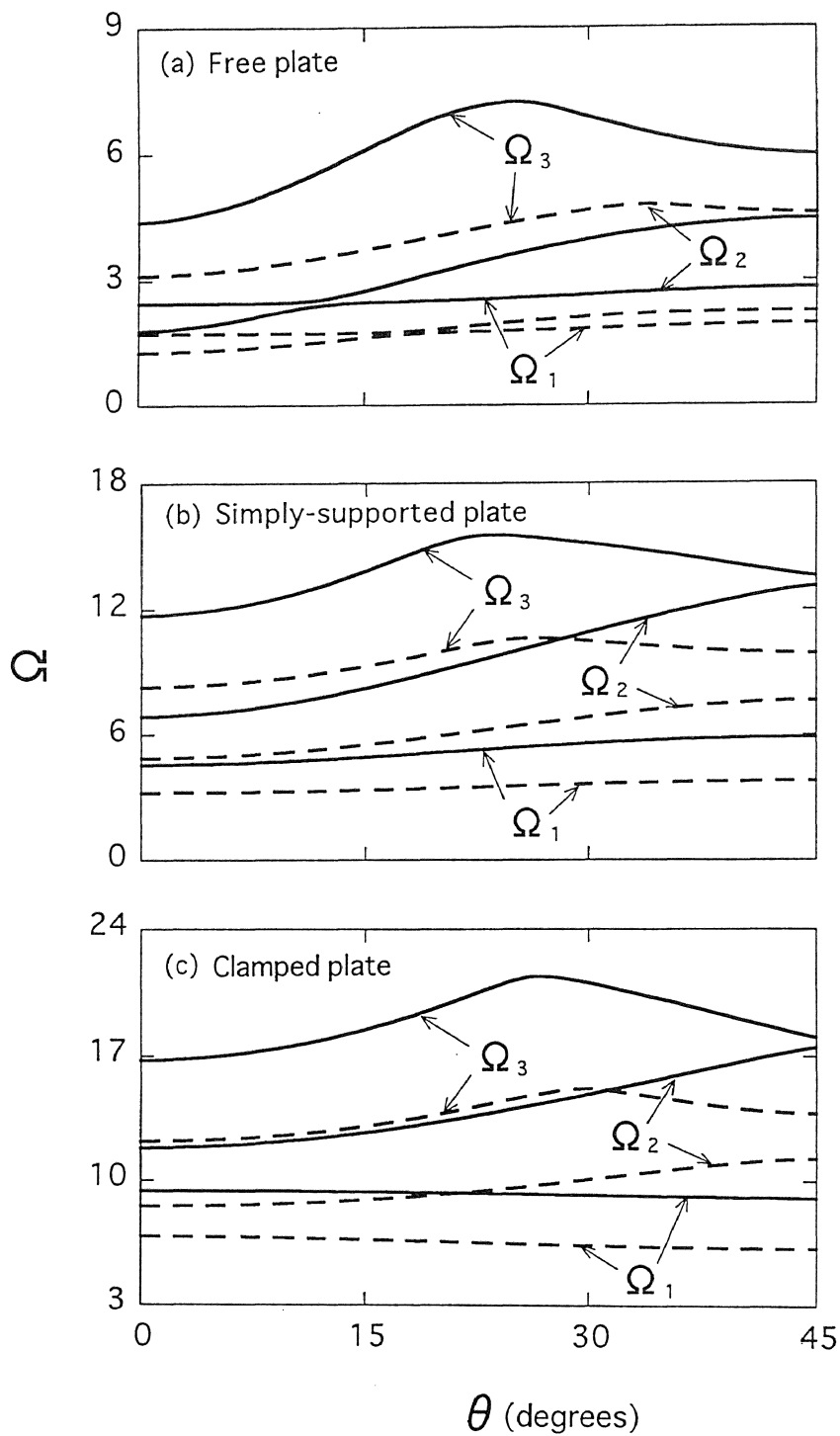


図2-13 サンドイッチ正方形板と積層正方形板の無次元振動数 Ω の比較

【 $a/b=1$, $a/H=100$, $t_1/a=t_2/a=10^{-3}$, $t_c/a=8 \times 10^{-3}$, $E_1/E_2=14.0$,
 $G_{12}/E_2=0.51$, $\nu_{12}=0.3$, $G_x^c/G_{12}=0.058$, $G_x^c/G_y^c=2.20$,
 $\rho_c/\rho_1=0.047$, $\rho_1/\rho_2=1$,

———— Sandwich plate ($\theta / -\theta / C / -\theta / \theta$),
 - - - - - Laminated plate ($\theta / -\theta / -\theta / \theta$)]

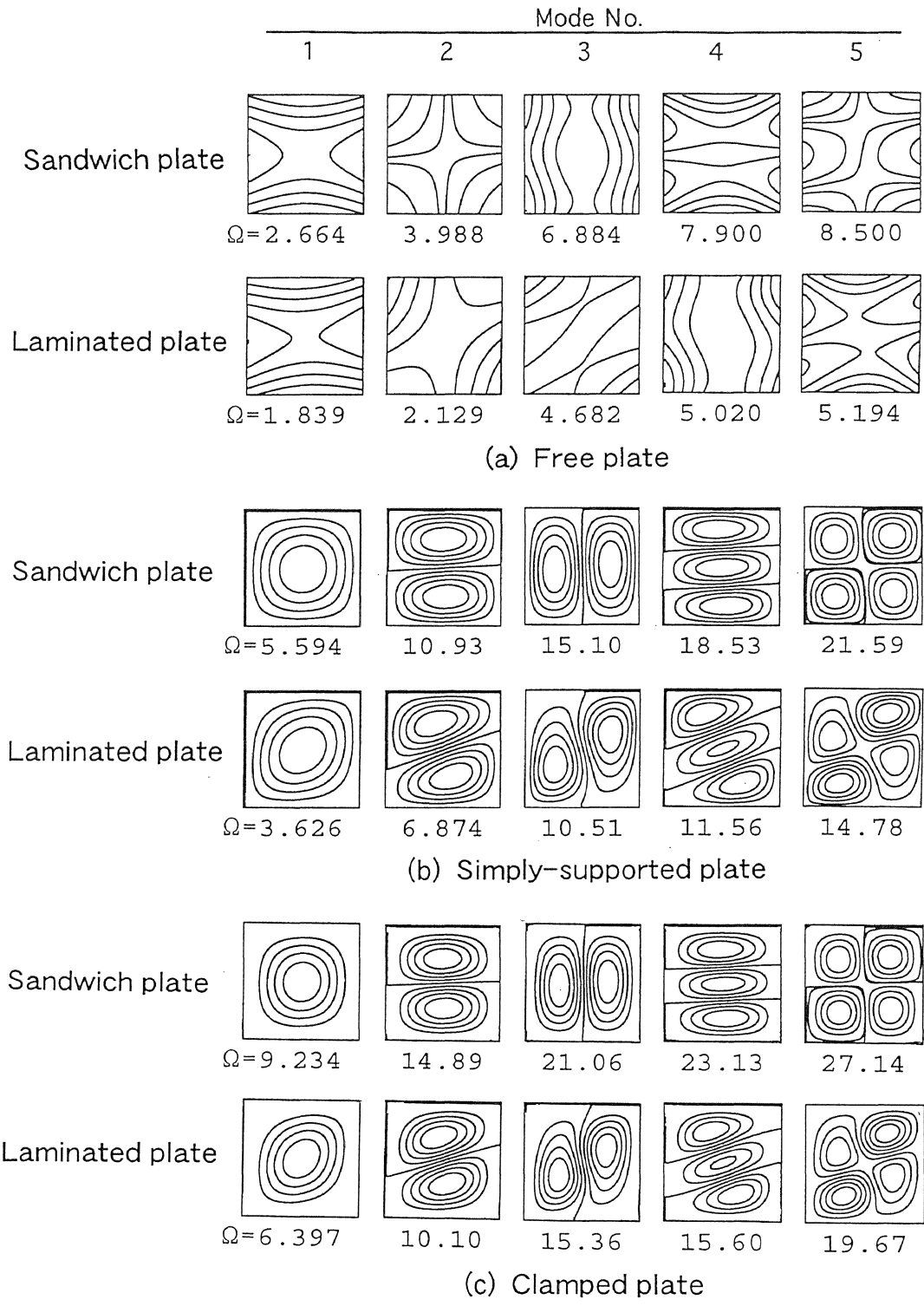


図2-14 サンドイッチ正方形板と積層正方形板の振動モードの比較

$[a/b=1, a/H=100, t_1/a=t_2/a=10^{-3}, t_c/a=8 \times 10^{-3},$
 $E_1/E_2=14.0, G_{12}/E_2=0.51, \nu_{12}=0.3, G_x^c/G_{12}=0.058,$
 $G_y^c/G_y^c=2.20, \rho_c/\rho_1=0.047, \rho_1/\rho_2=1,$
 Sandwich plate ($30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ$),
 Laminated plate ($30^\circ/-30^\circ/-30^\circ/30^\circ$)]

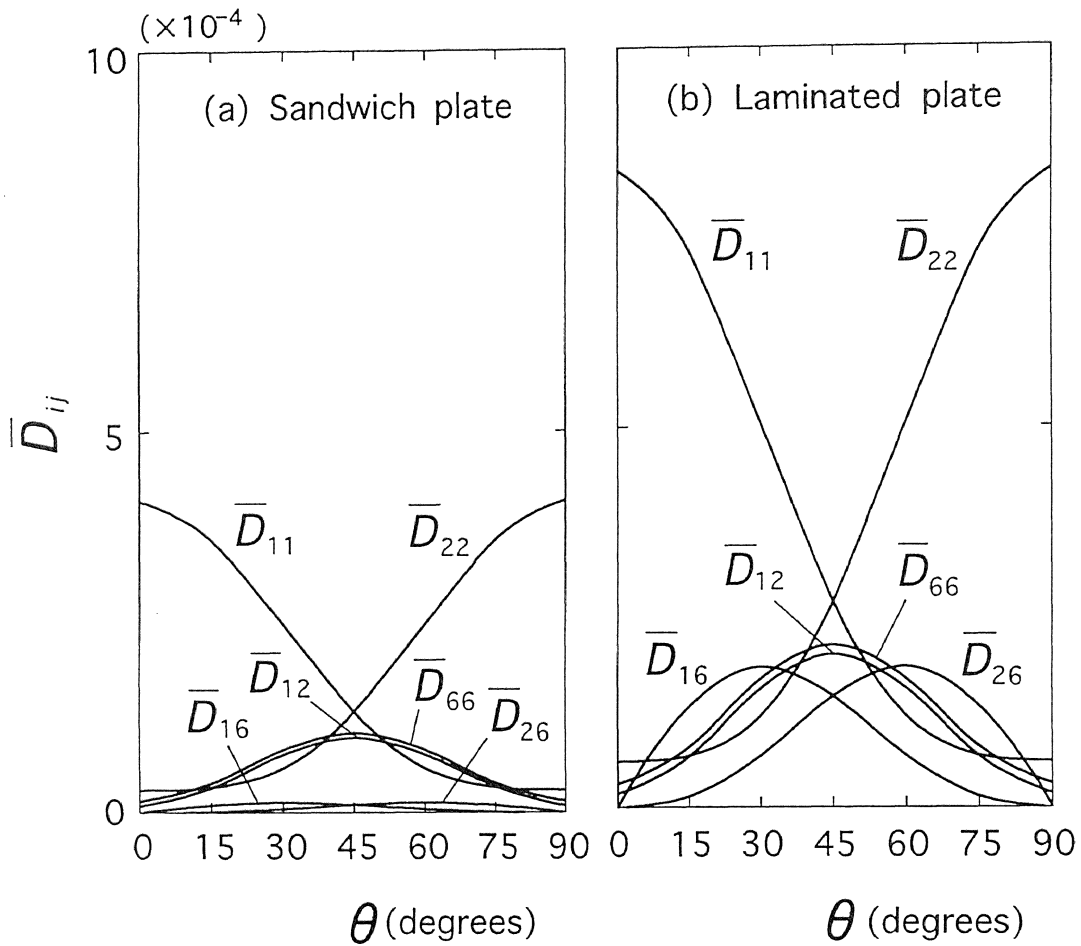


図2-15 サンドイッチ正方形板と積層正方形板の剛性 \bar{D}_{ij} の比較
 【 $a/b=1$, $a/H=100$, $t_1/a=t_2/a=10^{-3}$, $t_c/a=8 \times 10^{-3}$,
 $E_1/E_2=14.0$, $G_{12}/E_2=0.51$, $\nu_{12}=0.3$, $G_x^c/G_{12}=0.058$,
 $G_x^c/G_y^c=2.20$, $\rho_c/\rho_1=0.047$, $\rho_1/\rho_2=1$,
 Sandwich plate ($\theta / -\theta / C / -\theta / \theta$),
 Laminated plate ($\theta / -\theta / -\theta / \theta$) 】

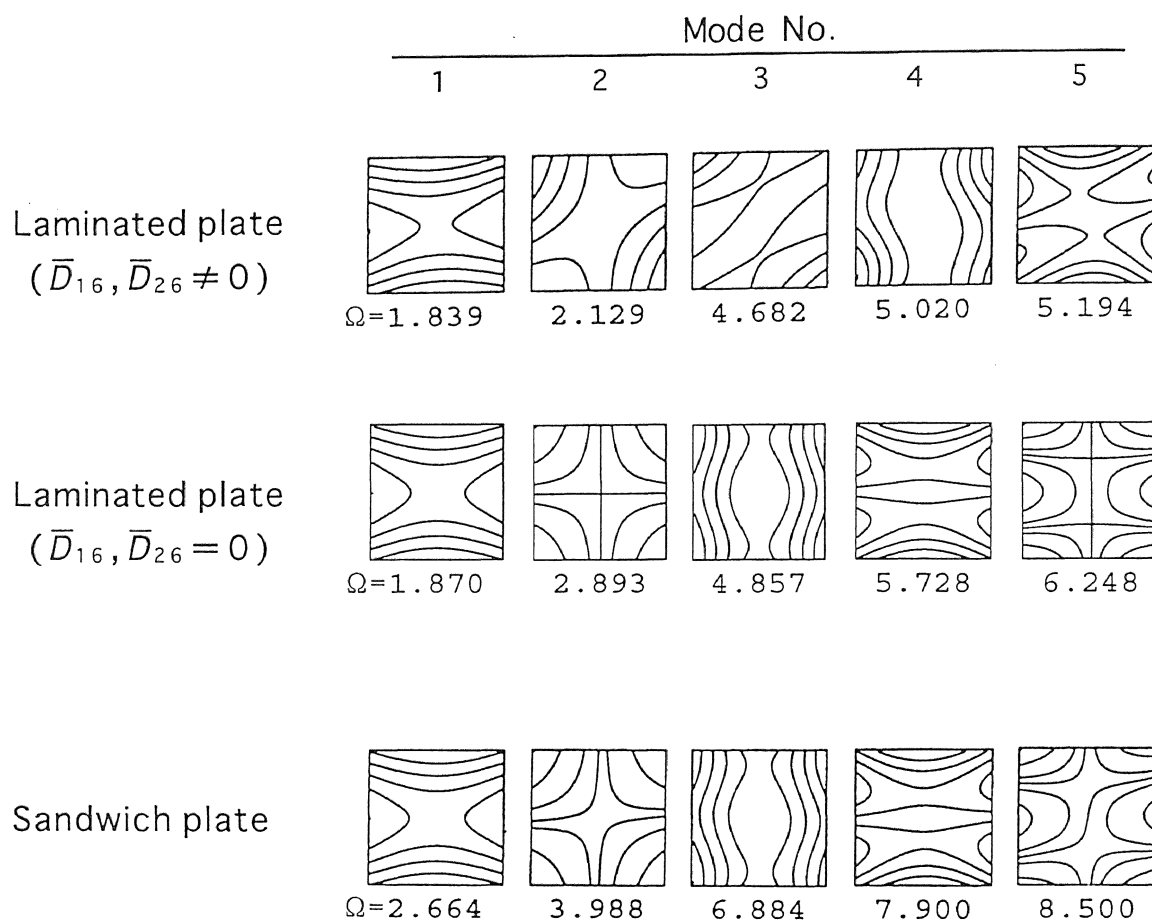


図2-16 振動モードにおける剛性 \bar{D}_{16} および \bar{D}_{26} の影響(周辺自由板)
 【 $a/b=1, a/H=100, t_1/a=t_2/a=10^{-3}, t_c/a=8 \times 10^{-3},$
 $E_1/E_2=14.0, G_{12}/E_2=0.51, \nu_{12}=0.3, G_x^c/G_{12}=0.058,$
 $G_x^c/G_y^c=2.20, \rho_c/\rho_1=0.047, \rho_1/\rho_2=1,$
 Sandwich plate ($30^\circ / -30^\circ / C / -30^\circ / 30^\circ$),
 Laminated plate ($30^\circ / -30^\circ / -30^\circ / 30^\circ$) 】

の無次元振動数を計算する際、 $G_x^c / G_{12} = \rho_c / \rho_1 = t_c / t_1 = 10^{-3}$ として心材の存在を無視できるようにした。この図から、いずれの境界条件についても、明らかに積層板の方が節線のゆがみが大きいことがわかる。また、周辺自由正方形板に関しては、三～五次の振動モードの出現順序に違いがみられる。サンドイッチ板と積層板は共に対称アングルプライ積層しているため曲げ-ねじりの連成が生じるが、振動モードにおける節線のゆがみはこの連成に起因する。そこで、サンドイッチ板と積層板の無次元曲げ剛性 \bar{D}_{ij} ($i, j=1, 2, 6$)を示したのが図2-15である。この図からわかるように、サンドイッチ板の方が曲げとねじりの連成に関する剛性 \bar{D}_{16} および \bar{D}_{26} の値がほかの \bar{D}_{ij} に比べて相対的に低いことがわかる。そのため、サンドイッチ板の節線のゆがみが小さくなると考えられる。さらに、図2-16では周辺自由積層板について $\bar{D}_{16}, \bar{D}_{26} = 0$ (Specially orthotropic)として振動モードを示した。連成が無い場合節線のゆがみは無く、 $\bar{D}_{16}, \bar{D}_{26} \neq 0$ とした場合に比べて振動数は若干高い値を示す。この振動モードをサンドイッチ板の振動モードと比較すると、モード形状が酷似していると共に、振動モードの出現順序も同じになっている。

2.3.4 実験結果との比較

片持ちサンドイッチ正方形板の固有振動数について、ホログラフィー干渉法による実験結果と数値計算による結果とを比較検討する。

実験はサンドイッチ板を二枚のアルミ板でボルト固定し、固定辺の境界条件を満たすようにした。これをスピーカにより正弦加振し、ホログラフィー干渉法（実時間時間平均法）により固有振動モードおよび固有振動数を探索する。光学系の配置と光路を図2-17に示す。

実験に使用したサンドイッチ板の表面材はGraphite/Epoxy織物強化材（東邦サイテック製，QF-1130-04-3101，平織クロス）であり、心材にはアルミハニカム（昭和飛行機製，AL3/16-5052-.001）を使用した。織物強化材の繊維方向はx-y方向に一致しており、厚さは $t_1=t_2=0.4\text{mm}$ 、 $t_c=4.5\text{mm}$ であり、辺長は $a=200\text{mm}$ 、 $b=200\text{mm}$ である。織物強化材とアルミハニカムの材料定数は表2-6に示すとおりである。

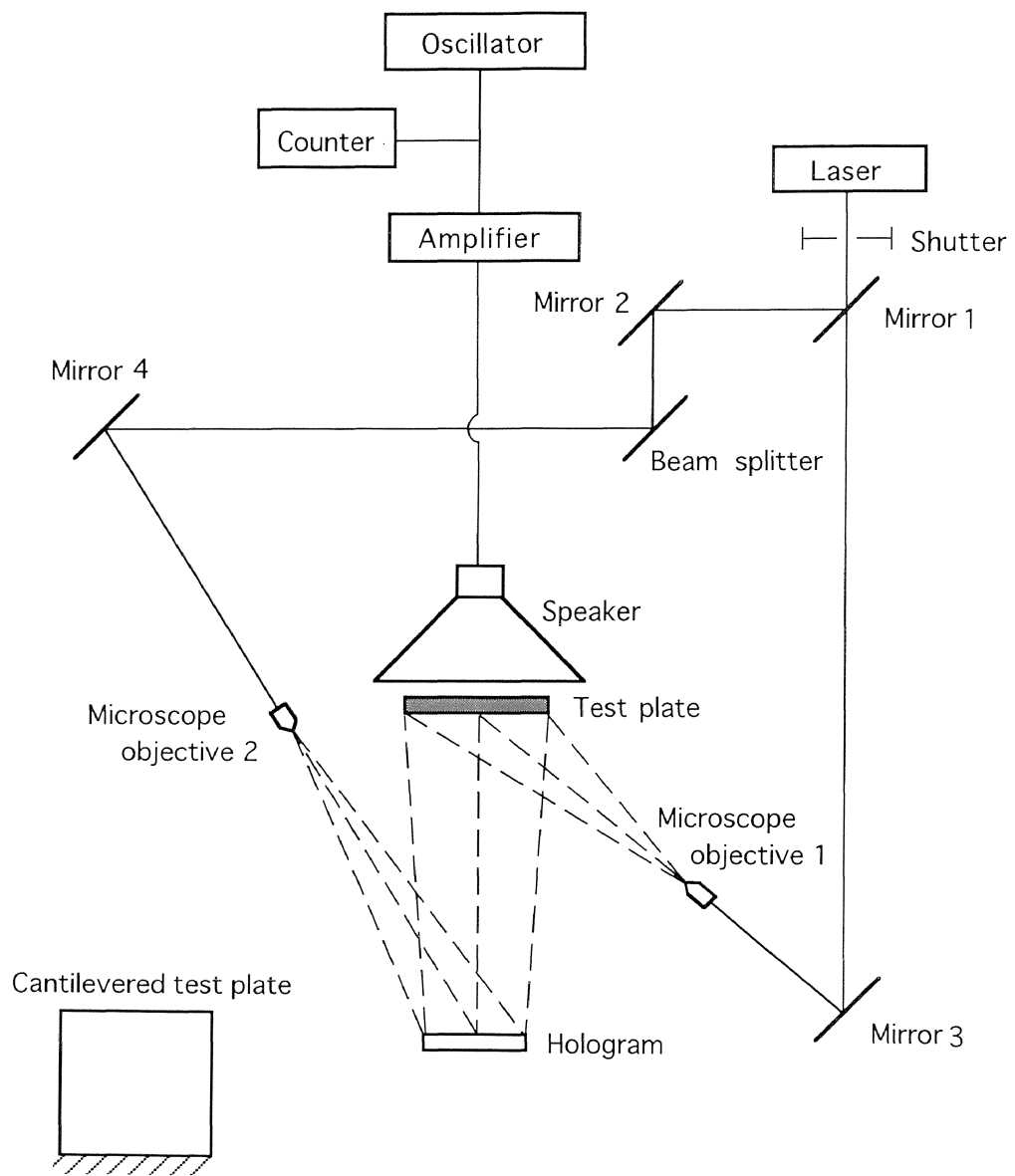


図2-17 光学系の配置と光路

表 2-6 G/E織物強化材とハニカム材の材料定数

Graphite/Epoxy (QF-1130-04-3101)				
E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}	ρ_1 [kg/m ³]
68.6	68.6	4.41	0.09	1.59×10^3

Al-Honeycomb (AL3/16-5052-.001)		
G_x^c [MPa]	G_y^c [MPa]	ρ_c [kg/m ³]
196.1	539.4	91

表2-7に片持ちサンドイッチ板の固有振動数について、実験結果と解析結果の比較を示す。実験ではアルミハニカムの破損を避けるため、通常よりも弱いトルクでボルト固定している。そのため、固定条件が完全に満足されず、最も基本的な曲げモードとなる基本振動数に関しては解析と実験による固有振動数の相対差は50%程度になる。しかし、他の固有振動数に関しては両者の相対差は0.6~10%程度であることから、実験における固定条件の不完全さを考慮に入れると本解析法は十分に妥当な近似解法であると判断できる。

表 2-7 解析と実験による片持ちサンドイッチ正方形板の固有振動数[Hz]の比較

	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
Analysis	160	235	923	1024	1276	1769
Experiment	106	228	835	1030	1251	1722

2.4 粘弾性心材を有するサンドイッチ長方形板の振動減衰特性⁽⁹³⁾⁽⁹⁴⁾

粘弾性心材を有するサンドイッチ板の振動減衰特性を無次元振動数とモード損失係数の点から考察する。変位場はType-1を使用し、境界条件は周辺固定と片持ちの2通りについて調べる。また、表面材のラミナと心材の各弾性係数は材料の内部減衰を考慮した複素数により $j = \sqrt{-1}$ として、次のように近似する。

$$E_1^* = E_1(1 + j\delta_1), \quad E_2^* = E_2(1 + j\delta_2), \quad G_{12}^* = G_{12}(1 + j\delta_{12})$$

$$G_c^* = G_c(1 + j\delta_c)$$

ここで、 E_1 、 E_2 および G_{12} は各複素弾性係数の実部であり表2-1で与えられる。また、 $\delta_1, \delta_2, \delta_{12}$ および δ_c は各複素弾性係数における虚部と実部の比を表す材料損失係数であり、材料の内部減衰の大きさを表す。ここでは、ラミナの材料損失係数⁽⁹⁵⁾は粘弾性心材の材料損失係数に比べ十分小さいため振動数依存性を無視し、 $\delta_1=0.001$ 、 $\delta_2=0.01$ 、 $\delta_{12}=0.015$ なる定数で与えた。また、粘弾性心材の面外せん断弾性係数の実部 G_c 、材料損失係数 δ_c および密度 ρ_c は振動数依存性を有するアクリル性の粘弾性材料⁽⁹⁶⁾ (温度15°C) を想定し

$$\begin{aligned} G_c &= 22.99(f^{0.639}) \times 6895 \text{ [Pa]} \\ \delta_c &= 47.47(f^{0.518}) \times 6895 / G_c \\ \rho_c &= 1.1 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]} \end{aligned} \quad (2.72)$$

なる値を使用した。ここで、 f は振動数[Hz]を表す。

各弾性係数を複素数で近似すると、式(2.65)は複素固有値問題となる。このとき、複素固有値 Λ^* が

$$\Lambda^* = \text{Re}(\Lambda^*) + j \text{Im}(\Lambda^*) = \text{Re}(\Lambda^*) \left[1 + j \frac{\text{Im}(\Lambda^*)}{\text{Re}(\Lambda^*)} \right], \quad (j = \sqrt{-1})$$

の形で表されるとき、 $\Omega = \sqrt{\text{Re}(\Lambda^*)}$ は無次元振動数、 $\eta = \text{Im}(\Lambda^*) / \text{Re}(\Lambda^*)$ はモード損失係数を表す。ただし、 $\text{Re}(\Lambda^*)$ と $\text{Im}(\Lambda^*)$ はそれぞれ Λ^* の実部と虚部を表す。

また、 G_c および δ_c が振動数依存性を有する(振動数 f の関数となる) 場合、式(2.65)は非線形複素固有値問題となる。この場合、複素固有値 Λ^* は反復解法により求められる。

2.4.1 数値計算精度の検討

本解析ではリッツ法を用いているため、解の精度は変位関数の項数に依存する。表2-8に変位関数の項数 $I \times J$ による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の収束状況を示す。上段が無次元振動数 Ω 、括弧付きの下段がモード損失係数 η を示す。ここでは、積層形態を $(30^\circ / -30^\circ / C / -30^\circ / 30^\circ)$ とし、心材と板全体の厚さ比を $t_c/H=0.2$ 、板厚比を $a/H=100$ とした。ま

表2-8 変位関数の項数による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の収束状況【 $a/b=1, a/H=100, t_1/a=4\times 10^{-3}, t_c/a=2\times 10^{-3}, E_1/E_2=14.0, G_{12}/E_2=0.51, \nu_{12}=0.3, \delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, (30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$ 】

$I \times J$	Mode No.				
	1	2	3	4	5
(a) Clamped plate					
7×7	3.395*	5.276	6.381	7.654	8.342
	(0.5112)**	(0.4797)	(0.5228)	(0.4443)	(0.5021)
8×8	3.395	5.276	6.381	7.653	8.340
	(0.5106)	(0.4796)	(0.5223)	(0.4434)	(0.5011)
9×9	3.395	5.276	6.381	7.652	8.340
	(0.5106)	(0.4792)	(0.5223)	(0.4432)	(0.5008)
10×10	3.395	5.276	6.381	7.652	8.340
	(0.5105)	(0.4792)	(0.5222)	(0.4432)	(0.5008)
(b) Cantilevered plate					
7×7	0.6460	1.263	2.485	2.881	3.690
	(0.1890)	(0.3023)	(0.2950)	(0.4292)	(0.4111)
8×8	0.6456	1.262	2.485	2.881	3.689
	(0.1890)	(0.3020)	(0.2949)	(0.4284)	(0.4108)
9×9	0.6452	1.262	2.484	2.881	3.689
	(0.1890)	(0.3018)	(0.2950)	(0.4282)	(0.4107)
10×10	0.6450	1.262	2.484	2.880	3.688
	(0.1890)	(0.3017)	(0.2949)	(0.4282)	(0.4107)

* Dimensionless frequency Ω

** Modal loss factor η

表2-9 周辺固定された等方性サンドイッチ正方形板の基本無次元振動数 Ω_1 とモード損失係数 η_1 の比較

【 $a/b=1, a/H=73.2, t_1/a=t_2/a=1.67\times 10^{-3}, t_c/a=0.01, E_1/E_2=1, \nu_{12}=0.3, G_c/G_{12}=4.33\times 10^{-5}, \rho_c/\rho_1=0.46, \rho_1/\rho_2=1, \delta_c=0.061$ 】

Source	Ω_1	η_1
Present	2.762	0.0470
Shikanai et al. ⁽¹⁶⁾	2.927	0.0479

表2-10 片持ち等方性サンドイッチ長方形板の無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の比較（曲げ振動モード）

【 $a/b=7, a/H=56, t_1/a=t_2/a=8.5\times 10^{-3}, t_c/a=7.12\times 10^{-3}, E_1/E_2=1, \nu_{12}=0.3, G_c/G_{12}=2.64\times 10^{-5}, \rho_c/\rho_1=0.35, \rho_1/\rho_2=1, \delta_c=1.0$ 】

Source		Mode No.				
		1	2	3	4	5
Present	Ω	1.523	6.846	16.95	31.67	51.45
	η	0.1998	0.2171	0.1501	0.0879	0.0568
Soni et al. ⁽²²⁾	Ω	1.517	6.909	17.15	32.00	52.12
	η	0.2019	0.2180	0.1500	0.0873	0.0560
Sun et al. ⁽²⁵⁾	Ω	1.519	6.709	16.94	—	—
	η	0.1997	0.2117	0.1452	—	—

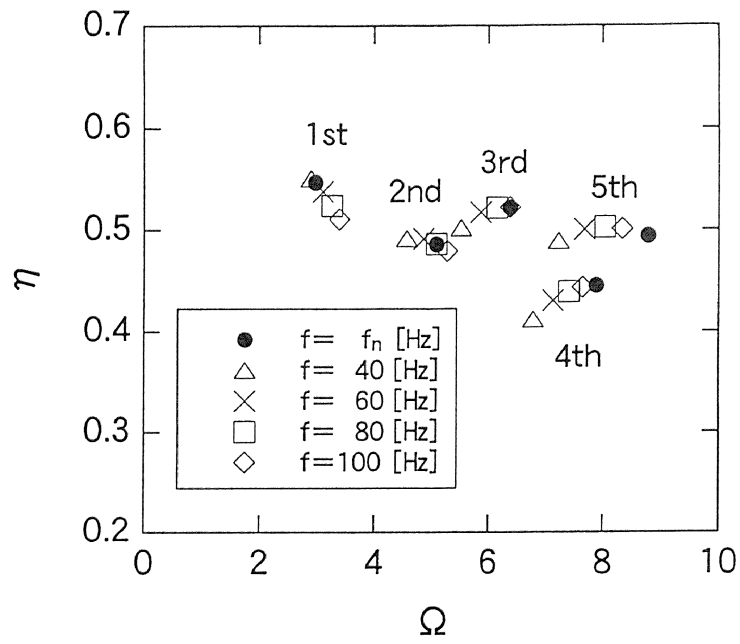
た，粘弾性心材に関しては $f=100\text{Hz}$ の弾性係数 G_c と材料損失係数 δ_c を使用している．解の収束状況から判断して，以降の計算では項数 $I \times J=10 \times 10$ を採用した．

表2-9および表2-10にそれぞれ周辺固定と片持ちの等方性サンドイッチ板の無次元振動数とモード損失係数について，他の著者らによる解析結果との比較を示す．面外変位を三角関数で一項近似したガラーキン法による解析結果⁽¹⁶⁾と本解析結果との相対差は，モード損失係数に関して1.9%程度，無次元振動数に関しては5%程度低い値となっている．これはリッツ法やガラーキン法が解の上限値を与えることを考えると，固有振動数に関しては，べき級数を用いた本解析値の精度が高いことを示している．一方，片持ち板では，本解析結果と有限要素法による結果⁽²²⁾⁽²⁵⁾との相対差は無次元振動数に関して最大2.1%，モード損失係数に関しては最大3.3%程度である．したがって，リッツ法による本解析値は実用上十分な精度と妥当性を有するものと考えられる．

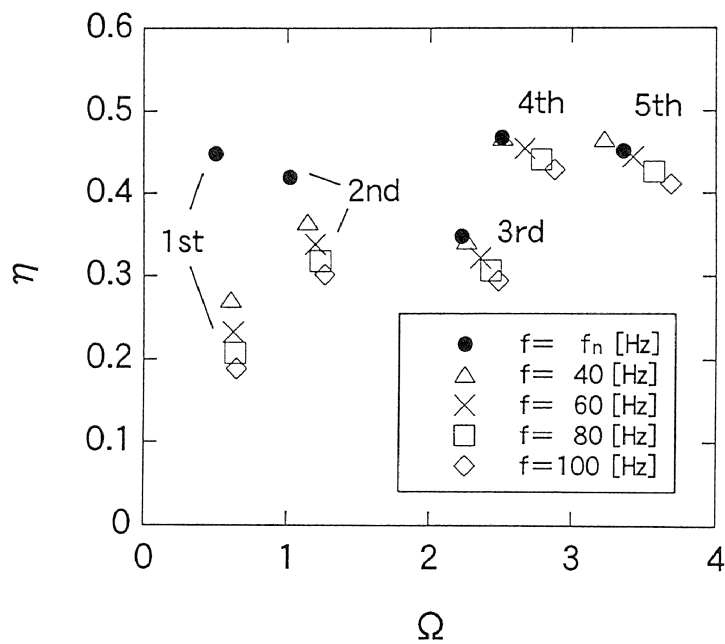
2.4.2 固有振動数およびモード損失係数

本節では，周辺固定と片持ちのサンドイッチ正方形板について，無次元振動数 Ω とモード損失係数 η に対する心材の振動数依存性，積層表面材の繊維角度および心材厚さの影響を調べる．数値計算において，板の各寸法を $a=b=1\text{m}$ ， $t_1=t_2=4\text{mm}$ ， $t_c=2\text{mm}$ とした．固有値の反復計算については，3～5回の反復計算で有効数字4桁での解の収束を確認している．また，振動数の初期値 f_0 の値を変化させても解の収束値に変化は認められなかったため，反復計算において $f_0=100\text{Hz}$ とした．

図2-18に周辺固定と片持ちのサンドイッチ正方形板について，モード損失係数 η と無次元振動数 Ω における粘弾性心材の面外せん断弾性係数 G_c と材料損失係数 δ_c の振動数依存性の影響を示す．図中の●印は式(2.72)を使用し，粘弾性心材の振動数依存性を考慮した結果を示す．この場合， G_c および δ_c は振動数 f の関数となり，各モードにおける固有振動数 f_n Hz により決定される．他は振動数 $f=40, 60, 80, 100\text{Hz}$ をそれぞれ式(2.72)に代入し， G_c と δ_c を定数として扱った場合の結果を示す．一次モードでは， $f=40\text{Hz}$ は $f_n=46.4\text{Hz}$ に近いいため，●と△の両者は比較的近い G_c と δ_c の値をもち，両者の Ω と η は他の振動数 f の場合よりも比較的近い値を示す．



(a) Clamped plate



(b) Cantilevered plate

図2-18 無次元振動数 Ω とモード損失係数 η における粘弾性心材の振動数依存性の影響

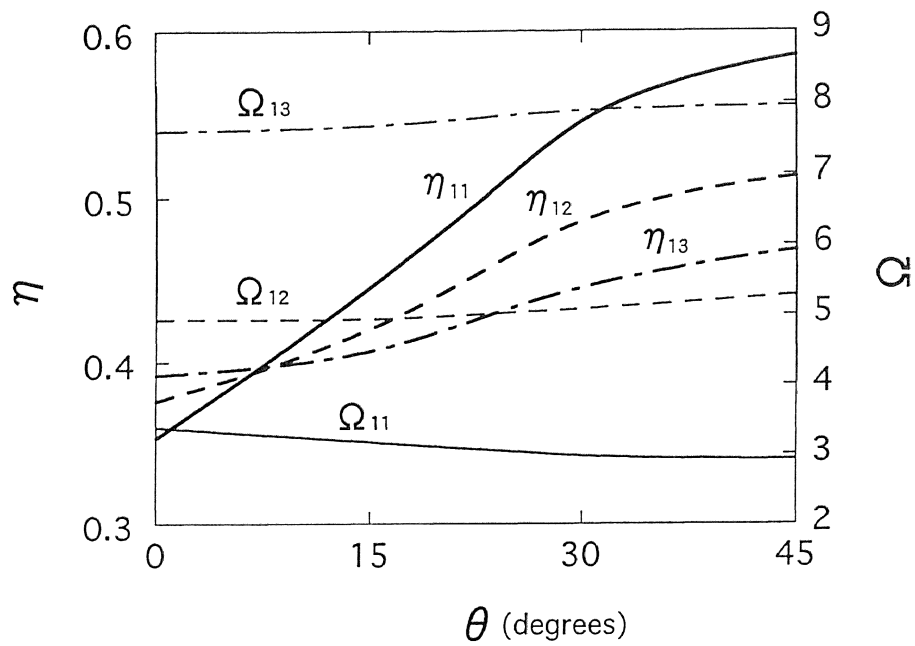
【 $a/b=1, a/H=100, t_1/a = t_2/a = 4 \times 10^{-3}, t_c/a = 2 \times 10^{-3},$
 $E_1/E_2=14.0, G_{12}/E_2=0.51, \nu_{12}=0.3, \rho_c/\rho_1=0.69, \rho_1/\rho_2=1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, (30^\circ / -30^\circ / C / -30^\circ / 30^\circ),$
 f_n : Natural frequency [Hz] 】

同様の理由から、二次の●($f_n = 79.4\text{Hz}$)と□($f = 80\text{Hz}$)、および三次の●($f_n = 99.5\text{Hz}$)と◇($f = 100\text{Hz}$)がほぼ一致した値を示す。モード損失係数 η についてみると、一次モードでは△、二次モードでは□、三次と四次モードでは◇、五次モードでは△が最も振動数依存性を考慮した●に近い値を示す。したがって、一次～五次モードのすべてにおいて精度の良い近似を与える f を一意的に定めることは困難であると考えられる。しかし、一次～三次モードでは●に対する×の平均相対差は1.2%程度であり、三次～五次モードでは●に対する◇の平均相対差は0.6%程度であることから、評価するモード次数の範囲を限定すれば、 G_c と δ_c の振動数依存性を考慮に入れなくても、モード損失係数 η の予測が可能であると考えられる。一方、無次元振動数 Ω についても、三次～五次では●に対する◇の平均相対差は2.7%程度である。したがって、評価するモード次数の範囲を限定すれば Ω の大まかな予測も可能であると考えられる。一方、片持ち板は、三～五次モードでは、●と他の結果に比較的差が見られないが、一次および二次モードでは、とくにモード損失係数に関して●と他の結果との差が大きく、材料特性 G_c と δ_c の振動数依存性を考慮する必要がある。

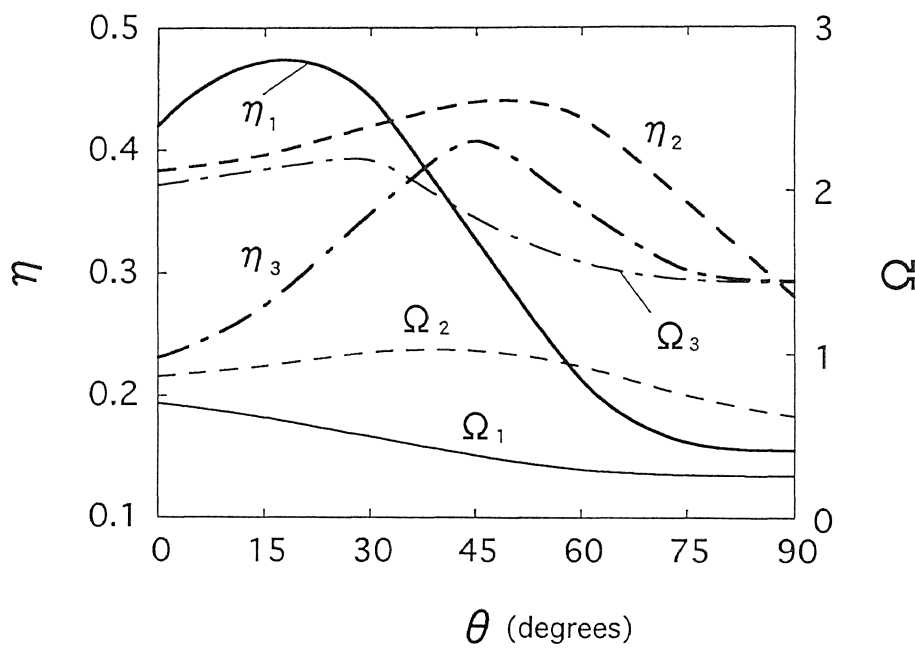
図2-19に周辺固定と片持ちのサンドイッチ正方形板について、表面材の繊維角度 θ によるモード損失係数 η と無次元振動数 Ω の変化を示す。積層形態は($\theta / -\theta / C / -\theta / \theta$)とした。図中において Ω_{mn} と η_{mn} の m および n は、それぞれ x 方向および y 方向の半波数を表す。固定されたサンドイッチ正方形板の場合、 θ が増加するにつれてモード損失係数は増加する傾向を示し、 $\theta = 45^\circ$ 付近で最大となる。

一方、片持ちサンドイッチ正方形板については、一次と三次は曲げ振動モードであり、二次はねじり振動モードである。モード損失係数が最大となる繊維角度は各振動モードによって異なり、適切な繊維角度を選択することにより、特定の振動モードに対して高いモード損失係数を与えることができる。

図2-20に厚さ比 t_c/H によるモード損失係数 η と無次元振動数 Ω の変化を示す。ここでは、積層形態を($30^\circ / -30^\circ / C / -30^\circ / 30^\circ$)とした。 t_c/H の増加に伴い各モード損失係数は増加する傾向を示し、周辺固定されたサンドイッチ正方形板では $t_c/H = 0.8$ 付近で、片持ちのサンドイッチ正方形板



(a) Clamped plate



(b) Cantilevered plate

図2-19 繊維角度 θ による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
 [$a/b=1, a/H=100, t_1/a=t_2/a=4 \times 10^{-3}, t_c/a=2 \times 10^{-3},$
 $E_1/E_2=14.0, G_{12}/E_2=0.51, \nu_{12}=0.3, \rho_c/\rho_1=0.69, \rho_1/\rho_2=1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, (\theta / -\theta / C / -\theta / \theta)]$

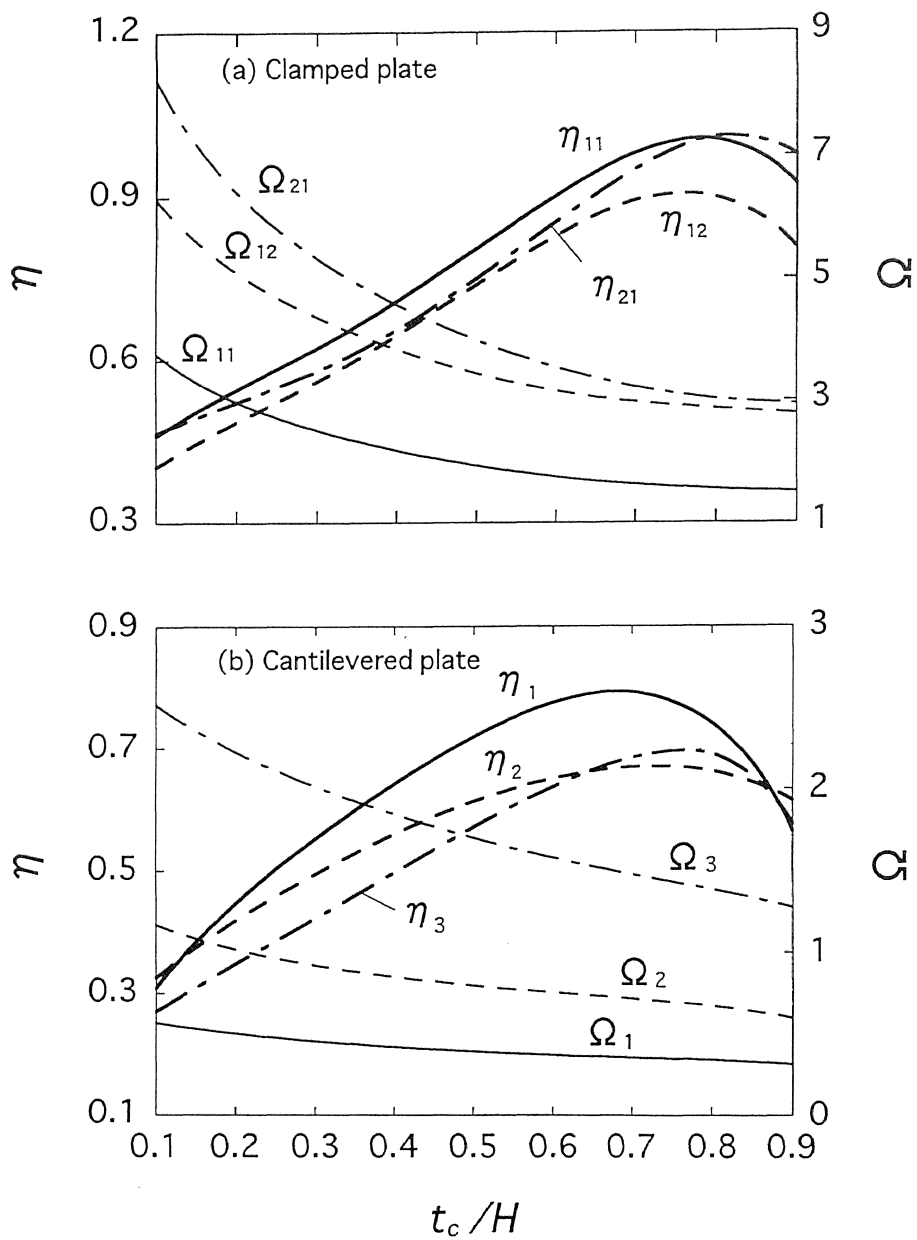


図2-20 心材の厚さによる無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
 【 $a/b=1, a/H=100, E_1/E_2=14.0, G_{12}/E_2=0.51, \nu_{12}=0.3,$
 $\rho_c/\rho_1=0.69, \rho_1/\rho_2=1, \delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015,$
 $(30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$ 】

では $t_c/H=0.6\sim 0.8$ 付近で最大となる。このことから、減衰効果を最大にする厚さ比 t_c/H が存在することがわかる。また、 t_c/H が増加すると、表面材が薄肉になるため板全体の剛性が低下し、固有振動数はいずれも低下する傾向を示す。

2.5 結 言

本章では、FRP積層表面材とハニカム心材および粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ長方形板の振動減衰特性をリッツ法により解析した。

表面材の変形において、面外せん断変形を考慮する場合としない場合の二つの変位場を仮定し、それぞれについて定式化を行った。次に、この二つの変位場の適用範囲を検討し、境界条件、表面材の積層形態、心材の厚さが固有振動数と振動モードに及ぼす影響を調べた。さらに、一般的なFRP積層板の固有振動数と振動モードとの比較によりサンドイッチ板の動特性を考察し、ホログラフィー干渉法による実験結果との比較から本解析法の妥当性と有用性を検討した。ついで、心材に粘弾性材料を使用したサンドイッチ長方形板を解析の対象とし、心材の弾性係数および材料損失係数における振動数依存性、表面材の積層形態および心材厚さが板の振動減衰特性に及ぼす影響を考究した。その結果を要約すると以下のようなになる。

(1) 変位関数の項数による固有振動数の収束状況を調べ、項数を適切に取ることによって実用上十分な精度を有する解が得られることを示した。また、他の著者らによる解析結果と比較して、本解析結果が十分な精度と妥当性を有することを確かめた。

(2) サンドイッチ長方形板の自由振動の解析においては、板厚比 $a/H=10$ 以上の薄い板では、表面材に古典積層理論を適用した変位場の適用が十分可能であるといえるが、 $a/H=10$ 以下の厚い板を扱う場合、表面材の変形において面外せん断変形を考慮した変位場の適用が妥当であると考えられる。

(3) 積層表面材の繊維角度による固有振動数の変化においては、モード次数の異なる振動数が接近するブリーキングが生じる。

(4) 心材の厚さによる固有振動数の変化については、心材と板全体の厚さ比 $t_c/H=0.8$ 付近で固有振動数が最大となる。また、低次よりも高次の固有振動数が心材の厚さによる影響を受けやすい。

(5) サンドイッチ板の固有振動数は、質量効果により積層板よりも高い固有振動数を示す。また、振動モードに関しては曲げとねじりの連成効果が小さく、振動モードにおける節線のゆがみが小さい。

(6) 片持ちサンドイッチ正方形板について、解析と実験(ホログラフィー干渉法)から求めた固有振動数の比較検討を行い、本解析法が十分に妥当な近似解法であることを示した。

(7) 粘弾性心材の振動数依存性を無視した解析では、評価するモード次数の範囲を限定すれば、心材の振動数依存性を考慮しなくてもモード損失係数と固有振動数の予測が可能であると考えられる。

(8) モード損失係数が最大となる繊維角度は振動モードによって異なり、適切な繊維角度を選択することにより、特定の振動モードに対して高いモード損失係数を与えることができる。

(9) 減衰効果は心材と板全体の厚さ比 t_c/H の値に依存し、モード損失係数は $t_c/H=0.6\sim 0.8$ 付近で最大となる。また、 t_c/H が増加すると、表面材が薄肉になるため板全体の剛性が低下し、固有振動数は減少する傾向を示す。

第3章 複合材サンドイッチ円錐殻の振動減衰特性⁽⁹⁷⁾

3.1 緒言

円筒および円錐殻は人工衛星のスラストチューブや各種圧力容器などの基本構造部材として広く用いられている。したがって、構造設計上これらの振動特性を把握することは重要であり、Irieら⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾による等方性円錐殻の自由振動をはじめ、これまで数多くの研究報告がなされている。

また、航空宇宙分野における構造物の軽量化を目的として、FRP積層材を使用した積層円筒および円錐殻の振動に関する研究^{(30)~(40)}が多く見受けられるようになった。また、サンドイッチ構造から成る円筒および円錐殻の振動に関しては、Mirza⁽⁴¹⁾をはじめ数多くの研究報告および研究動向の調査^{(42)~(44)}が行われている。

一方、ラミナの内部減衰を考慮した積層円筒および円錐殻の振動減衰特性に関しては、AlamとAsnani⁽⁴⁵⁾をはじめとする幾つかの研究報告⁽⁴⁶⁾⁽⁴⁷⁾がなされている。さらに、心材に粘弾性材料を使用したサンドイッチ円筒および円錐殻の振動減衰特性に関する研究は、RameshとGanesan⁽⁴⁸⁾⁽⁴⁹⁾が有限要素法により解析を行い、面外せん断変形と回転慣性の有無の違いをもつ三つの解析モデルについて比較検討を行っている。

このように、これまでの円筒および円錐殻の振動に関する研究は、減衰を考慮しない自由振動に関するものが多く、サンドイッチ構造から成る円筒および円錐殻の振動減衰特性に関しては表面材および心材ともに等方性材料を使用した場合が多い。また、これらの研究では単純支持の境界条件を扱ったものや、有限要素法による近似解がほとんどである。

このような背景を踏まえ、本章ではFRP積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ円錐殻の振動減衰特性をリッツ法により解析する。はじめに、円錐殻の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価し、円錐殻のラグランジュ関数を極小化することにより、円錐殻の振動数方程式を導く。数値計算では、はじめに解の収束性を調べ、他の著者ら

による解析および実験結果との比較から本解析結果の精度と妥当性を検討する。つぎに、周方向波数、表面材の積層形態および各種形状寸法比が固有振動数、モード損失係数および振動モードに及ぼす影響を検討し、複合材サンドイッチ円錐殻の振動減衰特性を考究する。

3.2 理論解析

解析において、以下の仮定を用いる。

(1) 表面材と心材は完全に接着されており、それらの界面において、はく離やすべりは生じない。

(2) 表面材および心材の厚さは他の寸法に比べて小さく、面外方向の垂直応力は他の応力に比べて微小となるため無視できる。一方、面外せん断変形およびそれに関する応力とひずみは考慮する。

(3) 表面材および心材の変位、回転およびひずみは微小であり、線形弾性体としての扱いが可能である。

以上の仮定により、変位を面外方向に連続な関数を用いて表すことができ、複合材サンドイッチ円錐殻を積層表面材を有する均質な連続体と考えて異方性弾性論の適用が可能となる。

3.2.1 形状と座標系

図3-1に複合材サンドイッチ円錐殻の形状と座標系を示す。図のように中央面において座標 (x, θ, z) をとり、任意点における x, θ, z 方向の各変位を u_l, v_l, w_l ($l=1$; 表面材1, 2; 表面材2, c ; 心材)とする。円錐殻の回転軸から中央面までの小口半径を R 、任意点Pまでの半径を r 、長さを L とする。また、表面材1、表面材2および心材の厚さをそれぞれ t_1, t_2, t_c とし、半頂角を ϕ で表す。さらに、表面材1が N_1 層、表面材2が N_2 層から成る複合材サンドイッチ円錐殻を考え、長方形板(図2-1(b))の場合と同様に表面材 n ($n=1, 2$)の第 m 層上面への中央面からの距離を $h_m^{(n)}$ とする。また、材料主軸1(繊維方向)と x 軸のなす角度を繊維角度 $\theta_m^{(n)}$ (ここでは、 0° または 90° のいずれか)とする。

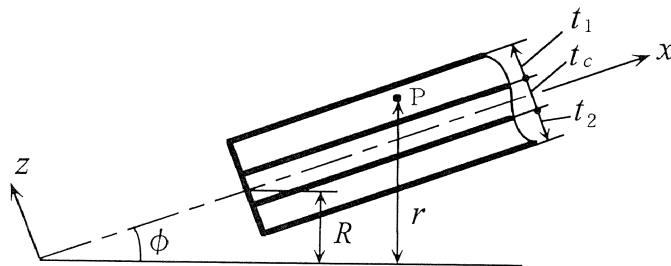
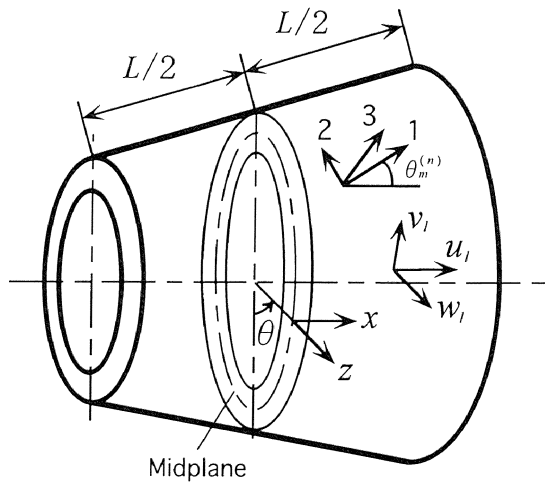


図3-1 複合材サンドイッチ円錐殻の形状と座標系

3.2.2 変位場の仮定とひずみ

サンドイッチ円錐殻の変位場は、表面材の面外せん断変形を考慮した長方形板の変位場と基本的な考え方は同様(図2-2)である。円錐殻の厚さは他の寸法に比べて小さいため、表面材および心材の変形を中央面における変位量 u_0, v_0 および w_0 を用いて記述することを考えると、 x, θ, z 方向の各変位 u_l, v_l, w_l ($l=1, 2, c$)は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_0 - z\beta_x + \frac{t_c}{2}(\beta_x - \psi_x) \\
 v_1 &= v_0 - z\beta_\theta + \frac{t_c}{2}(\beta_\theta - \psi_\theta) \\
 u_2 &= u_0 - z\beta_x - \frac{t_c}{2}(\beta_x - \psi_x) \\
 v_2 &= v_0 - z\beta_\theta - \frac{t_c}{2}(\beta_\theta - \psi_\theta) \\
 u_c &= u_0 - z\psi_x \\
 v_c &= v_0 - z\psi_\theta \\
 w_1 &= w_2 = w_c = w_0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで、 β_x および ψ_x は、それぞれ表面材および心材の $x-z$ 面における z 軸からの回転であり、 β_θ および ψ_θ は $\theta-z$ 面における z 軸からの回転を表す。

次に、微小変形理論に基づくと、表面材 n ($n=1, 2$)と心材 c のひずみ-変位関係式は

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^{(l)} &= \frac{\partial u_l}{\partial x} \\
 \varepsilon_\theta^{(l)} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_l}{\partial \theta} + u_l \sin \phi + w_l \cos \phi \right) \\
 \gamma_{x\theta}^{(l)} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_l}{\partial \theta} - v_l \sin \phi \right) + \frac{\partial v_l}{\partial x} \\
 \gamma_{\theta z}^{(l)} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_l}{\partial \theta} - v_l \cos \phi \right) + \frac{\partial v_l}{\partial z} \\
 \gamma_{zx}^{(l)} &= \frac{\partial w_l}{\partial x} + \frac{\partial u_l}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

と書ける。ただし、小口半径 R に対して殻の厚さは十分に薄いとし

$$r = R + (x + L/2) \sin \phi + z \cos \phi \cong R + (x + L/2) \sin \phi \quad (3.3)$$

とする.

つぎに, 式(3.1)を式(3.2)に代入すると表面材 n ($n=1,2$)の各ひずみは

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(n)} &= \varepsilon_{x0} + z\kappa_{xf} + (-1)^n \frac{t_c}{2} \gamma_x \\ \varepsilon_\theta^{(n)} &= \varepsilon_{\theta0} + z\kappa_{\theta f} + (-1)^n \frac{t_c}{2} \gamma_\theta \\ \gamma_{x\theta}^{(n)} &= \gamma_{x\theta0} + z\kappa_{x\theta f} + (-1)^n \frac{t_c}{2} \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z}^{(n)} &= \gamma_{\theta z f} + (-1)^n \frac{t_c}{2} \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zx}^{(n)} &= \gamma_{zx f} \end{aligned} \quad (3.4)$$

となり, 心材の各ひずみは

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(c)} &= \varepsilon_{x0} + z\kappa_{xc}, \quad \varepsilon_\theta^{(c)} = \varepsilon_{\theta0} + z\kappa_{\theta c} \\ \gamma_{x\theta}^{(c)} &= \gamma_{x\theta0} + z\kappa_{x\theta c}, \quad \gamma_{zx}^{(c)} = \gamma_{zxc} \\ \gamma_{\theta z}^{(c)} &= \gamma_{\theta zc} \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる. また, 式(3.4)および(3.5)において

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta0} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + u_0 \sin \phi + w_0 \cos \phi \right), \quad \gamma_{x\theta0} = \frac{1}{r} \left(-v_0 \sin \phi + \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \kappa_{xf} &= -\frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \quad \kappa_{\theta f} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \beta_x \sin \phi \right), \quad \kappa_{x\theta f} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial \theta} - \beta_\theta \sin \phi \right) - \frac{\partial \beta_\theta}{\partial x} \\ \kappa_{xc} &= -\frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \kappa_{\theta c} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \psi_x \sin \phi \right), \quad \kappa_{x\theta c} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} - \psi_\theta \sin \phi \right) - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \\ \gamma_x &= -\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right), \quad \gamma_\theta = -\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + (\beta_x - \psi_x) \sin \phi \right\} \\ \gamma_{x\theta} &= -\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \beta_x}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} - (\beta_\theta - \psi_\theta) \sin \phi \right\} - \left(\frac{\partial \beta_\theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \right) \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} (\beta_\theta - \psi_\theta) \cos \phi \\ \gamma_{\theta z f} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 \cos \phi \right) - \beta_\theta, \quad \gamma_{zx f} = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \beta_x \\ \gamma_{\theta z c} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 \cos \phi \right) - \psi_\theta, \quad \gamma_{zxc} = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \psi_x \end{aligned} \quad (3.6)$$

である。ここで、 $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{\theta 0}$ および $\gamma_{x\theta 0}$ は中央面におけるひずみを、 κ_x, κ_θ および $\kappa_{x\theta}$ は曲率およびねじり率を表し、表面材および心材の任意点におけるひずみは中央面におけるひずみ、または曲率を用いて表すことができる。

3.2.3 応力-ひずみ関係式

表面材における各ラミナは 1, 2, 3 軸のいずれの軸に対しても対称面をもつ直交異方性材料である。したがって、異方性弾性論における一般化されたフックの法則により表面材 $n(n=1,2)$ の第 m 層目のラミナにおける応力-ひずみ関係式は式(2.7)で与えられる。式(2.7)中の剛性係数 Q_{ij} は第 m 層目のラミナの内部減衰を考慮した複素弾性係数 E_1^*, E_2^*, G_{12}^* およびポアソン比 ν_{12}, ν_{21} を用いて

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1^*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2^*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{E_1^*\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2^*\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{44} &= G_{23}^*, & Q_{55} &= G_{31}^*, & Q_{66} &= G_{12}^* \end{aligned} \quad (3.7)$$

で与えられる。ただし

$$\begin{aligned} E_1^* &= E_1(1 + j\delta_1), & E_2^* &= E_2(1 + j\delta_2), \\ G_{12}^* &= G_{12}(1 + j\delta_{12}), & G_{23}^* &= G_{23}(1 + j\delta_{23}), & G_{31}^* &= G_{31}(1 + j\delta_{31}), & j &= \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

である。ここで、 $E_1, E_2, G_{12}, G_{23}, G_{31}$ は各複素弾性係数の実部であり、 $\delta_1, \delta_2, \delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{31}$ は各複素弾性係数における虚部と実部の比を表す材料損失係数である。

つぎに、各ラミナの材料主軸上における応力-ひずみ関係式(2.7)を図 3-1 に示す座標 (x, θ, z) 座標に変換すると

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix}^{(n,m)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(n,m)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (3.9)$$

となる．式(3.9)中の剛性係数 $\bar{Q}_{ij}^{(n,m)}$ ($i, j=1,2,4,5,6$) はそれぞれ式(2.10)で与えられる．また，ここでは各ラミナの材料主軸1(繊維方向)と x 軸のなす繊維角度 $\theta_m^{(n)}$ は 0° または 90° のいずれかの値をとるため，式(3.9)において

$$\bar{Q}_{16}^{(n,m)} = \bar{Q}_{26}^{(n,m)} = \bar{Q}_{45}^{(n,m)} = 0 \quad (3.10)$$

となる．

一方，粘弾性心材は等方性であるため，応力-ひずみ関係式は材料損失係数 δ_c を考慮した複素縦弾性係数 E_c^* およびポアソン比 ν_c を用いて次のように表すことができる．

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix}^{(c)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(c)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}^{(c)} \quad (3.11)$$

ここで

$$Q_{11}^{(c)} = Q_{22}^{(c)} = \frac{E_c^*}{1-\nu_c^2}, \quad Q_{12}^{(c)} = \frac{E_c^* \nu_c}{1-\nu_c^2}, \quad Q_{44}^{(c)} = Q_{55}^{(c)} = Q_{66}^{(c)} = \frac{E_c^*}{2(1+\nu_c)} \quad (3.12)$$

であり，複素縦弾性係数 E_c^* は E_c を実部として

$$E_c^* = E_c(1+j\delta_c) \quad , \quad j = \sqrt{-1} \quad (3.13)$$

と書ける．

3.2.4 エネルギー評価

サンドイッチ円錐殻の自由振動に対して角振動数 ω の調和振動を考え，殻の各変位を

$$\begin{aligned} u_0(x, \theta, t) &= U_0(x, \theta) \sin \omega t \\ v_0(x, \theta, t) &= V_0(x, \theta) \sin \omega t \\ w_0(x, \theta, t) &= W_0(x, \theta) \sin \omega t \\ \psi_x(x, \theta, t) &= \bar{\psi}_x(x, \theta) \sin \omega t \\ \psi_\theta(x, \theta, t) &= \bar{\psi}_\theta(x, \theta) \sin \omega t \\ \beta_x(x, \theta, t) &= \bar{\beta}_x(x, \theta) \sin \omega t \\ \beta_\theta(x, \theta, t) &= \bar{\beta}_\theta(x, \theta) \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.14)$$

のように与える．ここでは，式(3.14)を用いて円錐殻の最大ひずみエネルギーと最大運動エネルギーを導く．

まず，サンドイッチ円錐殻の最大ひずみエネルギー U は表面材のひずみエネルギー U_f と心材のひずみエネルギー U_c との和

$$U = U_f + U_c \quad (3.15)$$

である．さらに，表面材のひずみエネルギー U_f は，表面材1のひずみエネルギー U_{f1} と表面材2のひずみエネルギー U_{f2} の和

$$U_f = U_{f1} + U_{f2} \quad (3.16)$$

で与えられる．また，表面材 n のひずみエネルギー U_{fn} ($n=1,2$)は

$$U_{fn} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N_n} \int_{h_{m-1}^{(n)}}^{h_m^{(n)}} \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z}]^{(n,m)} r dx d\theta dz \quad (3.17)$$

であり，式(3.9)を式(3.17)に代入し，表面材のひずみエネルギー U_{fn} ($n=1,2$)を剛性係数 $\bar{Q}_{ij}^{(n,m)}$ とひずみで表すと

$$U_{fn} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N_n} \int_{h_{m-1}^{(n)}}^{h_m^{(n)}} \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} [\bar{Q}_{11} \varepsilon_x^2 + \bar{Q}_{22} \varepsilon_\theta^2 + \bar{Q}_{66} \gamma_{x\theta}^2 + 2\bar{Q}_{12} \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \bar{Q}_{44} \gamma_{\theta z}^2 + \bar{Q}_{55} \gamma_{zx}^2]^{(n,m)} r dx d\theta dz \quad (3.18)$$

となる．つぎに，式(3.4)を式(3.18)に代入し，次式で示される面内伸縮，連成，曲げに関する剛性 $A_{ij}^{(n)}$ ， $B_{ij}^{(n)}$ ， $D_{ij}^{(n)}$ ($i, j = 1, 2, 6$) および表面材の面外せん断変形に関する剛性 $A_{ij}^{(n)}$ ($i, j = 4, 5$)

$$(A_{ij}^{(n)}, B_{ij}^{(n)}, D_{ij}^{(n)}) = \sum_{m=1}^{N_n} \int_{h_{m-1}^{(n)}}^{h_m^{(n)}} Q_{ij}^{(n,m)}(1, z, z^2) dz \quad (n=1, 2 \mid i, j = 1, 2, 4, 5, 6) \quad (3.19)$$

および式(3.14)の各変位の最大振幅により表面材のひずみエネルギー U_f を評価すると

$$\begin{aligned}
U_f = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} [& \{\varepsilon_1\}^T [A_1] \{\varepsilon_1\} + 2\{\varepsilon_2\}^T [B] \{\kappa_1\} \\
& + \{\kappa_1\}^T [D] \{\kappa_1\} - 2t_c \{\varepsilon_3\}^T [C] \{\kappa_2\} \\
& - 2t_c \{\kappa_1\}^T [E] \{\kappa_3\} + (t_c^2/4) \{\kappa_2\}^T [A_2] \{\kappa_2\}] r dx d\theta
\end{aligned} \quad (3.20)$$

となる。上式において各剛性マトリックスは

$$\begin{aligned}
[A_1] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_f A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad [A_2] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_f A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \\
[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_f C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \\
[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad [E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (3.21)$$

である。ここで、 k_f は表面材のせん断補正係数である。また式(3.21)の各マトリックスの要素は式(3.19)を用いて

$$\begin{aligned}
A_{ij} = A_{ij}^{(1)} + A_{ij}^{(2)}, \quad B_{ij} = B_{ij}^{(1)} + B_{ij}^{(2)}, \quad D_{ij} = D_{ij}^{(1)} + D_{ij}^{(2)} \\
C_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij}^{(1)} - A_{ij}^{(2)}), \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(B_{ij}^{(1)} - B_{ij}^{(2)})
\end{aligned} \quad (3.22)$$

と表すことができる。また、式(3.20)において、各ひずみベクトルは次のようになる。

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon_1\} &= \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \theta} + U_0 \sin \phi + W_0 \cos \phi \right), \frac{1}{r} \left(\frac{\partial W_0}{\partial \theta} - V_0 \cos \phi \right) - \bar{\beta}_\theta, \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial W_0}{\partial x} - \bar{\beta}_x, \frac{1}{r} \left(-V_0 \sin \phi + \frac{\partial U_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right\}^T \\
\{\varepsilon_2\} &= \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \theta} + U_0 \sin \phi + W_0 \cos \phi \right), \frac{1}{r} \left(-V_0 \sin \phi + \frac{\partial U_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right\}^T \\
\{\varepsilon_3\} &= \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \theta} + U_0 \sin \phi + W_0 \cos \phi \right), \frac{1}{r} \left(-V_0 \sin \phi + \frac{\partial U_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial V_0}{\partial x}, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{r} \left(\frac{\partial W_0}{\partial \theta} - V_0 \cos \phi \right) - \bar{\beta}_\theta \right\}^T \\
\{\kappa_1\} &= \left\{ -\frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial x}, -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} + \bar{\beta}_x \sin \phi \right), -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial \theta} - \bar{\beta}_\theta \sin \phi \right) - \frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial x} \right\}^T \quad (3.23) \\
\{\kappa_2\} &= \left\{ -\left(\frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial x} \right), -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \theta} + (\bar{\beta}_x - \bar{\psi}_x) \sin \phi \right), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{r} (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \cos \phi, -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \theta} - (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \sin \phi \right) - \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial x} \right) \right\}^T \\
\{\kappa_3\} &= \left\{ -\left(\frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial x} \right), -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \theta} + (\bar{\beta}_x - \bar{\psi}_x) \sin \phi \right), \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \theta} - (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \sin \phi \right) - \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial x} \right) \right\}^T
\end{aligned}$$

一方、心材のひずみエネルギー U_c は

$$\begin{aligned}
U_c &= \frac{1}{2} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\sigma_x^{(c)} \varepsilon_x^{(c)} + \sigma_\theta^{(c)} \varepsilon_\theta^{(c)} + \tau_{x\theta}^{(c)} \gamma_{x\theta}^{(c)} \right. \\
&\quad \left. + \tau_{\theta z}^{(c)} \gamma_{\theta z}^{(c)} + \tau_{zx}^{(c)} \gamma_{zx}^{(c)} \right] r dx d\theta dz \quad (3.24)
\end{aligned}$$

である。式(3.11)を式(3.24)に代入し、心材のひずみエネルギー U_c を剛性係数 $Q_{ij}^{(c)}$ ($i, j=1, 2, 6$) とひずみで表すと

$$\begin{aligned}
U_c &= \frac{1}{2} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left[Q_{11} \varepsilon_x^2 + Q_{22} \varepsilon_\theta^2 + Q_{66} \gamma_{x\theta}^2 \right. \\
&\quad \left. + 2Q_{12} \varepsilon_x \varepsilon_\theta + Q_{44} \gamma_{\theta z}^2 + Q_{55} \gamma_{zx}^2 \right]^{(c)} r dx d\theta dz \quad (3.25)
\end{aligned}$$

となる。つぎに、式(3.25)を z 方向に積分する際、次式で示される面内伸縮、曲げに関する剛性 $A_{ij}^{(c)}$ 、 $D_{ij}^{(c)}$ ($i, j = 1, 2, 6$) および心材の面外せん断変形に関する剛性 $A_{ij}^{(c)}$ ($i, j = 4, 5$)

$$A_{ij}^{(c)} = \int_{-t_c/2}^{t_c/2} Q_{ij}^{(c)} dz = t_c Q_{ij}^{(c)}, \quad D_{ij}^{(c)} = \int_{-t_c/2}^{t_c/2} z^2 Q_{ij}^{(c)} dz = \frac{t_c^3}{12} Q_{ij}^{(c)} \quad (3.26)$$

を用いると心材のひずみエネルギー U_c は

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} [\{\varepsilon_c\}^T [A^{(c)}] \{\varepsilon_c\} + \{\kappa_c\}^T [D^{(c)}] \{\kappa_c\}] r dx d\theta \quad (3.27)$$

と書ける。上式において各剛性マトリックスは

$$[A^{(c)}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_c A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_c A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}^{(c)}, \quad [D^{(c)}] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}^{(c)} \quad (3.28)$$

である。ここで、 k_c は心材のせん断補正係数である。また、式(3.27)の各ひずみベクトルは

$$\{\varepsilon_c\} = \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x}, \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \theta} + U_0 \sin \phi + W_0 \cos \phi \right), \frac{1}{r} \left(\frac{\partial W_0}{\partial \theta} - V_0 \cos \phi \right) - \bar{\psi}_\theta, \right. \\ \left. \frac{\partial W_0}{\partial x} - \bar{\psi}_x, \frac{1}{r} \left(-V_0 \sin \phi + \frac{\partial U_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right\}^T \quad (3.29)$$

$$\{\kappa_c\} = \left\{ -\frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial x}, -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \theta} + \bar{\psi}_x \sin \phi \right), -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \theta} - \bar{\psi}_\theta \sin \phi \right) - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial x} \right\}^T$$

となる。

一方、サンドイッチ円錐殻の最大運動エネルギー T は表面材の運動エネルギー T_f と心材の運動エネルギー T_c との和で

$$T = T_f + T_c \quad (3.30)$$

と表せる。

さらに，表面材の運動エネルギー T_f は表面材1の運動エネルギー T_{f1} と表面材2の運動エネルギー T_{f2} の和

$$T_f = T_{f1} + T_{f2} \quad (3.31)$$

で与えられる．表面材 n の運動エネルギー T_{fn} ($n=1,2$)はそれぞれ

$$T_{f1} = \frac{\rho_1}{2} \int_{t_c/2}^{t_c/2+t_1} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} [\dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2 + \dot{w}_1^2] r dx d\theta dz \quad (3.32)$$

$$T_{f2} = \frac{\rho_2}{2} \int_{-t_c/2-t_2}^{-t_c/2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} [\dot{u}_2^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{w}_2^2] r dx d\theta dz \quad (3.33)$$

と表すことができる．

つぎに，心材の運動エネルギー T_c は

$$T_c = \frac{\rho_c}{2} \int_{-t_c/2}^{t_c/2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} [\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2 + \dot{w}_c^2] r dx d\theta dz \quad (3.34)$$

となる．式(3.32)，(3.33)および(3.34)において， ρ_n および ρ_c はそれぞれ表面材と心材の平均密度であり， $(\dot{})$ は時間微分を表す．式(3.14)を代入した式(3.1)を式(3.32)～(3.34)に代入し， z 方向に積分すると，サンドイッチ円錐殻の最大運動エネルギー T は変位の最大振幅を用いて次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} T = \frac{\omega^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} [& I_1 (U_0^2 + V_0^2 + W_0^2) \\ & + I_2 t_c \{ U_0 (\bar{\beta}_x - \bar{\psi}_x) + V_0 (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \} \\ & + I_3 (U_0 \bar{\beta}_x + V_0 \bar{\beta}_\theta) \\ & + I_4 t_c \{ \bar{\beta}_x (\bar{\beta}_x - \bar{\psi}_x) + \bar{\beta}_\theta (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \} \\ & + I_5 (\bar{\beta}_x^2 + \bar{\beta}_\theta^2) \\ & + I_6 (t_c^2/4) \{ (\bar{\beta}_x - \bar{\psi}_x)^2 + (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta)^2 \} \\ & + I_7 (\bar{\psi}_x^2 + \bar{\psi}_\theta^2)] r dx d\theta \end{aligned} \quad (3.35)$$

上式において, I_i ($i=1,2,3,\dots,7$) は慣性量であり

$$\begin{aligned}
I_1 &= \rho_1 t_1 + \rho_2 t_2 + \rho_c t_c \\
I_2 &= \rho_1 t_1 - \rho_2 t_2 \\
I_3 &= -\rho_1 t_1 (t_1 + t_c) + \rho_2 t_2 (t_2 + t_c) \\
I_4 &= -\rho_1 t_1 (t_1 + t_c)/2 - \rho_2 t_2 (t_2 + t_c)/2 \\
I_5 &= \rho_1 (t_c^2 t_1/4 + t_c t_1^2/2 + t_1^3/3) + \rho_2 (t_c^2 t_2/4 + t_c t_2^2/2 + t_2^3/3) \\
I_6 &= \rho_1 t_1 + \rho_2 t_2 \\
I_7 &= \rho_c t_c^3/12
\end{aligned} \tag{3.36}$$

と与えられる.

つぎに, 解析を簡単化するために, サンドイッチ円錐殻の最大ひずみエネルギー U と最大運動エネルギー T に次の無次元量を導入する. ただし, $H = t_1 + t_2 + t_c$ である.

$$\text{(無次元座標)} \quad \xi = x/(L/2)$$

$$\begin{aligned} \text{(寸法比)} \quad h &= R/L, \quad \alpha = H/L, \quad l = H/R, \\ \mu_1 &= t_1/R, \quad \mu_2 = t_2/R, \quad \mu_3 = t_c/R \end{aligned}$$

$$\text{(無次元変位)} \quad \bar{u} = U_0/H, \quad \bar{v} = V_0/H, \quad \bar{w} = W_0/H$$

$$\text{(密度比)} \quad \lambda_2 = \rho_2/\rho_1, \quad \lambda_3 = \rho_c/\rho_1 \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} \text{(無次元剛性)} \quad (\bar{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}^{(c)}, \bar{C}_{ij}) &= (A_{ij}, A_{ij}^{(c)}, C_{ij})/(E_1 L) \\ (\bar{B}_{ij}, \bar{E}_{ij}) &= (B_{ij}, E_{ij})/(E_1 L^2) \\ (\bar{D}_{ij}, \bar{D}_{ij}^{(c)}) &= (D_{ij}, D_{ij}^{(c)})/(E_1 L^3) \\ &\quad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6) \end{aligned}$$

$$\text{(無次元振動数)} \quad \Lambda = \omega R \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}$$

以上の無次元量を式(3.23), (3.29)に代入すると各ひずみベクトルは以下のようなになる.

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon_1\} &= 2\alpha \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \bar{u} \sin \phi + \bar{w} \cos \phi \right), \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} - \bar{v} \cos \phi \right) - \frac{\bar{\beta}_\theta}{2\alpha}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \frac{\bar{\beta}_x}{2\alpha}, \frac{1}{\bar{r}} \left(-\bar{v} \sin \phi + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right\}^T \\
&= 2\alpha \{ \bar{\varepsilon}_1 \} \\
\{\varepsilon_2\} &= 2\alpha \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \bar{u} \sin \phi + \bar{w} \cos \phi \right), \frac{1}{\bar{r}} \left(-\bar{v} \sin \phi + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right\}^T \\
&= 2\alpha \{ \bar{\varepsilon}_2 \} \\
\{\varepsilon_3\} &= 2\alpha \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \bar{u} \sin \phi + \bar{w} \cos \phi \right), \frac{1}{\bar{r}} \left(-\bar{v} \sin \phi + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} - \bar{v} \cos \phi \right) - \frac{\bar{\beta}_\theta}{2\alpha} \right\}^T \\
&= 2\alpha \{ \bar{\varepsilon}_3 \} \\
\{\kappa_1\} &= -\frac{2}{L} \left\{ \frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial \xi}, \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} + \bar{\beta}_x \sin \phi \right), \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial \theta} - \bar{\beta}_\theta \sin \phi \right) + \frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \xi} \right\}^T \\
&= -\frac{2}{L} \{ \bar{\kappa}_1 \} \\
\{\kappa_2\} &= -\frac{2}{L} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \xi} \right), \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \theta} + (\bar{\beta}_x - \bar{\psi}_x) \sin \phi \right), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\bar{r}} (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \cos \phi, \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \theta} - (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \sin \phi \right) + \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \xi} \right) \right\}^T \\
&= -\frac{2}{L} \{ \bar{\kappa}_2 \} \\
\{\kappa_3\} &= -\frac{2}{L} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \xi} \right), \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \theta} + (\bar{\beta}_x - \bar{\psi}_x) \sin \phi \right), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_x}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \theta} - (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \sin \phi \right) + \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \xi} \right) \right\}^T \\
&= -\frac{2}{L} \{ \bar{\kappa}_3 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon_c\} &= 2\alpha \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}, \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \bar{u} \sin \phi + \bar{w} \cos \phi \right), \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} - \bar{v} \cos \phi \right) - \frac{\bar{\psi}_\theta}{2\alpha} \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} - \frac{\bar{\psi}_x}{2\alpha}, \frac{1}{\bar{r}} \left(-\bar{v} \sin \phi + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right\}^\top \\
&= 2\alpha \{ \bar{\varepsilon}_c \} \\
\{\kappa_c\} &= -\frac{2}{L} \left\{ \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \xi}, \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \theta} + \bar{\psi}_x \sin \phi \right), \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \theta} - \bar{\psi}_\theta \sin \phi \right) + \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \xi} \right\}^\top \\
&= -\frac{2}{L} \{ \bar{\kappa}_c \} \tag{3.38}
\end{aligned}$$

ただし

$$\bar{r} = 2h + (\xi + 1) \sin \phi \tag{3.39}$$

である。つぎに、式(3.37)の無次元量と式(3.38)を式(3.20)および(3.27)に代入すると、円錐殻の最大ひずみエネルギー U は次のように書き直せる。

$$\begin{aligned}
U &= \frac{E_1 L^3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\alpha^2 \{ \bar{\varepsilon}_1 \}^\top [\bar{A}_1] \{ \bar{\varepsilon}_1 \} - 2\alpha \{ \bar{\varepsilon}_2 \}^\top [\bar{B}] \{ \bar{\kappa}_1 \} \right. \\
&\quad + \{ \bar{\kappa}_1 \}^\top [\bar{D}] \{ \bar{\kappa}_1 \} + 2\alpha h \mu_3 \{ \bar{\varepsilon}_3 \}^\top [\bar{C}] \{ \bar{\kappa}_2 \} \\
&\quad - 2h \mu_3 \{ \bar{\kappa}_1 \}^\top [\bar{E}] \{ \bar{\kappa}_1 \} + h^2 \mu_3^2 \{ \bar{\kappa}_2 \}^\top [\bar{A}_2] \{ \bar{\kappa}_2 \} \\
&\quad \left. + \alpha^2 \{ \bar{\varepsilon}_c \}^\top [\bar{A}^{(c)}] \{ \bar{\varepsilon}_c \} + \{ \bar{\kappa}_c \}^\top [\bar{D}^{(c)}] \{ \bar{\kappa}_c \} \right] \bar{r} d\xi d\theta \tag{3.40}
\end{aligned}$$

ここで、各剛性マトリックスは式(3.21)および式(3.28)を式(3.37)の定義に従い無次元化したものである。

式(3.37)の無次元量を式(3.35)に代入すると、円錐殻の最大運動エネルギー T は次のように書き直せる。

$$\begin{aligned}
T &= \frac{E_1 L^3}{2} \Lambda^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left[I_1 l \alpha (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) \right. \\
&\quad + \bar{I}_2 h l \mu_3 \{ \bar{u} (\bar{\beta}_x - \bar{\psi}_x) + \bar{v} (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \} \\
&\quad + \bar{I}_3 h l (\bar{u} \bar{\beta}_x + \bar{v} \bar{\beta}_\theta) \\
&\quad + \bar{I}_4 h \mu_3 \{ \bar{\beta}_x (\bar{\beta}_x - \bar{\psi}_x) + \bar{\beta}_\theta (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \} \\
&\quad + \bar{I}_5 h (\bar{\beta}_x^2 + \bar{\beta}_\theta^2) \\
&\quad + \bar{I}_6 h \mu_3^2 \{ (\bar{\beta}_x - \bar{\psi}_x)^2 + (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta)^2 \} \\
&\quad \left. + \bar{I}_7 h (\bar{\psi}_x^2 + \bar{\psi}_\theta^2) \right] \bar{r} d\xi d\theta \tag{3.41}
\end{aligned}$$

ここで、 \bar{I}_i ($i=1,2,\dots,7$) は無次元化された慣性量であり、それぞれ

$$\begin{aligned}
\bar{I}_1 &= (\mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3) / 4 \\
\bar{I}_2 &= (\mu_1 - \lambda_2 \mu_2) / 4 \\
\bar{I}_3 &= -\mu_1(\mu_1 + \mu_3) / 4 + \lambda_2 \mu_2(\mu_2 + \mu_3) / 4 \\
\bar{I}_4 &= -\mu_1(\mu_1 + \mu_3) / 8 - \lambda_2 \mu_2(\mu_2 + \mu_3) / 8 \\
\bar{I}_5 &= \mu_3^2(\mu_1 + \lambda_2 \mu_2) / 16 + \mu_3(\mu_1^2 + \lambda_2 \mu_2^2) / 8 + (\mu_1^3 + \lambda_2 \mu_2^3) / 12 \\
\bar{I}_6 &= (\mu_1 + \lambda_2 \mu_2) / 16 \\
\bar{I}_7 &= \lambda_3 \mu_3^3 / 48
\end{aligned} \tag{3.42}$$

となる。

3.2.5 変位関数と振動数方程式

円錐殻の両端における幾何学的境界条件を満足する変位関数を試験関数 $X_{ni}(\xi)$ と三角関数の積による級数により次のように仮定する。

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\xi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} U_i X_{1i}(\xi) \cos N\theta \\
\bar{v}(\xi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} V_i X_{2i}(\xi) \sin N\theta \\
\bar{w}(\xi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} W_i X_{3i}(\xi) \cos N\theta \\
\bar{\psi}_x(\xi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} \psi_{xi} X_{4i}(\xi) \cos N\theta \\
\bar{\psi}_\theta(\xi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} \psi_{\theta i} X_{5i}(\xi) \sin N\theta \\
\bar{\beta}_x(\xi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} \beta_{xi} X_{6i}(\xi) \cos N\theta \\
\bar{\beta}_\theta(\xi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} \beta_{\theta i} X_{7i}(\xi) \sin N\theta
\end{aligned} \tag{3.43}$$

ここで、上式中の U_i , V_i , W_i , ψ_{xi} , $\psi_{\theta i}$, β_{xi} , $\beta_{\theta i}$ は未定係数であり、 N は周方向波数を表す。また、試験関数 $X_{ni}(\xi)$ は選択する境界条件により決定される。本解析では、円錐殻の境界条件を両端単純支持、両端固定および固定-自由の3通りとし、各々の境界条件において使用する試験関数を次のように使い分ける。

(a) 両端単純支持

拘束条件： $\bar{v} = \bar{w} = \bar{\psi}_\theta = \bar{\beta}_\theta = 0$ at $\xi = \pm 1$

$$\begin{aligned} X_{1i}(\xi) &= X_{4i}(\xi) = X_{6i}(\xi) = \xi^i \\ X_{2i}(\xi) &= X_{3i}(\xi) = X_{5i}(\xi) = X_{7i}(\xi) = \xi^i(\xi^2 - 1) \end{aligned} \quad (3.44)$$

(b) 両端固定

拘束条件： $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \bar{\psi}_x = \bar{\psi}_\theta = \bar{\beta}_x = \bar{\beta}_\theta = 0$ at $\xi = \pm 1$

$$X_{1i}(\xi) = X_{2i}(\xi) = X_{3i}(\xi) = X_{4i}(\xi) = X_{5i}(\xi) = X_{6i}(\xi) = X_{7i}(\xi) = \xi^i(\xi^2 - 1) \quad (3.45)$$

(b) 固定 ($\xi = -1$) - 自由 ($\xi = 1$)

拘束条件： $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \bar{\psi}_x = \bar{\psi}_\theta = \bar{\beta}_x = \bar{\beta}_\theta = 0$ at $\xi = -1$

$$X_{1i}(\xi) = X_{2i}(\xi) = X_{3i}(\xi) = X_{4i}(\xi) = X_{5i}(\xi) = X_{6i}(\xi) = X_{7i}(\xi) = \xi^i(\xi + 1) \quad (3.46)$$

つぎに、ラグランジュ関数 $L = T - U$ に関する停留条件を用いて、サンドイッチ円錐殻の振動数方程式を誘導する。このために、式(3.43)の変位関数を最大ひずみエネルギー式(3.40)および最大運動エネルギー式(3.41)に代入し、ラグランジュ関数 $L = T - U$ に停留条件

$$\frac{\partial L}{\partial U_m} = \frac{\partial L}{\partial V_m} = \frac{\partial L}{\partial W_m} = \frac{\partial L}{\partial \psi_{xm}} = \frac{\partial L}{\partial \psi_{\theta m}} = \frac{\partial L}{\partial \beta_{xm}} = \frac{\partial L}{\partial \beta_{\theta m}} = 0 \quad (3.47)$$

$$(m = 1, 2, \dots, I)$$

を適用すると、次の振動数方程式が得られる。

$$[[K_i^{(m)}] - \Lambda^2 [M_i^{(m)}]] \left\{ \begin{array}{c} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{\theta i} \\ \beta_{xi} \\ \beta_{\theta i} \end{array} \right\} = 0 \quad (3.48)$$

$$(i, m = 1, 2, \dots, I)$$

減衰を考慮した複素数で各弾性係数を扱う場合、 $[K_i^{(m)}]$ は複素剛性マトリックスとなるため、式(3.48)は複素固有値問題となる。この複素固有値問題の複素固有値として Λ^2 が得られ、 Λ^2 が

$$\Lambda^2 = \text{Re}(\Lambda^2) + j \text{Im}(\Lambda^2) = \text{Re}(\Lambda^2) \left[1 + j \frac{\text{Im}(\Lambda^2)}{\text{Re}(\Lambda^2)} \right], \quad j = \sqrt{-1} \quad (3.49)$$

の形で表されるとき、無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η を次のように再定義する。

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{\text{Re}(\Lambda^2)} \\ \eta &= \frac{\text{Im}(\Lambda^2)}{\text{Re}(\Lambda^2)} \end{aligned} \quad (3.50)$$

ただし、 $\text{Re}(\Lambda^2)$ と $\text{Im}(\Lambda^2)$ はそれぞれ Λ^2 の実部と虚部を表す。また、各固有値に対応する固有ベクトルとして、未定係数によるベクトル $\{U_i \ V_i \ W_i \ \psi_{xi} \ \psi_{\theta i} \ \beta_{xi} \ \beta_{\theta i}\}^T$ が得られ、未定係数を式(3.43)の変位に代入することにより固有振動モードが求められる。

ここで、式(3.48)中の係数マトリックス $[K_i^{(m)}]$ および $[M_i^{(m)}]$ は

$$[K_i^{(m)}] = \begin{bmatrix} Kaa_i^{(m)} & Kab_i^{(m)} & Kac_i^{(m)} & Kad_i^{(m)} & Kae_i^{(m)} & Kaf_i^{(m)} & Kag_i^{(m)} \\ & Kbb_i^{(m)} & Kbc_i^{(m)} & Kbd_i^{(m)} & Kbe_i^{(m)} & Kbf_i^{(m)} & Kbg_i^{(m)} \\ & & Kcc_i^{(m)} & Kcd_i^{(m)} & Kce_i^{(m)} & Kcf_i^{(m)} & Kcg_i^{(m)} \\ & & & Kdd_i^{(m)} & Kde_i^{(m)} & Kdf_i^{(m)} & Kdg_i^{(m)} \\ & & & & Kee_i^{(m)} & Kef_i^{(m)} & Keg_i^{(m)} \\ \text{Sym.} & & & & & Kff_i^{(m)} & Kfg_i^{(m)} \\ & & & & & & Kgg_i^{(m)} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$[M_i^{(m)}] = \begin{bmatrix} Maa_i^{(m)} & Mab_i^{(m)} & Mac_i^{(m)} & Mad_i^{(m)} & Mae_i^{(m)} & Maf_i^{(m)} & Mag_i^{(m)} \\ & Mbb_i^{(m)} & Mbc_i^{(m)} & Mbd_i^{(m)} & Mbe_i^{(m)} & Mbf_i^{(m)} & Mbg_i^{(m)} \\ & & Mcc_i^{(m)} & Mcd_i^{(m)} & Mce_i^{(m)} & Mcf_i^{(m)} & Mcg_i^{(m)} \\ & & & Mdd_i^{(m)} & Mde_i^{(m)} & Mdf_i^{(m)} & Mdg_i^{(m)} \\ & & & & Mee_i^{(m)} & Mef_i^{(m)} & Meg_i^{(m)} \\ \text{Sym.} & & & & & Mff_i^{(m)} & Mfg_i^{(m)} \\ & & & & & & Mgg_i^{(m)} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

であり，マトリックス $[K_i^{(m)}]$ の各要素は次のようになる．

$$\begin{aligned}
Kaa_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& \alpha^2 \bar{r} (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{11}^{(c)}) X'_{1i} X'_{1m} Y_u^2 \\
& + (\alpha^2 / \bar{r}) (\bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^{(c)}) (\sin^2 \phi) X_{1i} X_{1m} Y_u^2 \\
& + (\alpha^2 / \bar{r}) (\bar{A}_{66} + \bar{A}_{66}^{(c)}) X_{1i} X_{1m} Y_u'^2 \\
& + \alpha^2 (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{12}^{(c)}) \sin \phi X_{1i} X'_{1m} Y_u^2 \\
& + \alpha^2 (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{12}^{(c)}) \sin \phi X'_{1i} X_{1m} Y_u^2] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kab_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& (\alpha^2 / \bar{r}) (\bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^{(c)}) \sin \phi X_{2i} X_{1m} Y'_v Y_u \\
& - (\alpha^2 / \bar{r}) (\bar{A}_{66} + \bar{A}_{66}^{(c)}) \sin \phi X_{2i} X_{1m} Y_v Y'_u \\
& + \alpha^2 (\bar{A}_{66} + \bar{A}_{66}^{(c)}) X'_{2i} X_{1m} Y_v Y'_u \\
& + \alpha^2 (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{12}^{(c)}) X_{2i} X'_{1m} Y'_v Y_u] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kac_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& (\alpha^2 / \bar{r}) (\bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^{(c)}) \sin \phi \cos \phi X_{3i} X_{1m} Y_w Y_u \\
& + \alpha^2 (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{12}^{(c)}) \cos \phi X_{3i} X'_{1m} Y_w Y_u] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kad_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& -\alpha h \mu_3 \bar{r} \bar{C}_{11} X'_{4i} X'_{1m} Y_{\psi x} Y_u \\
& - (\alpha h \mu_3 / \bar{r}) \bar{C}_{22} (\sin^2 \phi) X_{4i} X_{1m} Y_{\psi x} Y_u \\
& - (\alpha h \mu_3 / \bar{r}) \bar{C}_{66} X_{4i} X_{1m} Y'_{\psi x} Y'_u \\
& - \alpha h \mu_3 \bar{C}_{12} \sin \phi X_{4i} X'_{1m} Y_{\psi x} Y_u \\
& - \alpha h \mu_3 \bar{C}_{12} \sin \phi X'_{4i} X_{1m} Y_{\psi x} Y_u] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kae_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& -(\alpha h \mu_3 / \bar{r}) \bar{C}_{22} \sin \phi X_{5i} X_{1m} Y'_{\psi \theta} Y_u \\
& + (\alpha h \mu_3 / \bar{r}) \bar{C}_{66} \sin \phi X_{5i} X_{1m} Y_{\psi \theta} Y'_u \\
& - \alpha h \mu_3 \bar{C}_{66} X'_{5i} X_{1m} Y_{\psi \theta} Y'_u \\
& - \alpha h \mu_3 \bar{C}_{12} X_{5i} X'_{1m} Y'_{\psi \theta} Y_u] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kaf_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& \alpha \bar{r} (-\bar{B}_{11} + h \mu_3 \bar{C}_{11}) X'_{6i} X'_{1m} Y_{\beta x} Y_u \\
& + (\alpha / \bar{r}) (-\bar{B}_{22} + h \mu_3 \bar{C}_{22}) (\sin^2 \phi) X_{6i} X_{1m} Y_{\beta x} Y_u \\
& + (\alpha / \bar{r}) (-\bar{B}_{66} + h \mu_3 \bar{C}_{66}) X_{6i} X_{1m} Y'_{\beta x} Y'_u \\
& + \alpha (-\bar{B}_{12} + h \mu_3 \bar{C}_{12}) \sin \phi X_{6i} X'_{1m} Y_{\beta x} Y_u \\
& + \alpha (-\bar{B}_{12} + h \mu_3 \bar{C}_{12}) \sin \phi X'_{6i} X_{1m} Y_{\beta x} Y_u] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$Kag_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [(\alpha/\bar{r})(-\bar{B}_{22} + h\mu_3 \bar{C}_{22}) \sin\phi X_{7i} X_{1m} Y'_{\beta\theta} Y_u \\ - (\alpha/\bar{r})(-\bar{B}_{66} + h\mu_3 \bar{C}_{66}) \sin\phi X_{7i} X_{1m} Y_{\beta\theta} Y'_u \\ + \alpha(-\bar{B}_{66} + h\mu_3 \bar{C}_{66}) X'_{7i} X_{1m} Y_{\beta\theta} Y'_u \\ + \alpha(-\bar{B}_{12} + h\mu_3 \bar{C}_{12}) X_{7i} X'_{1m} Y'_{\beta\theta} Y_u] d\xi d\theta$$

$$Kbb_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [(\alpha^2/\bar{r})(\bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^{(c)}) X_{2i} X_{2m} Y_v'^2 \\ + (\alpha^2/\bar{r})(\bar{A}_{66} + \bar{A}_{66}^{(c)}) (\sin^2\phi) X_{2i} X_{2m} Y_v^2 \\ - \alpha^2(\bar{A}_{66} + \bar{A}_{66}^{(c)}) \sin\phi X_{2i} X'_{2m} Y_v^2 \\ - \alpha^2(\bar{A}_{66} + \bar{A}_{66}^{(c)}) \sin\phi X'_{2i} X_{2m} Y_v^2 \\ + \alpha^2 \bar{r} (\bar{A}_{66} + \bar{A}_{66}^{(c)}) X'_{2i} X'_{2m} Y_v^2 \\ + (\alpha^2/\bar{r})(k_f \bar{A}_{44} + k_c \bar{A}_{44}^{(c)}) X_{2i} X_{2m} Y_v^2] d\xi d\theta$$

$$Kbc_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [(\alpha^2/\bar{r})(\bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^{(c)}) \cos\phi X_{3i} X_{2m} Y_w Y'_v \\ - (\alpha^2/\bar{r})(k_f \bar{A}_{44} + k_c \bar{A}_{44}^{(c)}) \cos\phi X_{3i} X_{2m} Y'_w Y_v] d\xi d\theta$$

$$Kbd_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [-(\alpha h\mu_3/\bar{r}) \bar{C}_{22} \sin\phi X_{4i} X_{2m} Y_{\psi x} Y'_v \\ + (\alpha h\mu_3/\bar{r}) \bar{C}_{66} \sin\phi X_{4i} X_{2m} Y'_{\psi x} Y_v \\ - \alpha h\mu_3 \bar{C}_{66} X_{4i} X'_{2m} Y'_{\psi x} Y_v \\ - \alpha h\mu_3 \bar{C}_{12} X'_{4i} X_{2m} Y_{\psi x} Y'_v] d\xi d\theta$$

$$Kbe_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [-(\alpha h\mu_3/\bar{r}) \bar{C}_{22} X_{5i} X_{2m} Y'_{\psi\theta} Y'_v \\ - (\alpha h\mu_3/\bar{r}) \bar{C}_{66} (\sin^2\phi) X_{5i} X_{2m} Y_{\psi\theta} Y_v \\ + \alpha h\mu_3 \bar{C}_{66} \sin\phi X_{5i} X'_{2m} Y_{\psi\theta} Y_v \\ + \alpha h\mu_3 \bar{C}_{66} \sin\phi X'_{5i} X_{2m} Y_{\psi\theta} Y_v \\ - \alpha h\mu_3 \bar{r} \bar{C}_{66} \sin\phi X'_{5i} X'_{2m} Y_{\psi\theta} Y_v \\ - k_f (\alpha h\mu_3/\bar{r}) \bar{C}_{44} (\cos^2\phi) X_{5i} X_{2m} Y_{\psi\theta} Y_v \\ + (k_c/2) \alpha \bar{A}_{44}^{(c)} \cos\phi X_{5i} X_{2m} Y_{\psi\theta} Y_v] d\xi d\theta$$

$$Kbf_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [(\alpha/\bar{r})(-\bar{B}_{22} + h\mu_3 \bar{C}_{22}) \sin\phi X_{6i} X_{2m} Y_{\beta x} Y'_v \\ - (\alpha/\bar{r})(-\bar{B}_{66} + h\mu_3 \bar{C}_{66}) \sin\phi X_{6i} X_{2m} Y'_{\beta x} Y_v \\ + \alpha(-\bar{B}_{66} + h\mu_3 \bar{C}_{66}) X_{6i} X'_{2m} Y'_{\beta x} Y_v \\ + \alpha(-\bar{B}_{12} + h\mu_3 \bar{C}_{12}) X'_{6i} X_{2m} Y_{\beta x} Y'_v] d\xi d\theta$$

$$\begin{aligned}
Kbg_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& (\alpha/\bar{r})(-\bar{B}_{22} + h\mu_3 \bar{C}_{22}) X_{7i} X_{2m} Y'_{\beta\theta} Y'_v \\
& + (\alpha/\bar{r})(-\bar{B}_{66} + h\mu_3 \bar{C}_{66})(\sin^2 \phi) X_{7i} X_{2m} Y_{\beta\theta} Y_v \\
& - \alpha(-\bar{B}_{66} + h\mu_3 \bar{C}_{66}) \sin \phi X_{7i} X'_{2m} Y_{\beta\theta} Y_v \\
& - \alpha(-\bar{B}_{66} + h\mu_3 \bar{C}_{66}) \sin \phi X'_{7i} X_{2m} Y_{\beta\theta} Y_v \\
& + \alpha \bar{r} (-\bar{B}_{66} + h\mu_3 \bar{C}_{66}) X'_{7i} X'_{2m} Y_{\beta\theta} Y_v \\
& + (k_f/2)\alpha \bar{A}_{44} \cos \phi X_{7i} X_{2m} Y_{\beta\theta} Y_v \\
& + k_f(\alpha h\mu_3/\bar{r})\bar{C}_{44}(\cos^2 \phi) X_{7i} X_{2m} Y_{\beta\theta} Y_v] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kcc_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& (\alpha^2/\bar{r})(\bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^{(c)})(\cos^2 \phi) X_{3i} X_{3m} Y_w^2 \\
& + (\alpha^2/\bar{r})(k_f \bar{A}_{44} + k_c \bar{A}_{44}^{(c)}) X_{3i} X_{3m} Y_w^2 \\
& + \alpha^2 \bar{r} (k_f \bar{A}_{55} + k_c \bar{A}_{55}^{(c)}) X_{3i} X'_{3m} Y_w^2] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kcd_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& -(\alpha h\mu_3/\bar{r})\bar{C}_{22} \sin \phi \cos \phi X_{4i} X_{3m} Y_{\psi x} Y_w \\
& - \alpha h\mu_3 \bar{C}_{12} \cos \phi X'_{4i} X_{3m} Y_{\psi x} Y_w \\
& - (k_c/2)\alpha \bar{A}_{55}^{(c)} X_{4i} X'_{3m} Y_{\psi x} Y_w] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kce_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& -(\alpha h\mu_3/\bar{r})\bar{C}_{22} \cos \phi X_{5i} X_{3m} Y'_{\psi\theta} Y_w \\
& + k_f(\alpha h\mu_3/\bar{r})\bar{C}_{44} \cos \phi X_{5i} X_{3m} Y_{\psi\theta} Y'_w \\
& - (k_c/2)\alpha \bar{A}_{44}^{(c)} X_{5i} X_{3m} Y_{\psi\theta} Y'_w] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kcf_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& (\alpha/\bar{r})(-\bar{B}_{22} + h\mu_3 \bar{C}_{22}) \sin \phi \cos \phi X_{6i} X_{3m} Y_{\beta x} Y_w \\
& + \alpha(-\bar{B}_{12} + h\mu_3 \bar{C}_{12}) \cos \phi X'_{6i} X_{3m} Y_{\beta x} Y_w \\
& - (k_f/2)\alpha \bar{A}_{55} X_{6i} X'_{3m} Y_{\beta x} Y_w] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kcg_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& (\alpha/\bar{r})(-\bar{B}_{22} + h\mu_3 \bar{C}_{22}) \cos \phi X_{7i} X_{3m} Y'_{\beta\theta} Y_w \\
& - k_f(\alpha h\mu_3/\bar{r})\bar{C}_{44} \cos \phi X_{7i} X_{3m} Y_{\beta\theta} Y'_w \\
& - (k_f/2)\alpha \bar{A}_{44} X_{7i} X_{3m} Y_{\beta\theta} Y'_w] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kdd_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& \bar{r} \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{11} + \bar{D}_{11}^{(c)} \} X'_{4i} X'_{4m} Y_{\psi x}^2 \\
& + (1/\bar{r}) \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{22} + \bar{D}_{22}^{(c)} \} \sin^2 \phi X_{4i} X_{4m} Y_{\psi x}^2 \\
& + (1/\bar{r}) \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{66} + \bar{D}_{66}^{(c)} \} X_{4i} X_{4m} Y_{\psi x}^2 \\
& + \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{12} + \bar{D}_{12}^{(c)} \} \sin \phi X'_{4i} X_{4m} Y_{\psi x}^2 \\
& + \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{12} + \bar{D}_{12}^{(c)} \} \sin \phi X_{4i} X'_{4m} Y_{\psi x}^2 \\
& + (k_c/4) \bar{r} \bar{A}_{55}^{(c)} X_{4i} X_{4m} Y_{\psi x}^2] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kde_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& (1/\bar{r}) \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{22} + \bar{D}_{22}^{(c)} \} \sin \phi X_{5i} X_{4m} Y'_{\psi\theta} Y_{\psi x} \\
& - (1/\bar{r}) \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{66} + \bar{D}_{66}^{(c)} \} \sin \phi X_{5i} X_{4m} Y_{\psi\theta} Y'_{\psi x} \\
& + \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{66} + \bar{D}_{66}^{(c)} \} X'_{5i} X_{4m} Y_{\psi\theta} Y'_{\psi x} \\
& + \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{12} + \bar{D}_{12}^{(c)} \} X_{5i} X'_{4m} Y'_{\psi\theta} Y_{\psi x}] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kdf_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& \bar{r} h \mu_3 \{ \bar{E}_{11} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{11} \} X'_{6i} X'_{4m} Y_{\beta x} Y_{\psi x} \\
& + (1/\bar{r}) h \mu_3 \{ \bar{E}_{22} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{22} \} \sin^2 \phi X_{6i} X_{4m} Y_{\beta x} Y_{\psi x} \\
& + (1/\bar{r}) h \mu_3 \{ \bar{E}_{66} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{66} \} X_{6i} X_{4m} Y'_{\beta x} Y'_{\psi x} \\
& + h \mu_3 \{ \bar{E}_{12} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{12} \} \sin \phi X'_{6i} X_{4m} Y_{\beta x} Y_{\psi x} \\
& + h \mu_3 \{ \bar{E}_{12} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{12} \} \sin \phi X_{6i} X'_{4m} Y_{\beta x} Y_{\psi x}] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kdg_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& (1/\bar{r}) h \mu_3 \{ \bar{E}_{22} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{22} \} \sin \phi X_{7i} X_{4m} Y'_{\beta\theta} Y_{\psi x} \\
& - (1/\bar{r}) h \mu_3 \{ \bar{E}_{66} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{66} \} \sin \phi X_{7i} X_{4m} Y_{\beta\theta} Y'_{\psi x} \\
& + h \mu_3 \{ \bar{E}_{66} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{66} \} X'_{7i} X_{4m} Y_{\beta\theta} Y'_{\psi x} \\
& + h \mu_3 \{ \bar{E}_{12} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{12} \} X_{7i} X'_{4m} Y'_{\beta\theta} Y_{\psi x}] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kee_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& (1/\bar{r}) \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{22} + \bar{D}_{22}^{(c)} \} X_{5i} X_{5m} Y_{\psi\theta}^2 \\
& + (1/\bar{r}) \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{66} + \bar{D}_{66}^{(c)} \} \sin^2 \phi X_{5i} X_{5m} Y_{\psi\theta}^2 \\
& - \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{66} + \bar{D}_{66}^{(c)} \} \sin \phi X_{5i} X'_{5m} Y_{\psi\theta}^2 \\
& - \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{66} + \bar{D}_{66}^{(c)} \} \sin \phi X'_{5i} X_{5m} Y_{\psi\theta}^2 \\
& + \bar{r} \{ (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{66} + \bar{D}_{66}^{(c)} \} X'_{5i} X'_{5m} Y_{\psi\theta}^2 \\
& + k_f (1/\bar{r}) (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{44} \cos^2 \phi X_{5i} X_{5m} Y_{\psi x}^2 \\
& + \bar{r} (k_c/4) \bar{A}_{44}^{(c)} X_{5i} X_{5m} Y_{\psi x}^2] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kef_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& (1/\bar{r}) h \mu_3 \{ \bar{E}_{22} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{22} \} \sin \phi X_{6i} X_{5m} Y_{\beta x} Y'_{\psi\theta} \\
& - (1/\bar{r}) h \mu_3 \{ \bar{E}_{66} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{66} \} \sin \phi X_{6i} X_{5m} Y'_{\beta x} Y_{\psi\theta} \\
& + h \mu_3 \{ \bar{E}_{66} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{66} \} X_{6i} X'_{5m} Y'_{\beta x} Y_{\psi\theta} \\
& + h \mu_3 \{ \bar{E}_{12} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{12} \} X'_{6i} X_{5m} Y_{\beta x} Y'_{\psi\theta}] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Keg_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [& (1/\bar{r}) h \mu_3 \{ \bar{E}_{22} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{22} \} X_{7i} X_{5m} Y'_{\beta\theta} Y'_{\psi\theta} \\
& + (1/\bar{r}) h \mu_3 \{ \bar{E}_{66} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{66} \} \sin^2 \phi X_{7i} X_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta} \\
& - h \mu_3 \{ \bar{E}_{66} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{66} \} \sin \phi X_{7i} X'_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta} \\
& - h \mu_3 \{ \bar{E}_{66} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{66} \} \sin \phi X'_{7i} X_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta} \\
& + \bar{r} h \mu_3 \{ \bar{E}_{66} - (h \mu_3/4) \bar{A}_{66} \} X'_{7i} X'_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta} \\
& - k_f (1/\bar{r}) (h^2 \mu_3^2/4) \bar{A}_{44} \cos^2 \phi X_{7i} X_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta} \\
& - (k_f/2) h \mu_3 \bar{C}_{44} \cos \phi X_{7i} X_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta}] d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kff_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [\bar{r} \{ \bar{D}_{11} - 2h\mu_3 \bar{E}_{11} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{11} \} X'_{6i} X'_{6m} Y_{\beta x}^2 \\
&\quad + (1/\bar{r}) \{ \bar{D}_{22} - 2h\mu_3 \bar{E}_{22} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{22} \} \sin^2 \phi X_{6i} X_{6m} Y_{\beta x}^2 \\
&\quad + (1/\bar{r}) \{ \bar{D}_{66} - 2h\mu_3 \bar{E}_{66} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{66} \} X_{6i} X_{6m} Y_{\beta x}^2 \\
&\quad + \{ \bar{D}_{12} - 2h\mu_3 \bar{E}_{12} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{12} \} \sin \phi X'_{6i} X'_{6m} Y_{\beta x}^2 \\
&\quad + \{ \bar{D}_{12} - 2h\mu_3 \bar{E}_{12} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{12} \} \sin \phi X_{6i} X'_{6m} Y_{\beta x}^2 \\
&\quad + (k_f / 4) \bar{r} \bar{A}_{55} X_{6i} X_{6m} Y_{\beta x}^2] d\xi d\theta \\
Kfg_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [(1/\bar{r}) \{ \bar{D}_{22} - 2h\mu_3 \bar{E}_{22} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{22} \} \sin \phi X_{7i} X_{6m} Y_{\beta \theta} Y_{\beta x} \\
&\quad - (1/\bar{r}) \{ \bar{D}_{66} - 2h\mu_3 \bar{E}_{66} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{66} \} \sin \phi X_{7i} X_{6m} Y_{\beta \theta} Y'_{\beta x} \\
&\quad + \{ \bar{D}_{66} - 2h\mu_3 \bar{E}_{66} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{66} \} X'_{7i} X_{6m} Y_{\beta \theta} Y'_{\beta x} \\
&\quad + \{ \bar{D}_{12} - 2h\mu_3 \bar{E}_{12} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{12} \} X_{7i} X'_{6m} Y'_{\beta \theta} Y_{\beta x}] d\xi d\theta \\
Kgg_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 [(1/\bar{r}) \{ \bar{D}_{22} - 2h\mu_3 \bar{E}_{22} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{22} \} X_{7i} X_{7m} Y_{\beta \theta}^2 \\
&\quad + (1/\bar{r}) \{ \bar{D}_{66} - 2h\mu_3 \bar{E}_{66} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{66} \} \sin^2 \phi X_{7i} X_{7m} Y_{\beta \theta}^2 \\
&\quad - \{ \bar{D}_{66} - 2h\mu_3 \bar{E}_{66} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{66} \} \sin \phi X_{7i} X'_{7m} Y_{\beta \theta}^2 \\
&\quad - \{ \bar{D}_{66} - 2h\mu_3 \bar{E}_{66} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{66} \} \sin \phi X'_{7i} X_{7m} Y_{\beta \theta}^2 \\
&\quad + \bar{r} \{ \bar{D}_{66} - 2h\mu_3 \bar{E}_{66} + (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{66} \} X'_{7i} X'_{7m} Y_{\beta \theta}^2 \\
&\quad + k_f (1/\bar{r}) (h^2 \mu_3^2 / 4) \bar{A}_{44} \cos^2 \phi X_{7i} X_{7m} Y_{\beta \theta}^2 \\
&\quad + \bar{r} (k_f / 4) \bar{A}_{44} X_{7i} X_{7m} Y_{\beta \theta}^2 \\
&\quad + k_f h \mu_3 \bar{C}_{44} \cos \phi X_{7i} X_{7m} Y_{\beta \theta}^2] d\xi d\theta
\end{aligned} \tag{3.53}$$

マトリックス $[M_i^{(m)}]$ の各要素は次のようになる。

$$\begin{aligned}
Maa_i^{(m)} &= \bar{I}_1 l \alpha \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{1i} X_{1m} Y_u^2 d\xi d\theta \\
Mab_i^{(m)} &= 0 \\
Mac_i^{(m)} &= 0 \\
Mad_i^{(m)} &= -(\bar{I}_2 / 2) h l \mu_3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{4i} X_{1m} Y_{\psi x} Y_u d\xi d\theta \\
Mae_i^{(m)} &= 0 \\
Maf_i^{(m)} &= (h l / 2) (\bar{I}_2 \mu_3 + \bar{I}_3) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{6i} X_{1m} Y_{\beta x} Y_u d\xi d\theta \\
Mag_i^{(m)} &= 0 \\
Mbb_i^{(m)} &= \bar{I}_1 l \alpha \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{2i} X_{2m} Y_v^2 d\xi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Mbc_i^{(m)} &= 0 \\
Mbd_i^{(m)} &= 0 \\
Mbe_i^{(m)} &= -(\bar{I}_2/2)hl\mu_3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{5i} X_{2m} Y_{\psi\theta} Y_\nu d\xi d\theta \\
Mbf_i^{(m)} &= 0 \\
Mbg_i^{(m)} &= (hl/2)(\bar{I}_2\mu_3 + \bar{I}_3) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{7i} X_{2m} Y_{\beta\theta} Y_\nu d\xi d\theta \\
Mcc_i^{(m)} &= \bar{I}_1 l\alpha \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{3i} X_{3m} Y_w^2 d\xi d\theta \\
Mcd_i^{(m)} &= 0 \\
Mce_i^{(m)} &= 0 \\
Mcf_i^{(m)} &= 0 \\
Mcg_i^{(m)} &= 0 \\
Mdd_i^{(m)} &= l(\mu_3^2 \bar{I}_6 + \bar{I}_7) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{4i} X_{4m} Y_{\psi x}^2 d\xi d\theta \\
Mde_i^{(m)} &= 0 \\
Mdf_i^{(m)} &= -l\mu_3 \{(\bar{I}_4/2) + \mu_3 \bar{I}_6\} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{6i} X_{4m} Y_{\beta x} Y_{\psi x} d\xi d\theta \\
Mdg_i^{(m)} &= 0 \\
Mee_i^{(m)} &= l(\mu_3^2 \bar{I}_6 + \bar{I}_7) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{5i} X_{5m} Y_{\psi\theta}^2 d\xi d\theta \\
Mef_i^{(m)} &= 0 \\
Meg_i^{(m)} &= -l\mu_3 \{(\bar{I}_4/2) + \mu_3 \bar{I}_6\} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{6i} X_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta} d\xi d\theta \\
Mff_i^{(m)} &= l(\mu_3 \bar{I}_4 + \bar{I}_5 + \mu_3^2 \bar{I}_6) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{6i} X_{6m} Y_{\beta x}^2 d\xi d\theta \\
Mfg_i^{(m)} &= 0 \\
Mgg_i^{(m)} &= l(\mu_3 \bar{I}_4 + \bar{I}_5 + \mu_3^2 \bar{I}_6) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r} X_{7i} X_{7m} Y_{\beta\theta}^2 d\xi d\theta
\end{aligned} \tag{3.54}$$

式(3.53)および(3.54)において

$$\begin{aligned}
Y_u &= Y_w = Y_{\psi x} = Y_{\beta x} = \cos N\theta \\
Y_\nu &= Y_{\psi\theta} = Y_{\beta\theta} = \sin N\theta
\end{aligned} \tag{3.55}$$

であり, (')は

$$X' = \frac{\partial X}{\partial \xi}, \quad Y' = \frac{\partial Y}{\partial \theta} \tag{3.56}$$

を表す. ξ に関する積分はGauss-Legendreの積分公式によって数値積分している.

3.3 数値計算と考察

積層表面材1および2のラミナはともに一般的なGraphite/Epoxyとし、各材料定数を

$$\begin{aligned} E_1/E_2 = 20, G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = 0.5, \\ G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} (G_{23}/E_2 = 0.37), E_c/E_1 = 10^{-3}, \\ \nu_{12} = 0.28, \nu_{23} = 0.34, \nu_c = 0.4, \rho_1/\rho_2 = 1, \rho_c/\rho_1 = 0.1 \end{aligned} \quad (3.57)$$

とした。ラミナと心材のせん断補正係数 k_f および k_c は $5/6^{(92)}$ を使用した。ラミナの材料損失係数 $^{(95)} \delta_1, \delta_2, \delta_{12}$ および粘弾性心材の材料損失係数 $^{(21)} \delta_c$ は振動数依存性や温度依存性の影響が小さいとし

$$\delta_1 = 0.001, \delta_2 = 0.01, \delta_{12} = 0.015, \delta_c = 0.5 \quad (3.58)$$

なる定数を使用した。

円錐殻の積層形態は(表面材2/心材C/表面材1)とし、 $(\theta_1^{(2)}/\dots/\theta_m^{(2)}/\dots/\theta_{N_2}^{(2)}/C/\theta_1^{(1)}/\dots/\theta_m^{(1)}/\dots/\theta_{N_1}^{(1)})$ のように表す。ただし、 $\theta_m^{(n)}$ は表面材 n ($n=1,2$)の第 m 層目のラミナの繊維角度を表す。また、 s は周方向波数 N に対する s 番目のモード次数を表す。

3.3.1 数値計算精度の検討

リッツ法による解析では、解の精度は変位関数の項数に依存する。表3-1、3-2および表3-3はそれぞれ両端単純支持、両端固定および固定-自由に対する変位関数の項数による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の収束状況を示す。上段が無次元振動数 Ω 、括弧付きの下段がモード損失係数 η の値を示す。厚さ比 H/R を0.01と0.05の2通りとし、周方向波数 $N=2$ 、積層形態を $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ とした。境界条件およびモード次数によって収束状況が異なるが、いずれの境界条件および厚さ比に対しても、項数11までとると無次元振動数に関しては有効数字3~4桁で、モード損失係数に関しては有効数字2~4桁で収束した解が得られる。したがって、以降の計算では項数11を採用した。

表3-1 無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η
の収束状況 (両端単純支持)

【 $L/R=1, t_1/R=t_2/R=t_c/R=H/3R, \phi=30^\circ, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5,$
 $G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_{23}=0.34, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1,$
 $\rho_c/\rho_1=0.1, \delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5,$
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$), $N=2$ 】

H/R	Num.of terms	$s=1$	$s=2$	$s=3$
0.01	9	0.1749 ^a (0.01828) ^b	0.2638 (0.02618)	0.3237 (0.02183)
	10	0.1749 (0.01830)	0.2638 (0.02628)	0.3237 (0.02184)
	11	0.1749 (0.01830)	0.2638 (0.02628)	0.3237 (0.02184)
	12	0.1749 (0.01832)	0.2637 (0.02625)	0.3237 (0.02184)
0.05	9	0.1897 (0.06375)	0.2696 (0.02657)	0.3617 (0.1049)
	10	0.1897 (0.06375)	0.2696 (0.02657)	0.3617 (0.1049)
	11	0.1897 (0.06375)	0.2696 (0.02657)	0.3617 (0.1049)
	12	0.1897 (0.06375)	0.2696 (0.02657)	0.3617 (0.1049)

^a Dimensionless frequency Ω

^b Modal loss factor η

表3-2 無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η
の収束状況 (両端固定)

【 $L/R=1, t_1/R=t_2/R=t_c/R=H/3R, \phi=30^\circ, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5,$
 $G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_{23}=0.34, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1,$
 $\rho_c/\rho_1=0.1, \delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5,$
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$), $N=2$ 】

H/R	Num.of terms	$s=1$	$s=2$	$s=3$
0.01	9	0.1911 ^a (0.03023) ^b	0.3355 (0.04393)	0.4407 (0.07355)
	10	0.1911 (0.03019)	0.3353 (0.04391)	0.4406 (0.07340)
	11	0.1911 (0.03015)	0.3353 (0.04387)	0.4404 (0.07317)
	12	0.1911 (0.03014)	0.3352 (0.04376)	0.4404 (0.07312)
0.05	9	0.2098 (0.08559)	0.3812 (0.1037)	0.5315 (0.1263)
	10	0.2098 (0.08559)	0.3812 (0.1037)	0.5315 (0.1263)
	11	0.2098 (0.08559)	0.3812 (0.1037)	0.5315 (0.1263)
	12	0.2098 (0.08559)	0.3812 (0.1037)	0.5315 (0.1263)

^a Dimensionless frequency Ω

^b Modal loss factor η

表3-3 無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η
の収束状況 (固定-自由)

【 $L/R=1, t_1/R=t_2/R=t_c/R=H/3R, \phi=30^\circ, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5,$
 $G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_{23}=0.34, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1,$
 $\rho_c/\rho_1=0.1, \delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5,$
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$), $N=2$ 】

H/R	Num.of terms	$s=1$	$s=2$	$s=3$
0.01	9	0.07417 ^a	0.2543	0.3706
		(0.02397) ^b	(0.02227)	(0.03021)
	10	0.07415	0.2542	0.3705
		(0.02405)	(0.02233)	(0.03023)
	11	0.07414	0.2542	0.3705
		(0.02405)	(0.02233)	(0.03021)
12	0.07413	0.2542	0.3704	
		(0.02405)	(0.02232)	(0.03019)
0.05	9	0.08100	0.2766	0.4301
		(0.05695)	(0.06496)	(0.1155)
	10	0.08100	0.2766	0.4301
		(0.05694)	(0.06495)	(0.1155)
	11	0.08100	0.2766	0.4301
		(0.05694)	(0.06495)	(0.1155)
12	0.08100	0.2766	0.4301	
		(0.05694)	(0.06495)	(0.1155)

^a Dimensionless frequency Ω

^b Modal loss factor η

つぎに、本解析結果の妥当性を検討するために、他の著者らによる解析および実験結果との比較を示す。

表3-4に両端単純支持された直交異方性サンドイッチ円錐殻の無次元振動数 Ω の比較を示す。Wilkinsら⁽⁴³⁾とKhatriら⁽⁴⁶⁾はガラーキン法で、Rameshら⁽⁴⁹⁾は有限要素法によりそれぞれ解を求めている。本解析結果はいずれの周方向波数 N およびモード次数 s に関してもよく一致している。

表3-5に両端単純支持された等方性サンドイッチ円筒殻($\phi=0^\circ$)の無次元振動数 Ω の比較を示す。Kumarら⁽⁴⁴⁾はリッツ法で、Singhら⁽⁶⁹⁾は有限要素法で、Bertら⁽⁹⁸⁾はガラーキン法で、Weingarten⁽⁹⁹⁾は実験によりそれぞれ固有振動数を求めている。本解析結果はいずれの周方向波数 N およびモード次数 s に関してもよく一致している。

表3-6に等方性円錐殻の基本無次元振動数の比較を示す。Irieら⁽²⁸⁾は伝達マトリックス法により解を求めているが、本解析結果はいずれの周方向波数 N および半頂角においてもよく一致している。このことより、べき級数で仮定した変位関数が精度良く境界条件を満足していることがわかる。

表3-7に両端固定された積層円錐殻の基本無次元振動数の比較を示す。ここでは表面材に対する心材の厚さおよび剛性を 10^{-3} とし、心材の存在を無視できるようにした。Kumarら⁽⁶²⁾とTongら⁽³⁶⁾はリッツ法による近似解を示しているが、本解析結果はいずれの周方向波数 N に関してもよく一致している。

表3-8に積層円筒殻($\phi=0^\circ$)の基本無次元振動数の比較を示す。ここでは、前表と同様に心材の存在を無視できるようにしている。小林と長島⁽³¹⁾はFlügge型の振動数方程式を用いた厳密解を求めているが、本解析結果はいずれの境界条件、積層形態に関してもよく一致している。

表3-9に両端固定された等方性サンドイッチ円錐殻の無次元振動数 Ω とモード損失係数 η ($N=1, s=1$)の比較を示す。RameshとGanesan⁽⁴⁹⁾は有限要素法により解を求めているが、両者はよく一致している。

以上の収束状況と比較から、リッツ法による本解析値は等方性、異方性にかかわらず実用上十分な精度と妥当性を有するものと考えられる。

表3-4 両端単純支持された直交異方性サンドイッチ円錐殻の無次元振動数 Ω の比較【 $L/R = 3.23, H/R = 0.015, t_1/R = t_2/R = 9.35 \times 10^{-4}, t_c/R = 1.34 \times 10^{-2}, \phi = 5.07^\circ, E_1/E_2 = 1, G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = G_{23}/E_2 = 0.27, G_x^c/G_{12} = 0.033, G_x^c/G_y^c = 1.75, \nu_{12} = 0.20, \rho_1/\rho_2 = 1, \rho_c/\rho_1 = 0.013$ 】

s	N	Present	Wilkins et al. ⁽⁴³⁾	Ramesh et al. ⁽⁴⁹⁾	Khatri et al. ⁽⁴⁶⁾
1	0	0.4894	0.4892	0.4894	0.4891
	2	0.1598	0.1622	0.1746	-
	5	0.1339	0.1364	0.1364	-
	10	0.4628	0.4629	-	-
2	0	0.7541	0.7521	0.7960	0.7578
	2	0.3744	0.3742	0.3857	-
	5	0.1930	0.1933	0.2018	-
	10	0.5164	0.5172	-	-
3	0	0.7885	0.7889	-	-
	2	0.5295	0.5294	-	-
	5	0.2833	0.2836	-	-
	10	0.5640	0.5648	-	-

表3-5 両端単純支持された等方性サンドイッチ円筒殻の無次元振動数 Ω の比較【 $L/R = 2.15, H/R = 6.25 \times 10^{-3}, t_1/R = t_2/R = 2.5 \times 10^{-3}, t_c/R = 1.25 \times 10^{-3}, E_1/E_2 = 1, G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = G_{23}/E_2 = 0.38, E_c/E_1 = 42.9, \nu_{12} = \nu_c = 0.30, \rho_1/\rho_2 = 1, \rho_c/\rho_1 = 6.49$ 】

s	N	Present	Kumar et al. ⁽⁴⁴⁾	Singh et al. ⁽⁶⁹⁾	Bert et al. ⁽⁹⁸⁾	Weingarten ⁽⁹⁹⁾
1	3	0.3826	0.3826	0.3882	0.3827	0.3824
	4	0.2419	0.2421	0.2506	0.2418	0.2418
	5	0.1673	0.1677	0.1675	0.1672	0.1672
	8	0.1186	0.1203	0.1186	0.1186	0.1186
2	3	0.9888	0.9887	0.9901	-	-
	4	0.7150	0.7150	0.7161	0.7152	0.7148
	5	0.5292	0.5293	0.5282	-	-
	8	0.2689	0.2696	0.2685	0.2688	0.2688
3	3	1.411	1.411	1.408	-	-
	4	1.132	1.132	1.130	1.132	1.132
	5	0.9059	0.9058	0.9041	0.9060	0.9057
	8	0.4993	0.4997	0.4990	-	-

表3-6 等方性円錐殻の基本無次元振動数の比較

【 $L/R=1/\sin \phi$, $H/R=0.02$, $t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150$, $E_1/E_2=E_c/E_1=1$,
 $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=G_{23}/E_2=0.38$, $\nu_{12}=\nu_c=0.3$, $\rho_1/\rho_2=\rho_c/\rho_1=1$ 】

N	$\phi=30^\circ$		$\phi=45^\circ$		$\phi=60^\circ$	
	Present	Irie et al. ⁽²⁸⁾	Present	Irie et al. ⁽²⁸⁾	Present	Irie et al. ⁽²⁸⁾
(a) Simply supported at both ends						
0	0.0799	0.0800	0.1169	0.1170	0.1230	0.1232
1	0.3442	0.3442	0.2862	0.2863	0.2130	0.2131
2	0.3243	0.3244	0.3306	0.3307	0.2526	0.2527
6	0.1359	0.1369	0.1696	0.1702	0.1778	0.1783
(b) Clamped at both ends						
0	0.5202	0.5205	0.4573	0.4576	0.3502	0.3504
1	0.4599	0.4600	0.4254	0.4256	0.3309	0.3310
2	0.3365	0.3366	0.3508	0.3510	0.2893	0.2895
6	0.1677	0.1686	0.2073	0.2081	0.2172	0.2180
(c) Clamped - free						
0	0.3059	0.3059	0.3422	0.3422	0.2454	0.2455
1	0.1709	0.1709	0.2003	0.2003	0.1700	0.1700
2	0.0932	0.0933	0.1179	0.1180	0.1065	0.1066
6	0.0698	0.0705	0.0754	0.0758	0.0774	0.0777

表3-7 両端固定されたクロスプライ積層円錐殻の無次元振動数 Ω の比較

【 $L/R=0.67$, $H/R=1/75$, $t_1/R=t_2/R=6.66 \times 10^{-3}$, $t_c/R=6.66 \times 10^{-6}$,
 $\phi=30^\circ$, $E_1/E_2=15$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=G_{23}/E_2=0.5$, $E_c/E_1=10^{-3}$,
 $\nu_{12}=\nu_c=0.25$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=10^{-3}$, $(90^\circ/0^\circ)$, $s=1$ 】

Source	Circumferential wave number N					
	0	1	2	3	4	5
Present	0.5396	0.4267	0.3113	0.2432	0.2031	0.1669
Kumar et al.⁽⁶²⁾	0.5407	0.4272	0.3115	0.2433	0.2035	0.1668
Tong et al.⁽³⁶⁾	0.5420	0.4264	0.3120	0.2444	0.2051	0.1693

表3-8 クロスプライ積層円筒殻の基本無次元振動数の比較

【 $L/R = 2, H/R = 2.5 \times 10^{-3}, t_1/R = t_2/R = 1.25 \times 10^{-3}, t_c/R = 1.25 \times 10^{-6},$
 $E_1/E_2 = 15, G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = G_{23}/E_2 = 0.5366, E_1/E_2 = 15, E_c/E_1 = 10^{-3},$
 $\nu_{12} = \nu_c = 0.32, \rho_1/\rho_2 = 1, \rho_c/\rho_1 = 10^{-3}$ 】

Boundary conditions	Laminations	Kobayashi		
		Present	-Nagashima ⁽³¹⁾	N
Simply supported at both ends	$[90^\circ / 0^\circ]$	0.03156	0.03154	8
	$[0^\circ / 90^\circ]$	0.03040	0.03040	8
	$[90^\circ / 0^\circ]_A$	0.03623	0.03621	7
	$[0^\circ / 90^\circ]_A$	0.03577	0.03576	7
	$[0^\circ / 90^\circ]_S$	0.02963	0.02962	8
	$[90^\circ / 0^\circ]_S$	0.04175	0.04174	6
Clamped at both ends	$[90^\circ / 0^\circ]$	0.03872	0.03865	8
	$[0^\circ / 90^\circ]$	0.03827	0.03822	8

A : Antisymmetric , S : Symmetric

表3-9 両端固定された等方性サンドイッチ円錐殻の無次元振動数 Ω

およびモード損失係数 η の比較

【 $L/R = 1, H/R = 0.01, t_1/R = t_2/R = t_c/R = 3.33 \times 10^{-6}, \phi = 15^\circ, E_1/E_2 = 1,$
 $G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = G_{23}/E_2 = 0.38, E_c/E_1 = 1.10 \times 10^{-4}, \nu_{12} = \nu_{23} = 0.3,$
 $\nu_c = 0.34, \rho_1/\rho_2 = 1, \rho_c/\rho_1 = 0.17, \delta_c = 0.35, N = 1, s = 1$ 】

	Present	Ramesh-Ganesan ⁽⁴⁹⁾
Ω	0.7511	0.7436
η	0.598×10^{-3}	0.606×10^{-3}

3.3.2 固有振動数，モード損失係数および振動モード

本節では，周方向波数，表面材の積層形態，半頂角および各形状寸法比による無次元振動数 Ω ，モード損失係数 η および振動モードの変化を調べる．

図3-2と図3-3，図3-4と図3-5および図3-6と図3-7はそれぞれ両端単純支持，両端固定および固定-自由のサンドイッチ円錐殻について，周方向波数による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化およびそれに対応する振動モードを示したものである．ここでは，積層形態をL1(実線): ($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)とL2(破線): ($90^\circ/90^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)の2通りとし，各周方向波数に対して1~3次モード ($s=1,2,3$) について調べた．また，振動モードは積層形態L1について調べ， \bar{u} ， \bar{v} または \bar{w} の実部の最大値を1として正規化した．

軸対称振動モード($N=0$)では，周方向の変位 \bar{v} が卓越するねじりモードが生じる．等方性材料から成る円錐殻の場合，通常，ねじりモードは曲げモードよりも高いモード次数で現れるが，主軸方向の縦弾性係数に対して横弾性係数が小さいFRPラミナを使用する場合，ねじりモードは低次で現れる．両端単純支持の場合， $\phi=0^\circ$ の $s=1,2$ および $\phi=30^\circ$ の $s=2$ で，両端固定の場合， $\phi=0^\circ$ の $s=1,2$ および $\phi=30^\circ$ の $s=2$ で，固定-自由の場合， $\phi=0^\circ$ の $s=1,2$ ， $\phi=30^\circ$ の $s=1$ および $\phi=60^\circ$ の $s=1$ でねじりモードが現れる． $\phi=0^\circ$ の場合，変位 \bar{w} は，はりの振動モードとよく似た形を呈する．また， \bar{u} よりも \bar{v} と \bar{w} の連成が強く，周方向波数 N が大きくなるにつれて， \bar{v} と \bar{w} の連成は弱まり，節の位置が相対的に小口側に移行する傾向がみられる．

基本振動数を与える周方向波数 N は半頂角，積層形態および境界条件によって異なり， $N=0,3,4$ あるいは5が基本振動モードとなる．また，ねじりモードを除き，L1の方が高い固有振動数を与えていることから，表面材をクロスプライ積層すると円錐殻の動的剛性の向上に効果があるといえる．

周方向波数が増加するにつれて，一部を除いてモード損失係数は増加する傾向がみられ，周方向の曲率が大きくなるほど減衰効果が大きく現れることがわかる．また，モード損失係数は全体的にL2よりもL1の方が大きいことから，表面材の積層形態をクロスプライ積層した方が高い減衰効果が得られることがわかる．

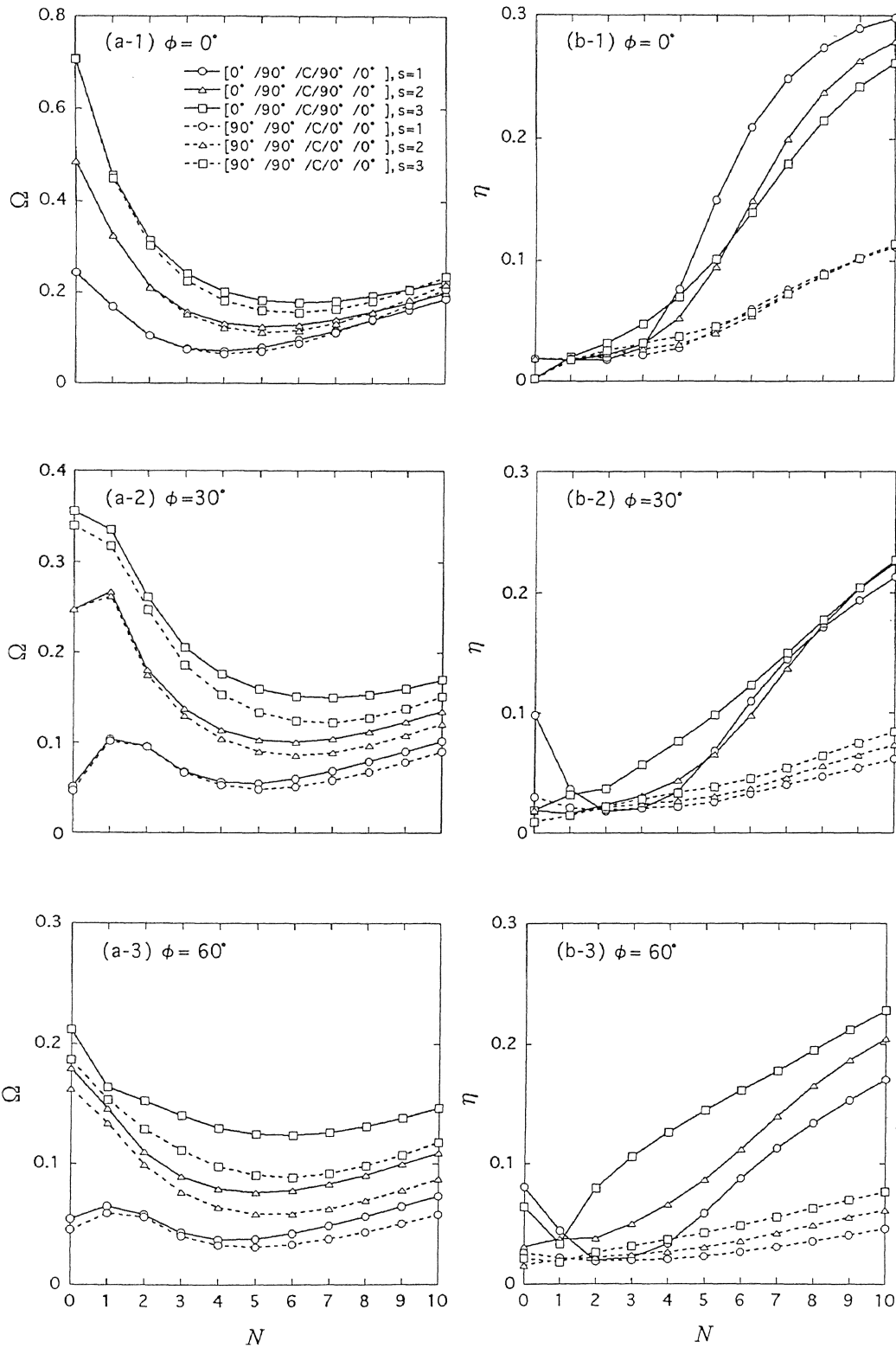


図3-2 周方向波数による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(両端単純支持)

[$L/R=2, H/R=0.02, t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5,$
 $G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5$]

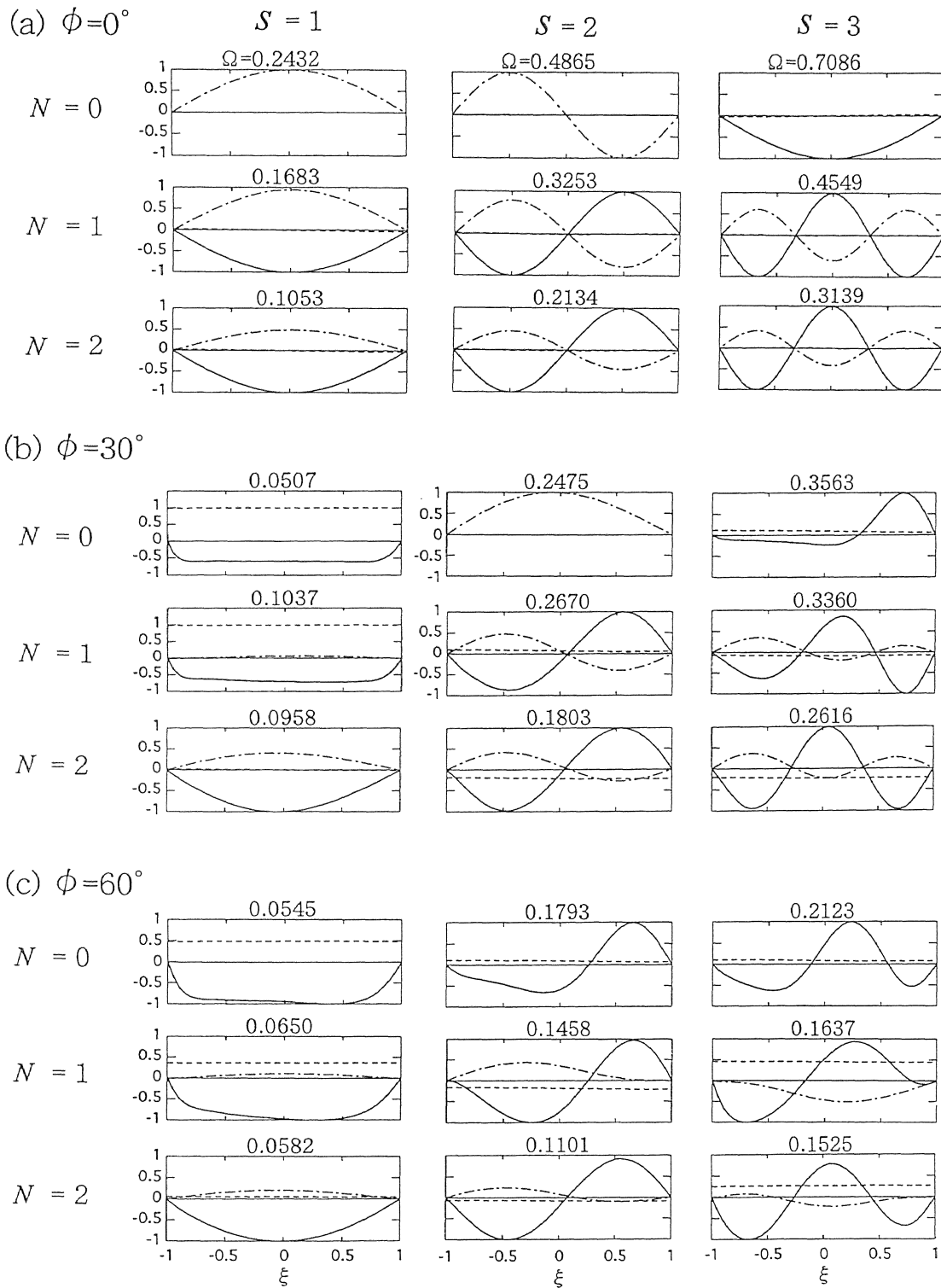


図3-3 複合材サンドイッチ円錐殻の振動モード（両端単純支持）
 [$L/R=2, H/R=0.02, t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5,$
 $G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5, (0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ),$
 ----- \bar{u} , - · - · - \bar{v} , ——— \bar{w}]

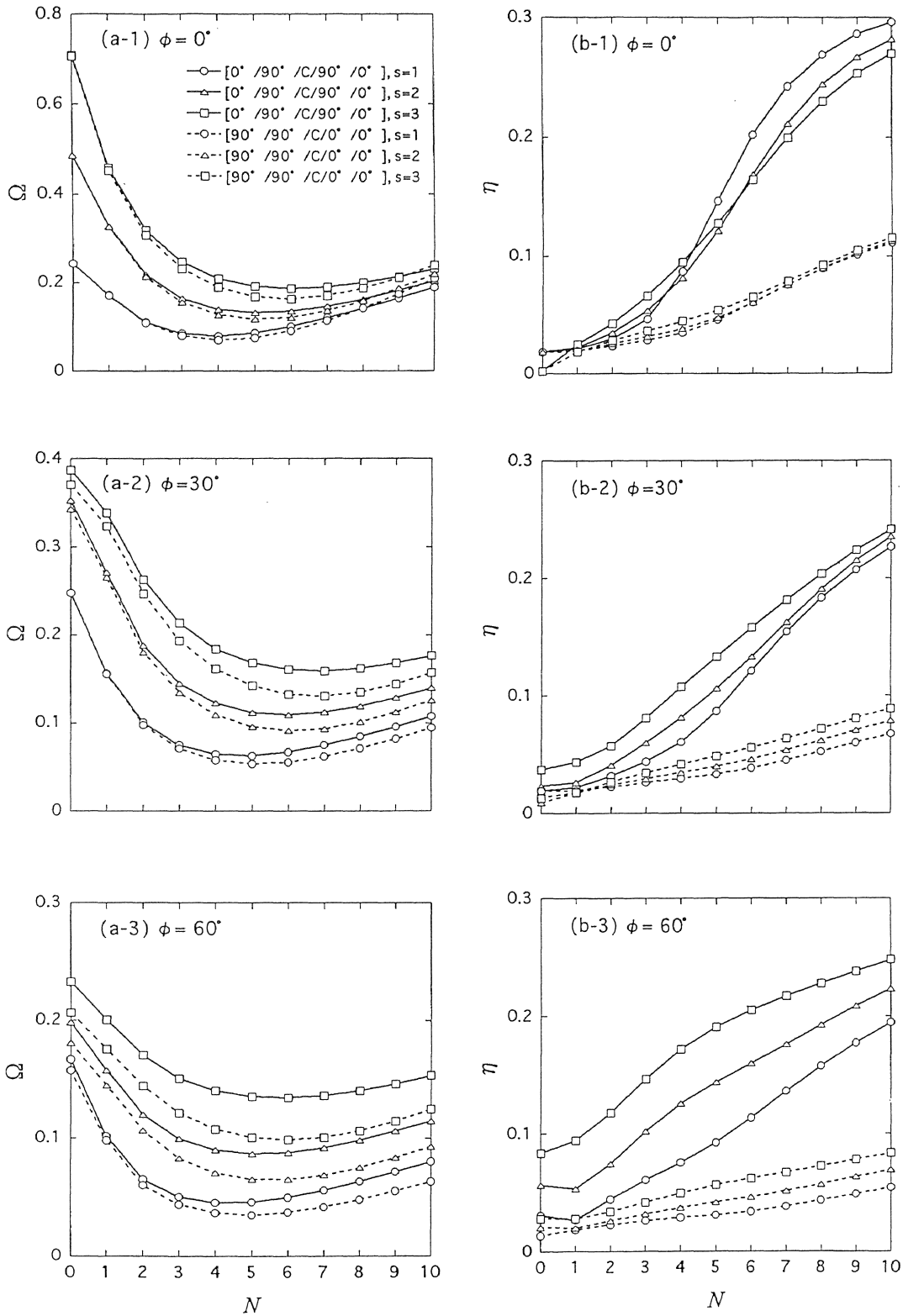


図3-4 周方向波数による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(両端固定)

【 $L/R=2, H/R=0.02, t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5,$
 $G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5$ 】

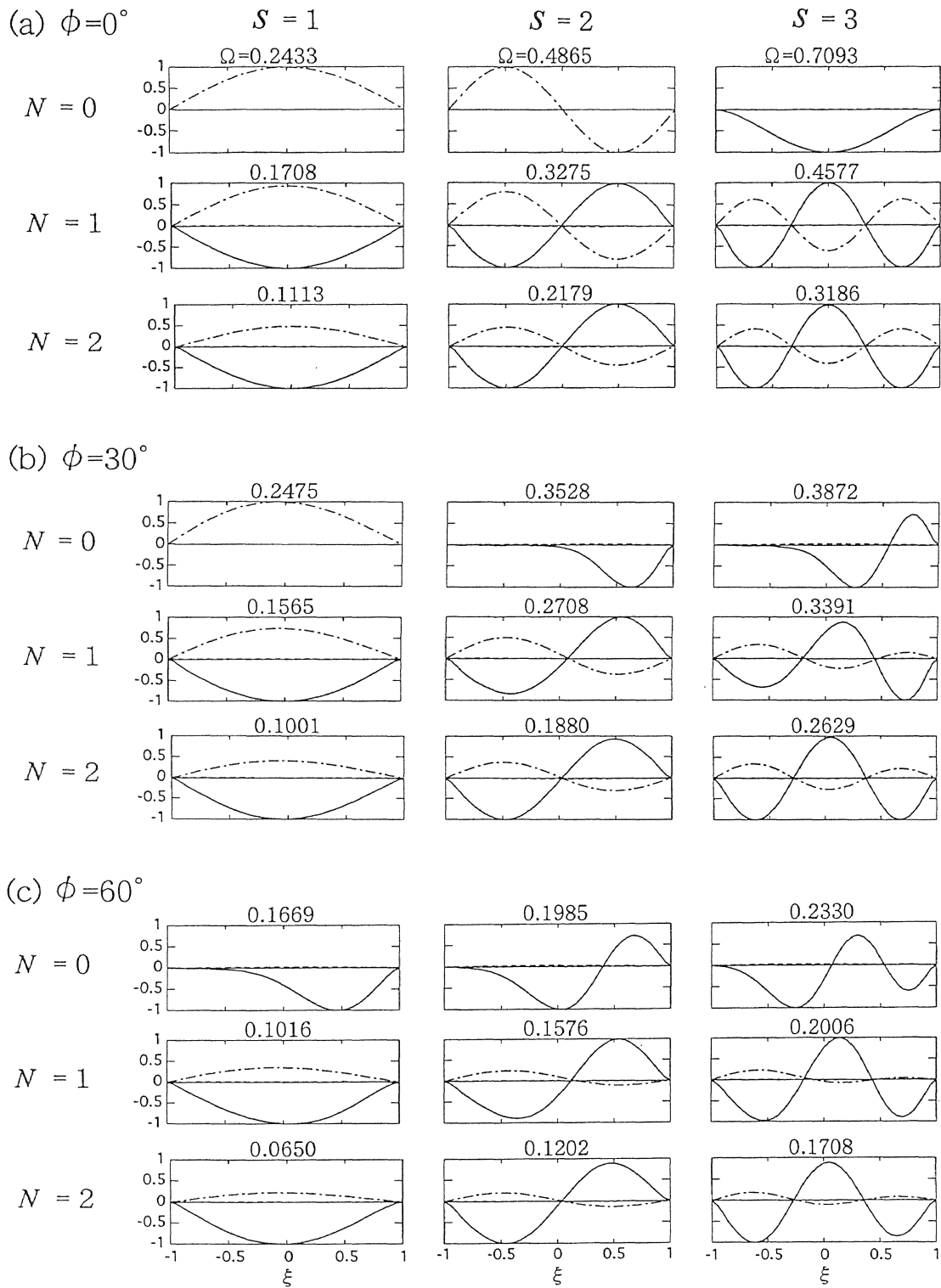


図3-5 複合材サンドイッチ円錐殻の振動モード（両端固定）
 【 $L/R=2, H/R=0.02, t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5,$
 $G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5, (0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ),$
 ----- \bar{u} , ----- \bar{v} , ——— \bar{w} 】

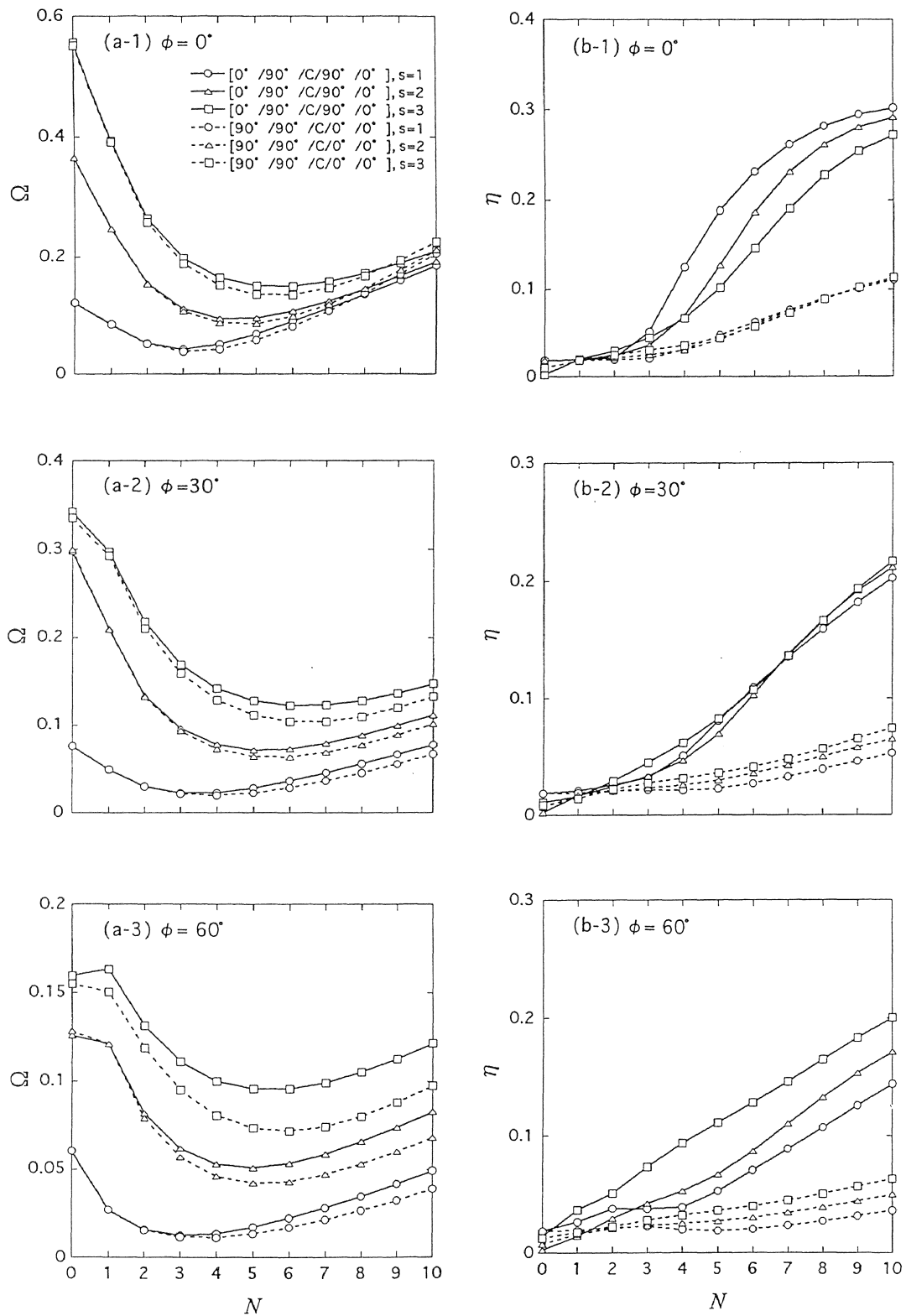


図3-6 周方向波数による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(固定-自由)

【 $L/R=2, H/R=0.02, t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5,$
 $G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5$ 】

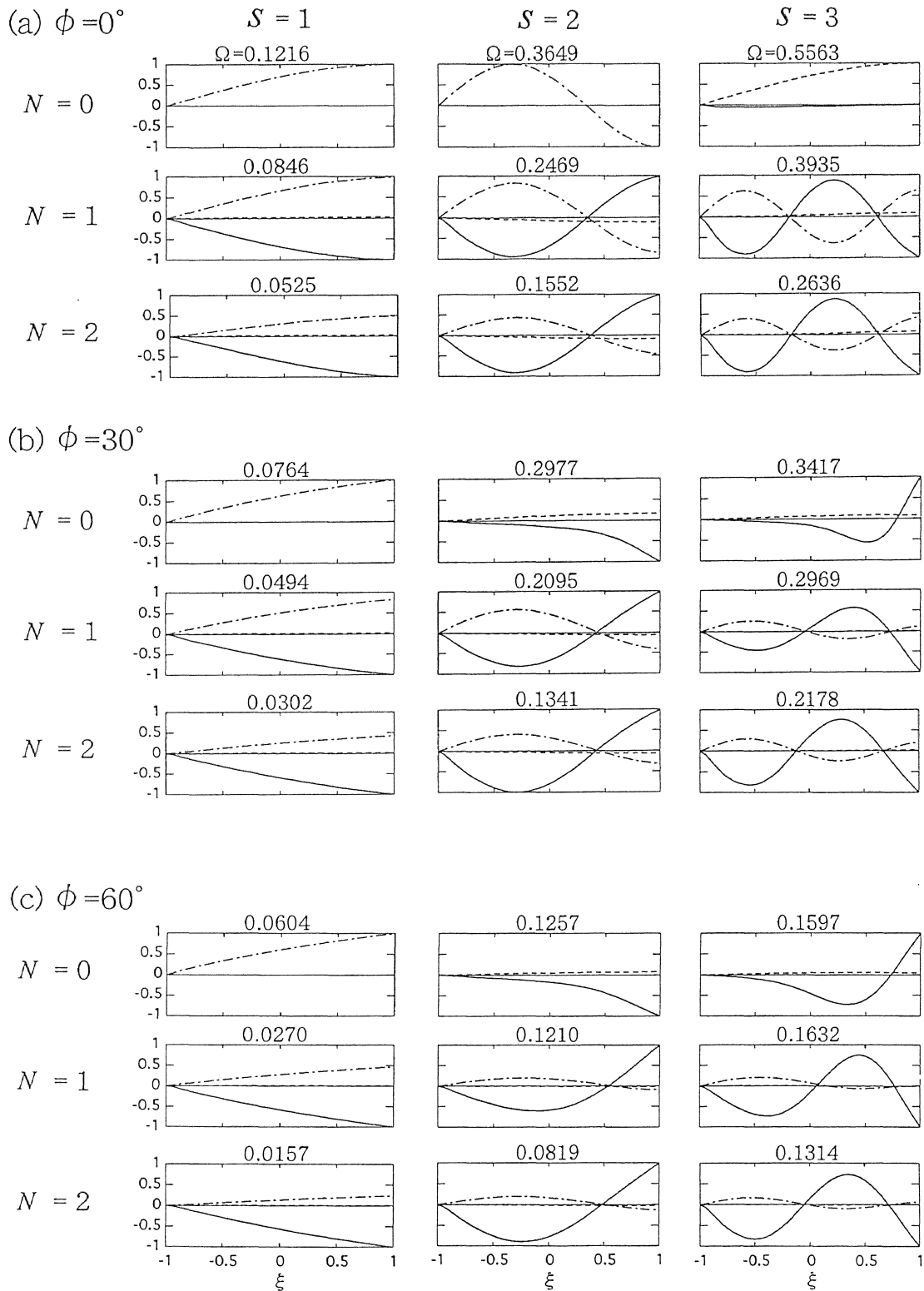


図3-7 複合材サンドイッチ円錐殻の振動モード（固定-自由）
 [$L/R = 2, H/R = 0.02, t_1/R = t_2/R = t_c/R = 1/150, E_1/E_2 = 20, G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = 0.5,$
 $G_{23}/E_2 = 0.37, E_c/E_1 = 10^{-3}, \nu_{12} = 0.28, \nu_c = 0.4, \rho_1/\rho_2 = 1, \rho_c/\rho_1 = 0.1,$
 $\delta_1 = 0.001, \delta_2 = 0.01, \delta_{12} = 0.015, \delta_c = 0.5, (0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ),$
 ----- \bar{u} , ----- \bar{v} , ——— \bar{w}]

表3-10, 3-11および表3-12にそれぞれ両端単純支持, 両端固定および固定-自由の複合材サンドイッチ円錐殻について, さまざまな積層形態における無次元振動数 Ω とモード損失係数 η を示す. 形状寸法比は $L/R=2$, $H/R=0.02$, $t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150$ とし, 半頂角 $\phi=0^\circ, 30^\circ$ および 60° の3通りについて調べた. また, 表面材1,2の積層数を各二層(表面材1と2の合計で4層)とした場合に考えられる12種類すべての積層形態について検討し, モード次数は $s=1\sim 3$ について調べた.

いずれの境界条件および半頂角 ϕ に対しても積層形態が $(90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ)$ あるいは $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ において最も高い基本振動数を与えており, そのときの周方向波数は単純支持の $\phi=0^\circ$ を除き, $N=3$ あるいは 4 となる. また, 両端固定と固定-自由の $\phi=60^\circ$ の場合を除き, 積層形態が $(0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ)$ の場合に最も低い基本振動数を与えている. したがって, 表面材の積層形態については, 一方向積層よりもクロスプライ積層の方が円錐殻の動的剛性の向上に効果があると考えられる.

ある積層形態において, 基本振動数を与える周方向波数は境界条件および半頂角に依存する. また, 両端における拘束が強い(固定-自由<両端単純支持<両端固定)ほど固有振動数は高く, 半頂角が大きいほど固有振動数は低くなる.

また, モード損失係数は積層形態, 境界条件, 半頂角および周方向波数 N に依存する. 全体的な傾向として表面材を一方向積層するよりも, クロスプライ積層した方がモード損失係数が高く, 減衰効果が高いといえる.

表3-10 積層形態の違いによる無次元振動数 Ω と
モード損失係数 η (両端単純支持)

【 $L/R=2, H/R=0.02, t_c/R=t_1/R=t_2/R=1/150, E_1/E_2=20,$
 $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5, G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4,$
 $\rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1, \delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5$ 】

Laminations	1st		2nd		3rd	
	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$
(a) Semi-vertex angle : $\phi = 0^\circ$						
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	5.888(5) ^a	3.523	6.105(4)	2.470	6.517(6)	5.065
($0^\circ/0^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	6.158(4)	2.737	6.722(5)	4.115	7.228(3)	2.140
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	6.231(3)	8.000	7.726(4)	18.05	8.183(2)	2.025
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	6.284(4)	2.818	6.721(5)	4.980	7.391(3)	2.000
($90^\circ/90^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	6.432(4)	2.750	7.042(5)	4.210	7.448(3)	2.153
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	6.599(4)	2.817	6.901(5)	4.829	7.689(3)	1.963
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	7.032(4)	7.591	7.673(3)	2.761	7.906(5)	14.94
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	7.197(3)	4.072	7.220(4)	11.59	8.979(5)	18.76
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	7.769(4)	10.45	7.779(3)	3.712	9.402(5)	17.68
($0^\circ/90^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	7.769(4)	9.495	7.860(3)	3.291	9.330(5)	17.17
($90^\circ/0^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	7.840(4)	9.451	7.917(3)	3.289	9.417(5)	17.07
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	8.167(3)	3.864	8.691(4)	10.94	10.54(2)	1.813
(b) Semi-vertex angle : $\phi = 30^\circ$						
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	2.406(0)	7.281	4.455(6)	3.442	4.562(5)	2.788
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	4.011(0)	6.922	4.678(5)	2.852	4.883(6)	3.999
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	4.037(0)	7.014	5.039(5)	2.791	5.180(6)	3.875
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	4.491(0)	7.607	6.156(4)	4.551	6.671(5)	8.591
($90^\circ/90^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	4.624(0)	2.957	4.814(5)	2.544	5.078(6)	3.214
($0^\circ/0^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	4.680(5)	2.592	4.699(0)	3.206	4.924(6)	3.252
($0^\circ/90^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	4.776(0)	9.194	5.839(4)	3.982	6.013(5)	7.958
($90^\circ/0^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	4.785(0)	9.007	5.864(4)	3.964	6.044(5)	7.907
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	4.984(0)	6.137	5.240(4)	8.725	5.648(3)	3.206
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	5.017(0)	5.973	5.848(4)	4.343	6.052(5)	8.601
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	5.041(0)	6.237	5.391(4)	5.021	5.627(5)	9.626
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	5.068(0)	9.822	5.448(5)	6.766	5.611(4)	3.359
(c) Semi-vertex angle : $\phi = 60^\circ$						
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	2.592(0)	5.166	3.079(5)	3.576	3.130(6)	4.069
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	3.082(5)	3.076	3.252(4)	2.527	3.312(6)	3.930
($90^\circ/90^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	3.120(5)	2.285	3.289(4)	2.069	3.346(6)	2.649
($0^\circ/0^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	3.121(5)	2.397	3.317(4)	2.125	3.334(6)	2.768
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	3.430(5)	2.879	3.611(6)	3.636	3.623(4)	2.363
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	3.594(4)	4.569	3.854(5)	7.269	4.103(3)	2.372
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	3.737(4)	3.354	3.791(5)	5.860	4.244(6)	8.749
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	3.793(4)	6.707	3.976(3)	3.067	4.353(5)	9.425
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	3.867(4)	3.780	4.120(5)	6.459	4.330(3)	2.095
($90^\circ/0^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	3.875(4)	3.700	4.144(5)	6.392	4.334(3)	2.173
($0^\circ/90^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	3.885(4)	3.723	4.148(5)	6.418	4.351(3)	2.190
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	4.071(4)	3.984	4.371(3)	2.209	4.520(5)	6.472

^a Circumferential wave number.

表3-11 積層形態の違いによる無次元振動数 Ω と
モード損失係数 η (両端固定)

【 $L/R=2, H/R=0.02, t_c/R=t_1/R=t_2/R=1/150, E_1/E_2=20,$
 $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5, G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4,$
 $\rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1, \delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5$ 】

Laminations	1st		2nd		3rd	
	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$
(a) Semi-vertex angle : $\phi = 0^\circ$						
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	6.648(5) ^a	6.524	6.868(4)	5.469	7.181(6)	7.389
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	6.903(4)	4.765	7.232(5)	6.339	7.974(3)	3.638
($0^\circ/0^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	6.921(4)	3.007	7.355(5)	4.250	7.939(3)	2.358
($90^\circ/90^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	7.042(4)	3.469	7.526(5)	4.572	8.043(3)	2.837
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	7.401(4)	4.283	7.655(5)	5.893	8.383(3)	3.209
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	7.889(4)	8.639	8.509(3)	4.631	8.613(5)	14.63
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	7.931(4)	10.35	8.067(3)	4.051	9.428(5)	17.46
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	7.954(3)	5.845	8.614(4)	15.05	10.31(2)	2.128
($0^\circ/90^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	8.452(4)	9.712	8.573(3)	4.514	9.857(5)	16.54
($90^\circ/0^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	8.502(4)	9.706	8.617(3)	4.507	9.920(5)	16.52
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	8.512(4)	9.787	8.606(3)	4.214	9.945(5)	16.51
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	8.765(3)	4.519	9.219(4)	10.71	11.00(2)	2.387
(b) Semi-vertex angle : $\phi = 30^\circ$						
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	5.246(6)	7.952	5.351(5)	7.220	5.462(7)	8.361
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	5.267(5)	5.697	5.416(6)	6.512	5.737(4)	4.821
($90^\circ/90^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	5.275(5)	3.256	5.485(6)	3.775	5.721(4)	2.891
($0^\circ/0^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	5.279(5)	2.833	5.464(6)	3.459	5.741(4)	2.423
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	5.761(5)	4.979	5.877(6)	5.839	6.197(4)	4.178
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	6.002(4)	4.789	6.141(5)	8.850	6.940(6)	12.61
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	6.228(5)	8.675	6.402(4)	6.006	6.661(6)	12.09
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	6.229(4)	6.887	6.818(5)	12.11	6.912(3)	2.947
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	6.403(4)	4.806	6.554(5)	8.430	7.325(3)	2.886
($0^\circ/90^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	6.467(4)	5.698	6.603(5)	8.985	7.391(6)	12.71
($90^\circ/0^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	6.474(4)	5.710	6.614(5)	9.004	7.390(3)	3.787
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	6.631(4)	5.505	7.098(5)	9.159	7.339(3)	3.285
(c) Semi-vertex angle : $\phi = 60^\circ$						
($90^\circ/90^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	3.494(5)	3.067	3.662(4)	2.854	3.713(6)	3.377
($0^\circ/0^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	3.570(5)	2.699	3.757(4)	2.454	3.768(6)	3.078
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	3.726(5)	7.695	3.887(4)	6.970	3.921(6)	8.013
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	3.979(4)	4.447	4.216(5)	7.171	4.455(3)	2.782
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	3.989(5)	10.60	4.025(6)	10.90	4.144(4)	9.689
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	4.127(5)	6.570	4.282(4)	5.922	4.291(6)	7.010
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	4.228(4)	4.457	4.477(5)	6.951	4.650(3)	2.986
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	4.241(4)	5.841	4.482(3)	2.991	4.726(5)	9.041
($90^\circ/0^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	4.466(4)	6.738	4.716(5)	8.864	4.865(3)	5.204
($0^\circ/90^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	4.481(4)	6.688	4.726(5)	8.807	4.883(3)	5.176
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	4.482(4)	5.959	4.744(3)	4.286	4.927(5)	8.380
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	4.549(4)	7.535	4.590(5)	9.229	4.991(6)	11.35

^a Circumferential wave number.

表3-12 積層形態の違いによる無次元振動数 Ω と
モード損失係数 η (固定-自由)

【 $L/R=2, H/R=0.02, t_c/R=t_1/R=t_2/R=1/150, E_1/E_2=20,$
 $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5, G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4,$
 $\rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1, \delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5$ 】

Laminations	1st		2nd		3rd	
	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$
(a) Semi-vertex angle : $\phi = 0^\circ$						
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	3.517(4) ^a	2.911	3.833(3)	2.390	4.119(5)	3.996
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	3.759(2)	3.056	4.553(3)	13.26	7.205(4)	20.30
($0^\circ/0^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	3.824(3)	2.047	4.188(4)	3.118	5.108(2)	1.841
($90^\circ/90^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	3.873(3)	2.095	4.243(4)	3.108	5.186(2)	1.950
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	3.878(3)	2.368	4.098(4)	3.829	5.232(2)	2.055
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	4.046(3)	2.312	4.230(4)	3.759	5.310(2)	1.952
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	4.280(3)	5.074	5.110(4)	12.45	5.247(2)	2.170
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	4.404(3)	7.451	4.921(2)	2.048	6.033(4)	15.54
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	4.591(3)	7.026	5.109(2)	2.064	6.167(4)	15.17
($0^\circ/90^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	4.689(3)	6.083	5.269(2)	2.136	6.159(4)	13.80
($90^\circ/0^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	4.708(3)	6.090	5.292(2)	2.133	6.187(4)	13.82
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	5.182(3)	6.935	5.331(2)	2.124	7.288(4)	14.58
(b) Semi-vertex angle : $\phi = 30^\circ$						
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	1.827(5)	2.895	1.834(4)	3.118	2.086(6)	2.775
($0^\circ/0^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	1.862(4)	1.972	2.058(3)	1.934	2.171(5)	2.285
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	1.943(4)	2.818	2.175(3)	2.771	2.182(5)	2.930
($90^\circ/90^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	1.972(4)	2.118	2.171(3)	2.162	2.264(5)	2.267
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	1.983(3)	4.868	2.289(2)	1.934	2.797(4)	9.385
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	1.983(4)	2.604	2.206(3)	2.511	2.212(5)	2.887
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	2.159(3)	3.113	2.495(4)	6.678	2.813(2)	1.951
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	2.283(3)	3.205	2.309(4)	5.069	2.851(5)	8.074
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	2.339(3)	2.898	2.644(4)	6.112	2.967(2)	2.020
($0^\circ/90^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	2.353(3)	3.135	2.624(4)	5.528	2.994(2)	2.389
($90^\circ/0^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	2.382(3)	3.092	2.650(4)	5.476	3.021(2)	2.359
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	2.481(3)	3.069	2.997(4)	5.777	3.000(2)	2.149
(c) Semi-vertex angle : $\phi = 60^\circ$						
($0^\circ/0^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	1.007(4)	1.886	1.038(3)	2.172	1.236(5)	1.867
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	1.030(4)	3.616	1.071(5)	2.875	1.153(3)	3.785
($0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	1.101(4)	2.896	1.157(3)	3.469	1.279(5)	2.440
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	1.102(4)	3.031	1.157(3)	3.640	1.281(5)	2.440
($90^\circ/90^\circ/C/0^\circ/0^\circ$)	1.115(4)	1.989	1.144(3)	2.247	1.330(5)	1.858
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	1.135(3)	3.723	1.198(2)	2.175	1.643(4)	6.019
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ$)	1.141(3)	3.018	1.397(2)	2.434	1.434(4)	4.736
($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	1.243(3)	3.733	1.344(4)	3.874	1.573(2)	3.771
($0^\circ/90^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	1.274(3)	3.423	1.517(4)	3.921	1.532(2)	3.460
($90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	1.287(3)	2.701	1.526(2)	2.309	1.560(4)	4.291
($90^\circ/0^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)	1.299(3)	3.337	1.541(4)	3.876	1.554(2)	3.331
($90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ$)	1.345(3)	3.027	1.521(2)	2.924	1.733(4)	3.894

^a Circumferential wave number.

図3-8, 3-9および図3-10にそれぞれ両端単純支持, 両端固定および固定-自由の複合材サンドイッチ円錐殻について, 半頂角 ϕ による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化を示す. ここでは, 積層形態を($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)とし, 形状寸法比を $H/R=0.02$, $t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150$ とした. また, 半頂角 $\phi=10^\circ\sim 90^\circ$ (円孔板)と変化させ, 周方向波数 N に対して最低次の振動モード($s=1$)について調べる.

各半頂角 ϕ に対して最初に現れる周方向波数 N が最低次の振動モードとなるが, 半頂角 ϕ に対して固有振動数が最小となる周方向波数 N の値は境界条件と長さ比 L/R に応じてさまざまに変化し, 必ずしも周方向波数 N の小さいモードが低次のモードにならないことがわかる. 例えば, $L/R=2$, $\phi=50^\circ$ の場合, 両端単純支持と両端固定の円錐殻では $N=5$, 固定-自由では $N=3$ が最低次の振動モードとなる. 半頂角 $\phi=90^\circ$ (円孔板)の場合, 両端単純支持と両端固定では周方向波数 N が大きいほど高い固有振動数を示し, 固定-自由の円錐殻では $N=1$ が最低次の振動モードとなる. また, 軸対称振動モード($N=0$)では, 両端固定と固定-自由の $L/R=2$ のように振動数曲線の傾向が途中で変化する場合がみられる. これは, 半頂角 ϕ の変化によってねじりモードから曲げモードに変わったためである.

モード損失係数 η は半頂角 ϕ , 長さ比 L/R , 境界条件および周方向波数によってさまざまに変化する. 両端固定の円錐殻では, 円錐殻が短い($L/R=1$)場合, 各周方向波数におけるモード損失係数は $\phi=90^\circ$ で最大となるが, 円錐殻が長い($L/R=4$)場合, 各周方向波数におけるモード損失係数は $\phi=10^\circ$ で最大となる. また, 軸対称振動モード($N=0$)では, 両端固定と固定-自由の $L/R=2$ のようにモード損失係数がほぼ一定値を示す箇所がみられるが, これはねじりモードであり, ねじりモードにおけるモード損失係数は半頂角にほとんど影響を受けないことがわかる. また, ねじりモードから曲げモードに変わるとき, 明らかにモード損失係数曲線の傾向に変化がみられる.

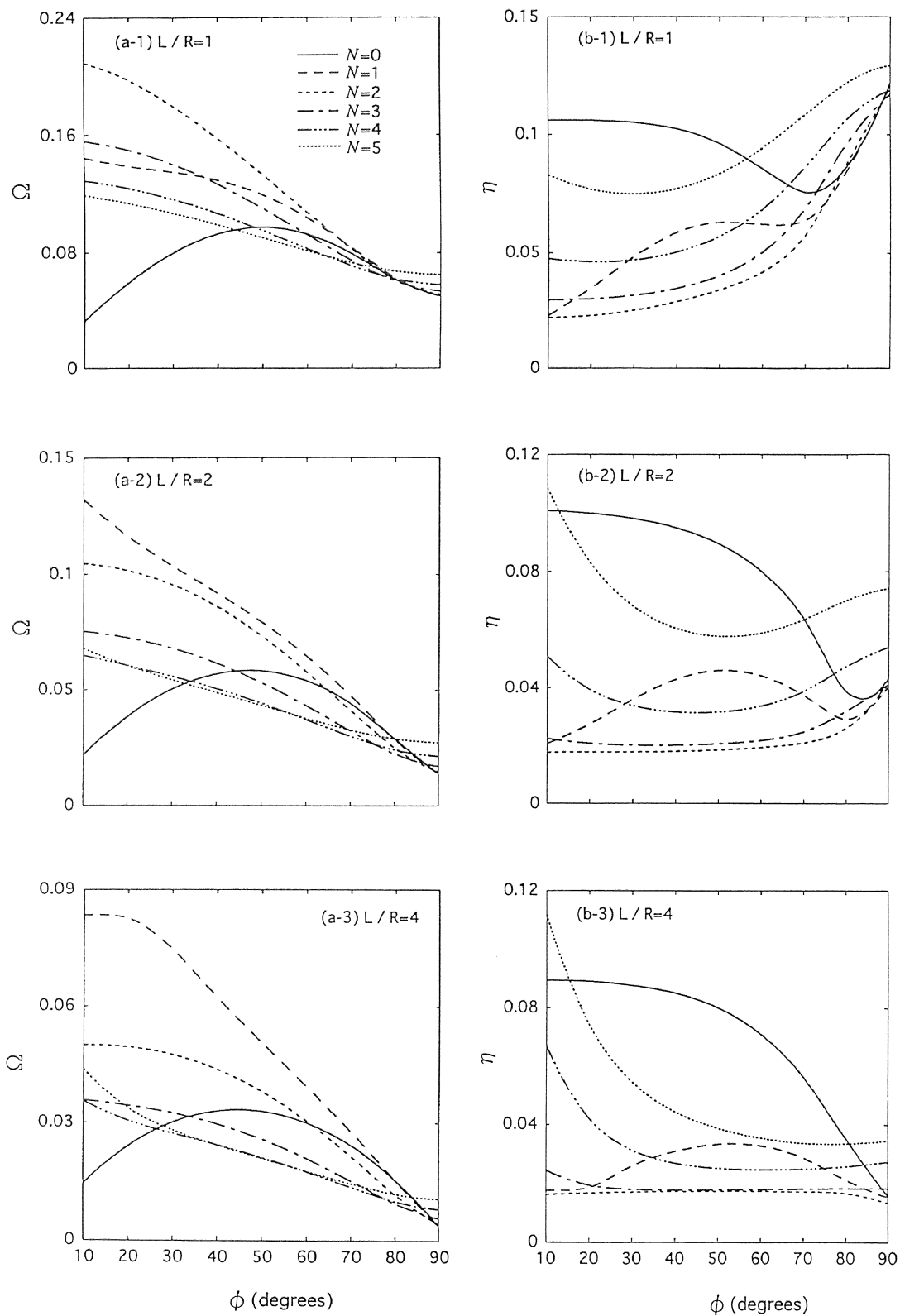


図3-8 半頂角による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(両端単純支持)

[$H/R=0.02$, $t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$]

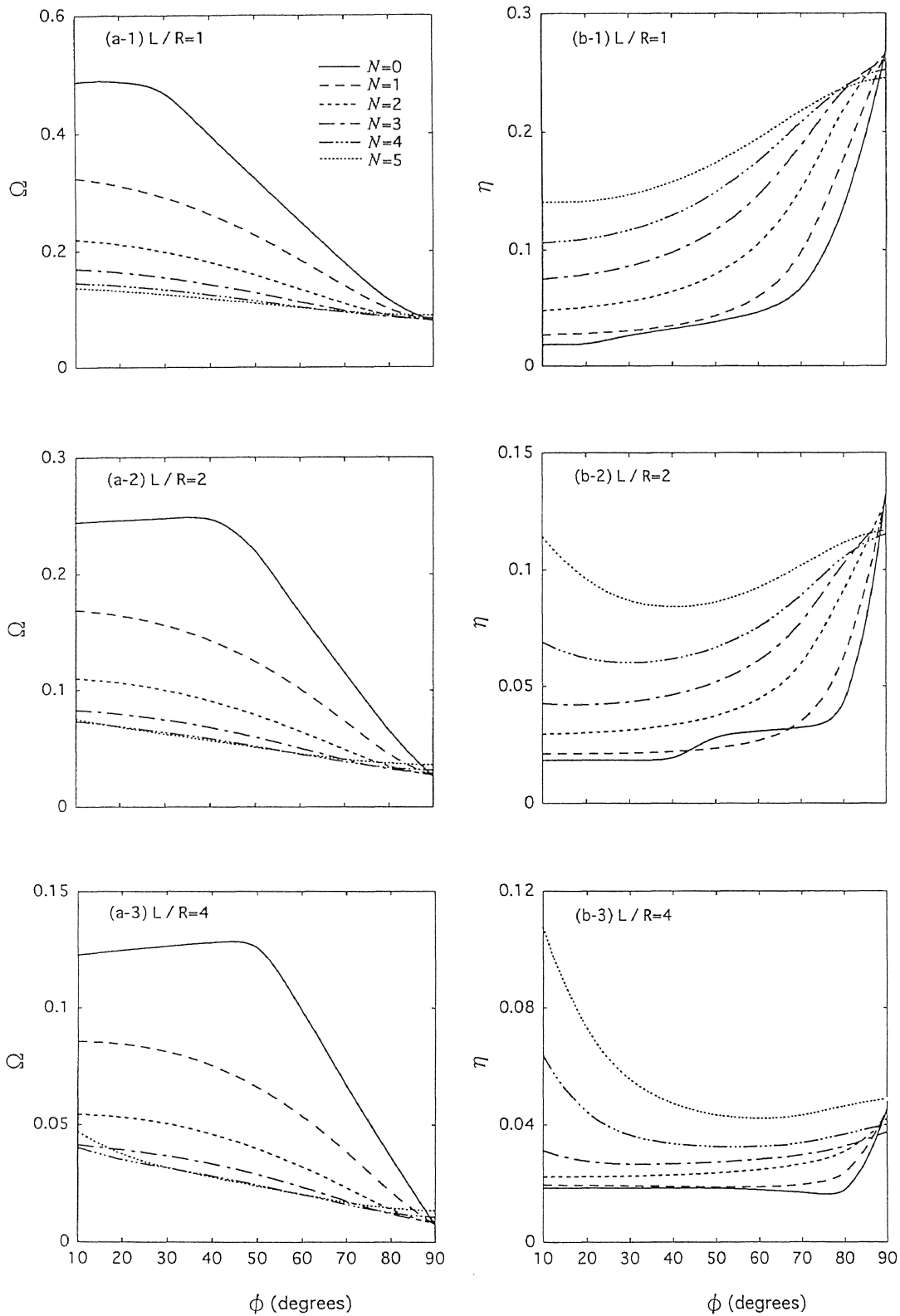


図3-9 半頂角による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(両端固定)

[$H/R=0.02$, $t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$]

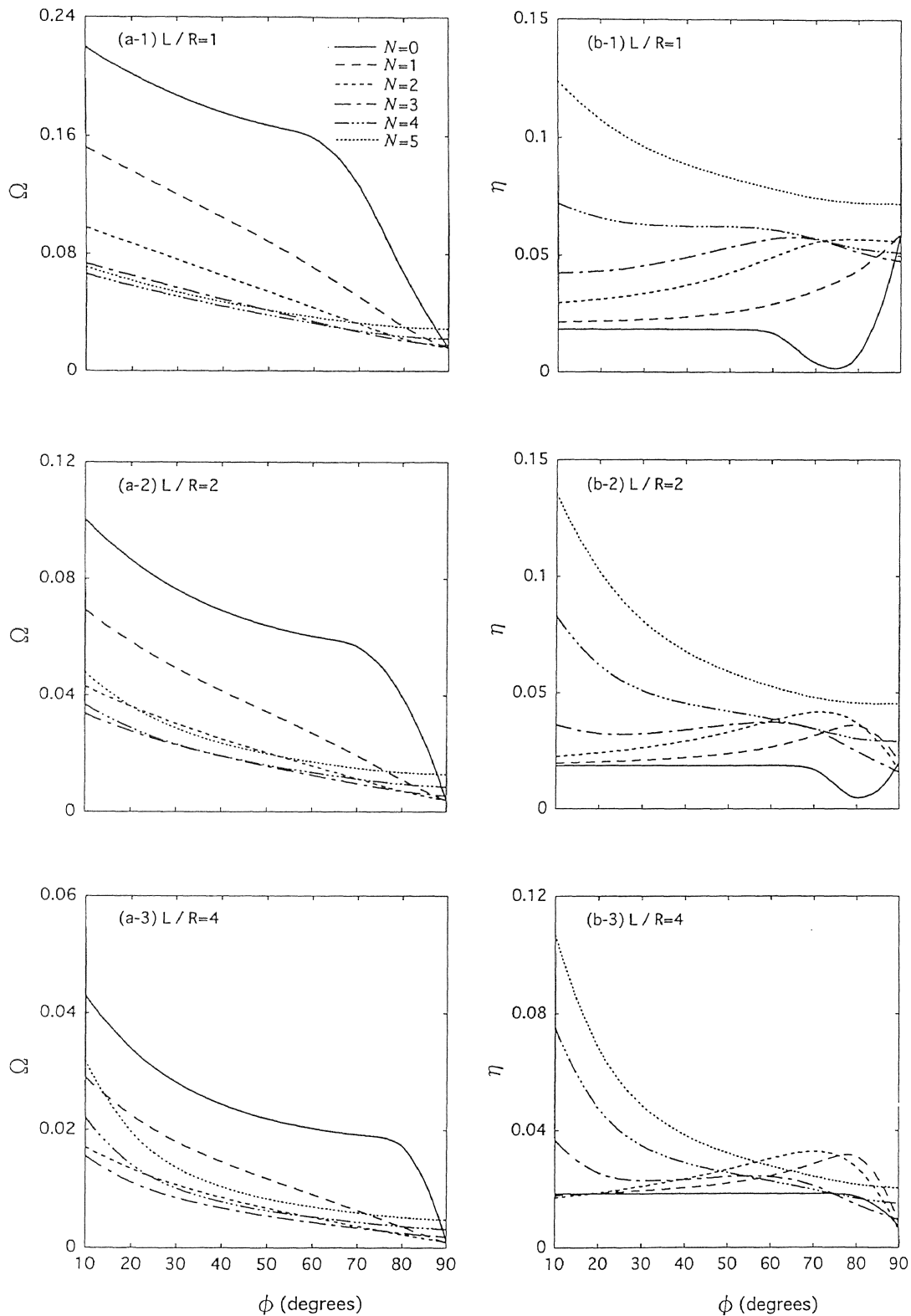


図3-10 半頂角による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(固定-自由)

[$H/R=0.02$, $t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$]

図3-11, 3-12および図3-13にそれぞれ両端単純支持, 両端固定および固定-自由の複合材サンドイッチ円錐殻について, 長さ比 L/R による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化を示す. ここでは, 積層形態を $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ とし, 形状寸法比は $H/R = 0.02$, $t_1/R = t_2/R = t_c/R = 1/150$ とした. また, 半頂角 $\phi = 0^\circ, 30^\circ$ および 60° の3通りとし, $L/R = 1 \sim 10$ と変化させ, 周方向波数 N に対して最低次の振動モード ($s=1$) について調べる.

いずれの境界条件, 半頂角についても, 長さ比 L/R が増加すると固有振動数は減少する傾向を示す. また, 各長さ比 L/R に対して最初に現れる周方向波数 N が最低次の振動モードとなるが, 長さ比 L/R に対して固有振動数が最小となる周方向波数 N の値は境界条件と半頂角に応じてさまざまに変化し, 必ずしも周方向波数 N の小さいモードが低次のモードになるわけではないことがわかる. 例えば, $\phi = 0^\circ$ (円筒殻), $L/R = 4$ の場合, 両端単純支持と両端固定では, $N=3$ が最低次の振動モードとなり, 固定-自由では $N=2$ が最低次の振動モードとなる. さらに, $\phi = 0^\circ$ (円筒殻) の場合, L/R が小さくなる (殻が短くなる) ほど固有振動数の値が最小となる N は一般に大きくなることがわかる. また, $\phi = 30^\circ$ および 60° の場合, 最低次の振動モードとなる周方向波数 N の値は $\phi = 0^\circ$ (円筒殻) の場合と同様に変化するが, この場合 $N=2$ が最低次の振動モードとなることはなく, $N=0, 3, 4$ あるいは 5 が最低次の振動モードとなる.

一方, モード損失係数 η についてみると, $\phi = 0^\circ$ (円筒殻) で $L/R = 1$ の場合, いずれの境界条件についても $N=0$ においてねじりモードとなり, モード損失係数はほぼ一定の値を示す. このねじりモードは, 両端固定の $\phi = 30^\circ$, $L/R = 2$ 以上の場合と固定-自由のすべての半頂角 ϕ において生じている. また, $L/R = 1$ の場合, いずれの境界条件においても L/R が増加するにつれて, モード損失係数が増加する傾向が部分的にみられるが, 半頂角 $\phi = 30^\circ$ および 60° においては L/R が増加するにつれて, ねじりモードを除いて減少する傾向がみられる.

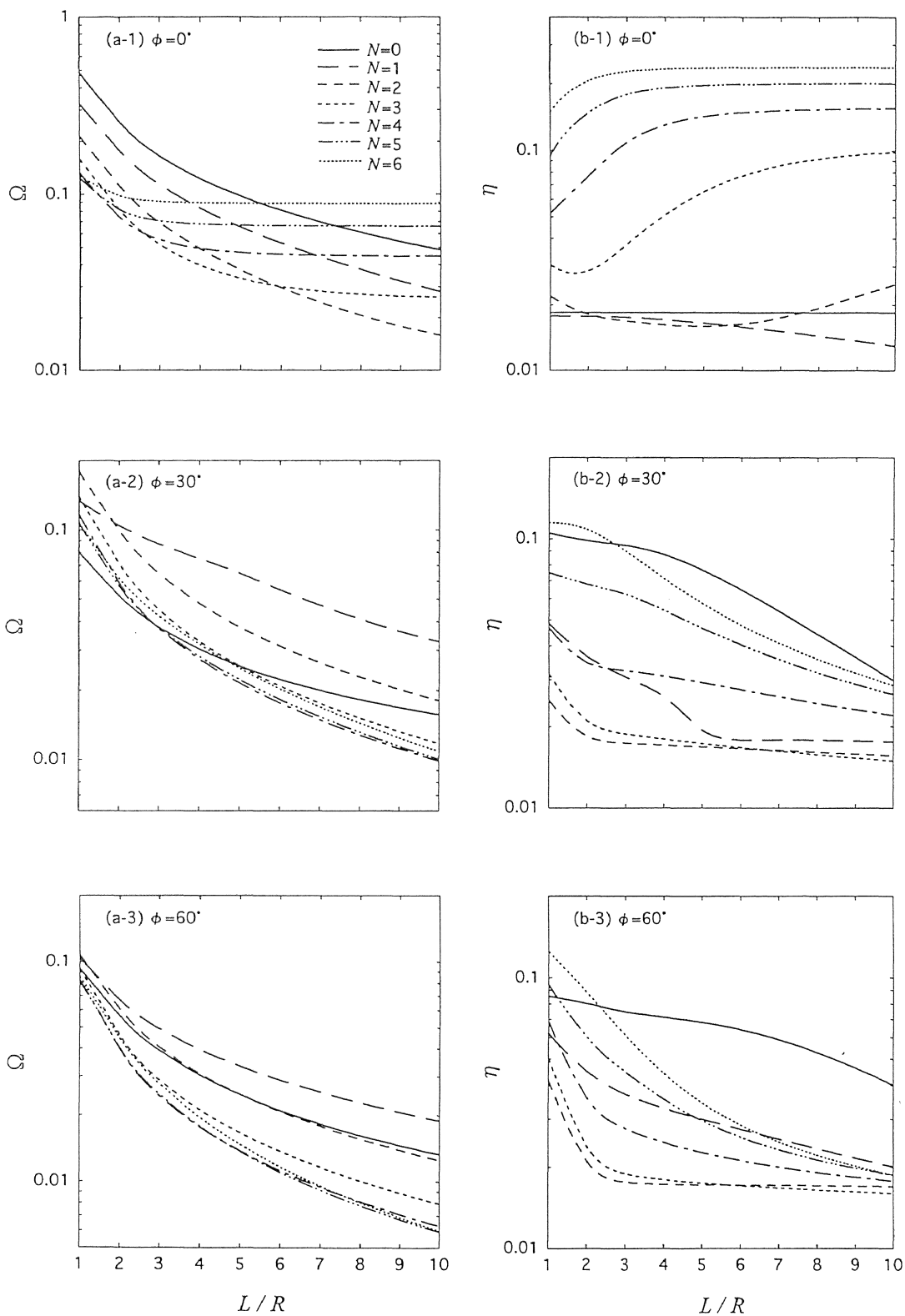


図3-11 長さ比 L/R による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(両端単純支持)

[$H/R=0.02$, $t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$]

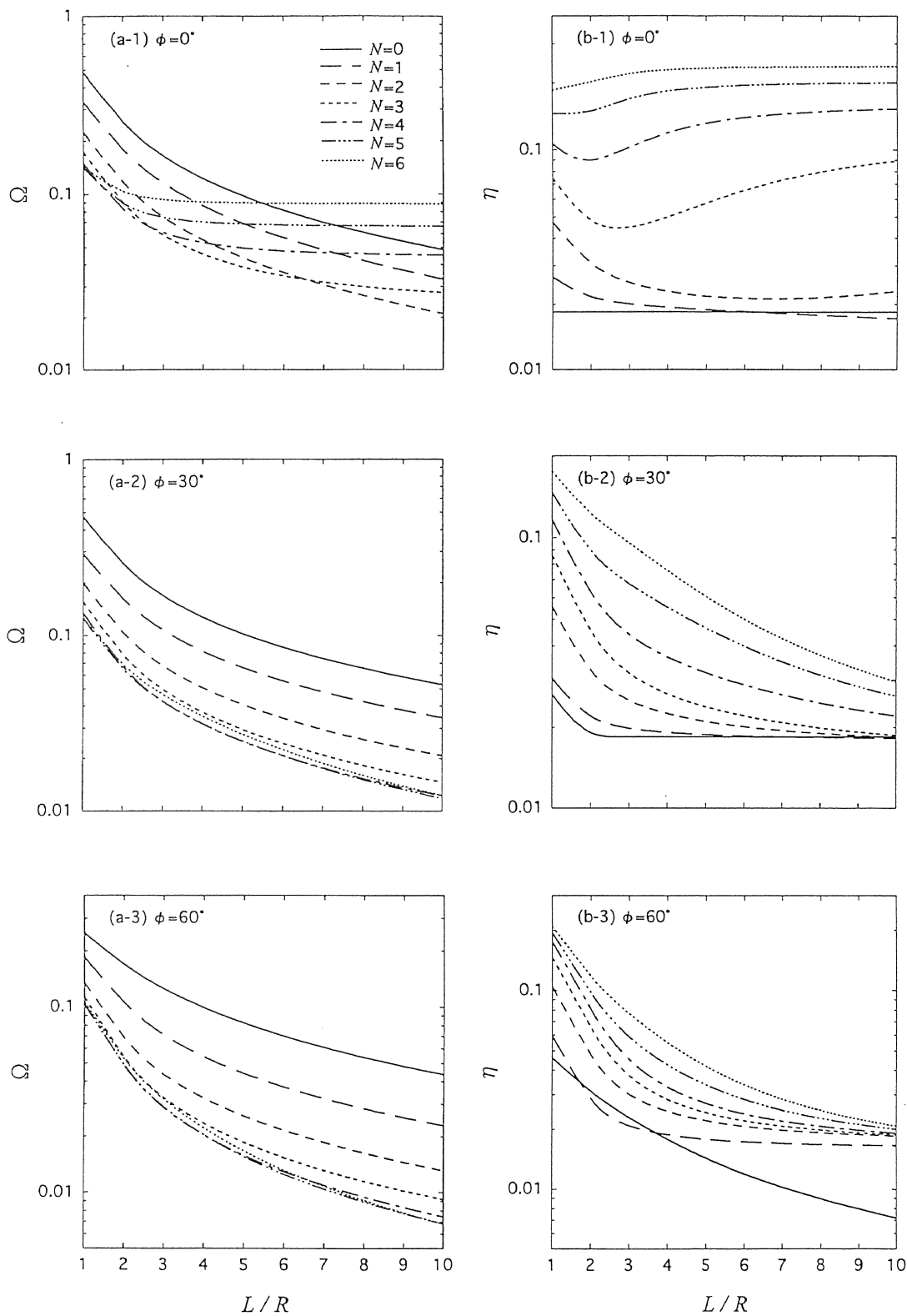


図3-12 長さ比 L/R による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(両端固定)

【 $H/R=0.02$, $t_1/R=t_2/R=t_c/R=1/150$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ 】

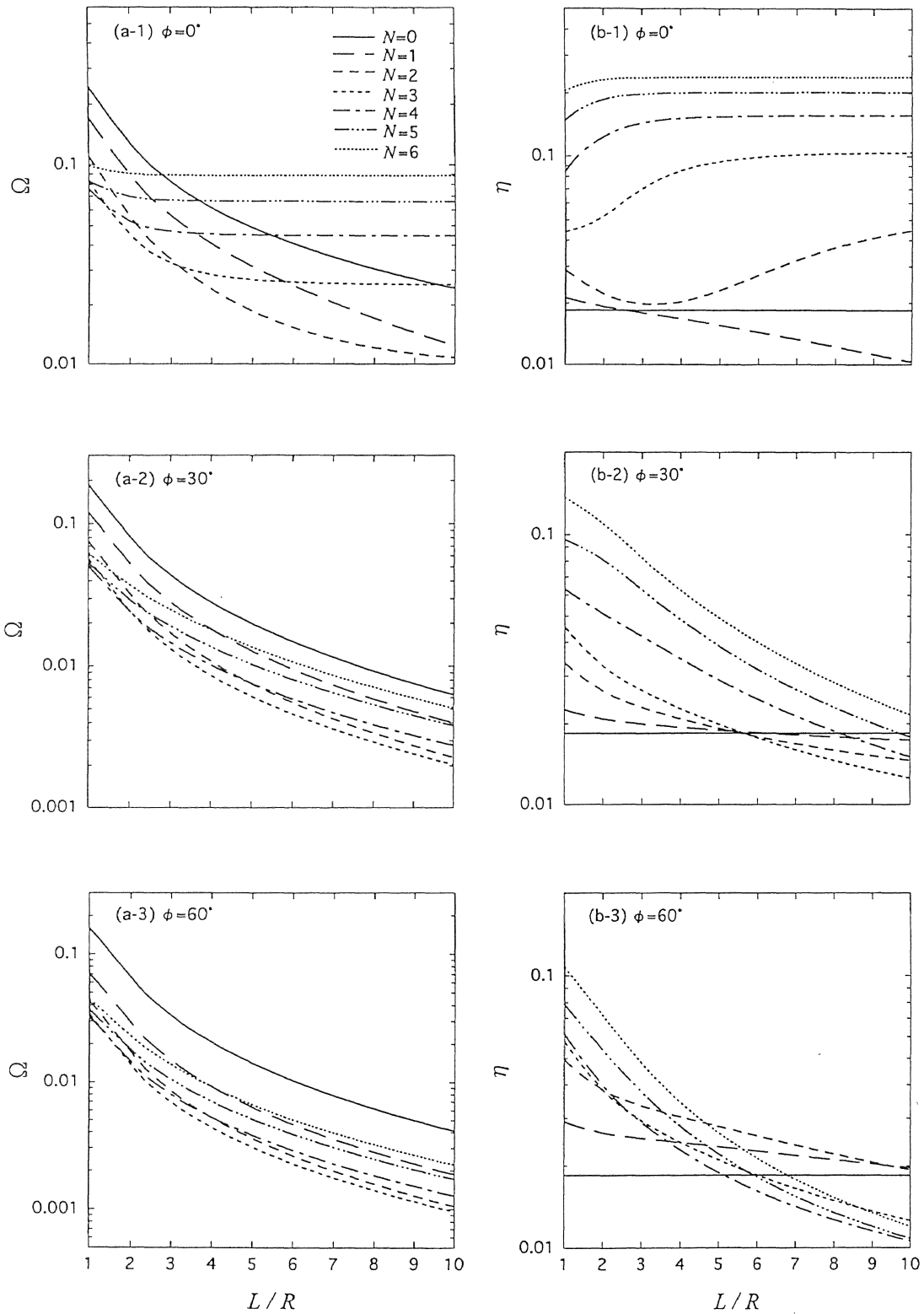


図3-13 長さ比 L/R による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(固定-自由)

【 $H/R = 0.02$, $t_1/R = t_2/R = t_c/R = 1/150$, $E_1/E_2 = 20$, $G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = 0.5$,
 $G_{23}/E_2 = 0.37$, $E_c/E_1 = 10^{-3}$, $\nu_{12} = 0.28$, $\nu_c = 0.4$, $\rho_1/\rho_2 = 1$, $\rho_c/\rho_1 = 0.1$,
 $\delta_1 = 0.001$, $\delta_2 = 0.01$, $\delta_{12} = 0.015$, $\delta_c = 0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ 】

図3-14, 3-15および図3-16にそれぞれ両端単純支持, 両端固定および固定-自由の複合材サンドイッチ円錐殻について, 厚さ比 H/R による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化を示す.

ここでは, 積層形態を $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ とし, 形状寸法比は $L/R = 2$, $t_1/R = t_2/R = t_c/R = 1/150$ とした. また, 半頂角 $\phi = 0^\circ, 30^\circ$ および 60° の3通りとし, $H/R = 0.01 \sim 0.05$ と変化させ, 周方向波数 N に対して最低次の振動モード ($s=1$) について調べる.

全体の傾向としては $N=0$ のねじりモードを除いて厚さ比 H/R が増加すると固有振動数はゆるやかに増加する傾向がみられる. 各厚さ比 H/R に対して最初に現れる周方向波数 N が最低次の振動モードとなるが, 厚さ比 H/R に対して固有振動数が最小となる周方向波数 N の値は境界条件と半頂角に応じてさまざまに変化し, 必ずしも周方向波数 N の小さいモードが低次のモードになるわけではないことがわかる. $\phi = 0^\circ$ (円筒殻) の場合, 両端単純支持と両端固定では, $N=3, 4$ あるいは 5 が最低次の振動モードとなり, 固定-自由では $N=3$ あるいは 4 が最低次の振動モードとなる. また, $\phi = 30^\circ$ の場合, 両端固定と固定-自由では, $N=0$ はねじりモードとなるため, 最低次の振動モードとはならず, $N=3, 4, 5$ あるいは 6 が最低次の振動モードとなる. また, $\phi = 60^\circ$ の場合, 両端単純支持と両端固定では $N=4$ あるいは 5 が, 固定-自由では $N=3$ あるいは 4 が最低次の振動モードとなる. さらに, ねじりモード ($N=0$) はすべての境界条件について $\phi = 0^\circ$ (円筒殻) で生じ, 両端固定と固定-自由の $\phi = 30^\circ$ においても現れている. このねじりモードに関する固有振動数は厚さ比 H/R に対してほぼ一定の値を示すことから, ねじりモードは厚さ比 H/R にほとんど影響を受けないことがわかる.

一方, モード損失係数 η についてみると, いずれの境界条件および半頂角 ϕ についても厚さ比 H/R が増加すると, モード損失係数 η はゆるやかに増加し, その変化割合は周方向波数 N が大きい方がより顕著である. ただし, ねじりモードについては固有振動数と同様に厚さ比 H/R に対してほぼ一定の値を示すことから, モード損失係数 η は厚さ比 H/R にほとんど影響を受けないことがわかる.

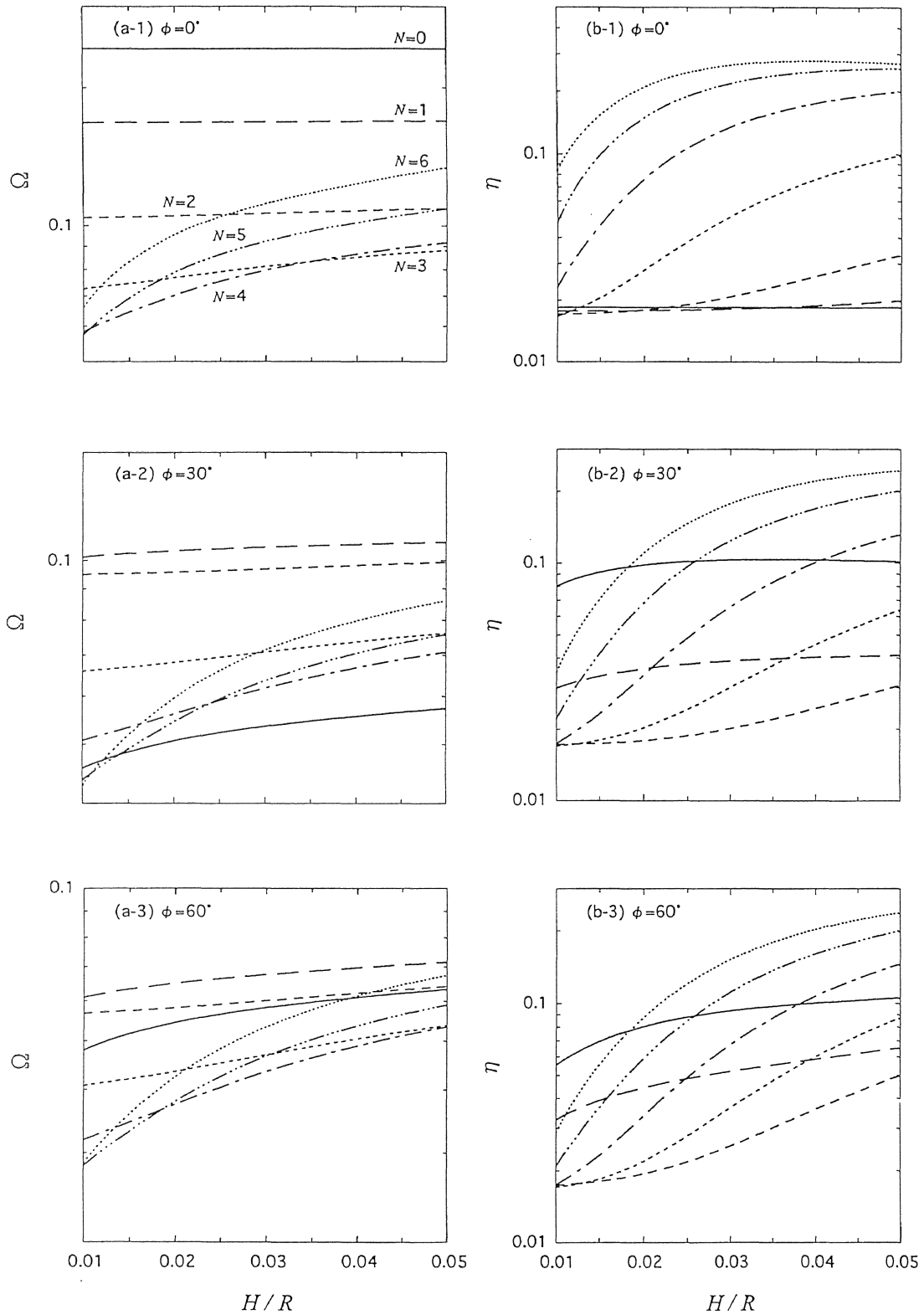


図3-14 厚さ比 H/R による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(両端単純支持)

【 $L/R=2$, $t_1/R=t_2/R=t_c/R=H/3R$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ 】

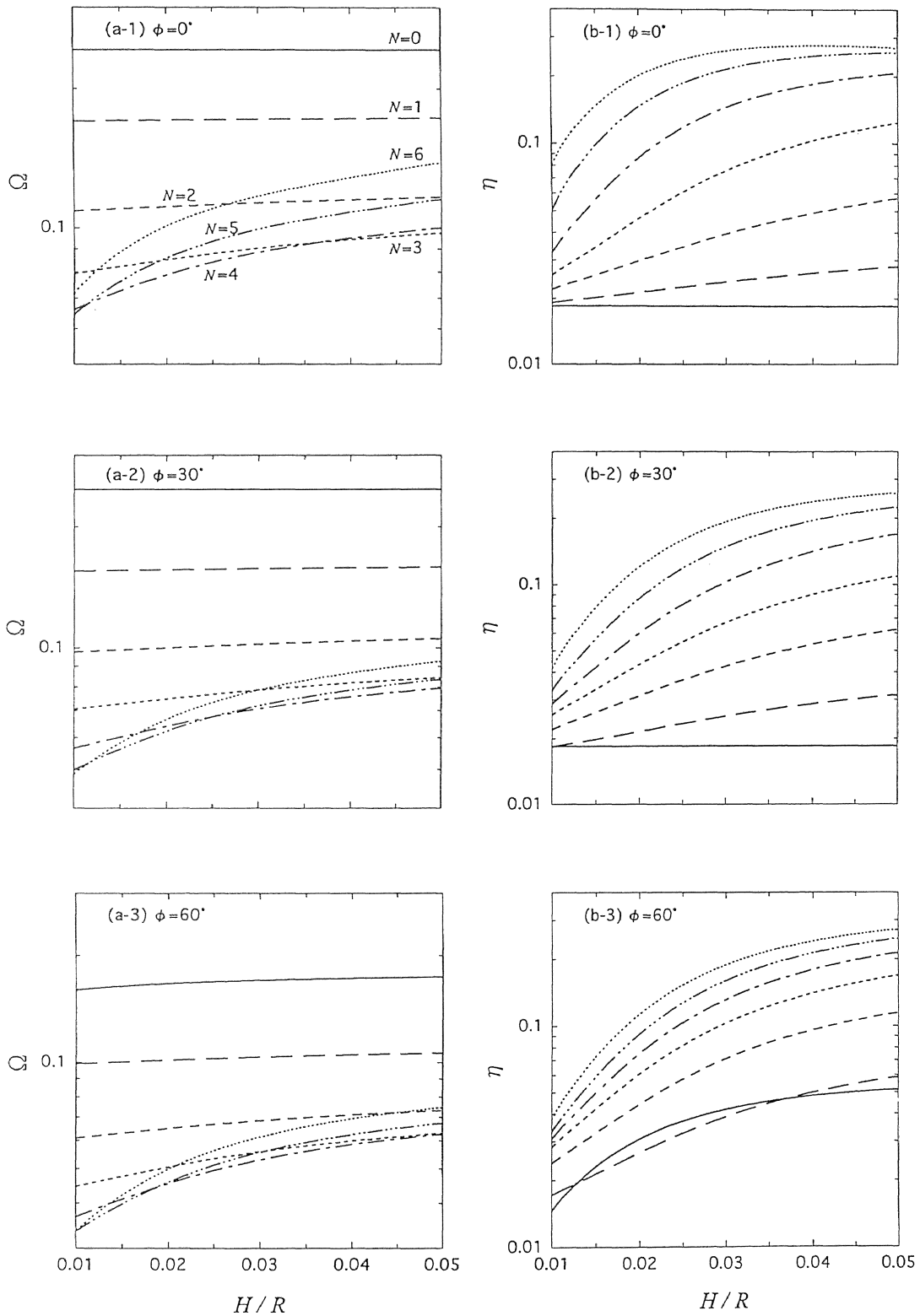


図3-15 厚さ比 H/R による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(両端固定)

【 $L/R=2$, $t_1/R=t_2/R=t_c/R=H/3R$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ 】

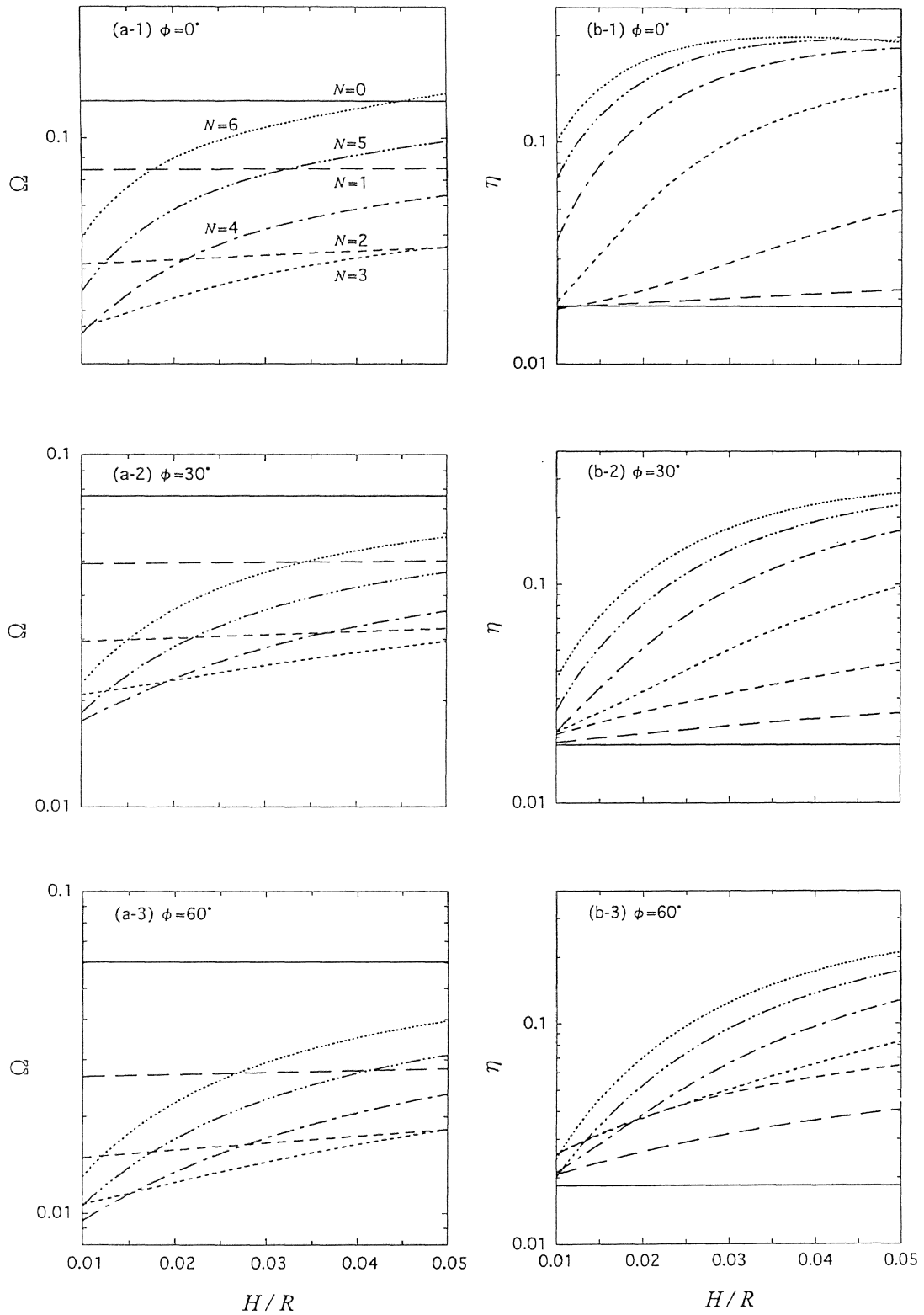


図3-16 厚さ比 H/R による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(固定-自由)

【 $L/R=2$, $t_1/R=t_2/R=t_c/R=H/3R$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ 】

図3-17, 3-18および図3-19にそれぞれ両端単純支持, 両端固定および固定-自由の複合材サンドイッチ円錐殻について, 心材厚さ比 t_c/H による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化を示す. ここでは, 積層形態を $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ とし, 形状寸法比は $L/R=2$, $H/R=0.02$ とした. また, 半頂角 $\phi=0^\circ, 30^\circ$ および 60° の3通りとし, $t_c/H=0.1\sim 0.9$ と変化させ, 周方向波数 N に対して最低次の振動モード ($s=1$) について調べる.

全体の傾向としては, いずれの境界条件および半頂角 ϕ においても $N=0\sim 3$ では心材厚さ比 t_c/H が増加するにつれて固有振動数は減少する傾向がみられる. 一方, $N=4\sim 6$ では固有振動数は心材厚さ比 t_c/H が増加するにつれて一様に増加するか, ある t_c/H の値で最大値をとる. つまり, 周方向波数において低次の振動モードでは, t_c/H の値が増加すると円錐殻の全厚さに対して表面材が薄くなるため円錐殻の剛性が低下し, 固有振動数は減少する. 一方, 周方向波数において高次の振動モードでは, t_c/H の値が増加すると質量効果により固有振動数は単調に増加するか, ある t_c/H において最大値をとる.

また, 各心材厚さ比 t_c/H に対して最初に現れる周方向波数 N が最低次の振動モードとなるが, 心材厚さ比 t_c/H に対して固有振動数が最低となる周方向波数 N の値はさまざまに変化し, 必ずしも周方向波数 N の小さいモードが低次のモードになるわけではないことがわかる. $\phi=0^\circ$ (円筒殻) の場合, 両端単純支持と両端固定では, $N=3$ あるいは 4 が最低次の振動モードとなり, 固定-自由では $N=2$ あるいは 3 が最低次の振動モードとなる. また, $\phi=30^\circ$ の場合, 両端単純支持では $N=0$ あるいは 5 , 両端固定では $N=4$ あるいは 5 , 固定-自由では $N=3$ あるいは 4 が最低次の振動モードとなる. さらに, $\phi=60^\circ$ の場合, 両端単純支持と両端固定では $N=4$ あるいは 5 , 固定-自由では $N=3$ あるいは 4 がそれぞれ最低次の振動モードとなる.

さらに, $\phi=0^\circ$ (円筒殻) では, ねじりモード ($N=0$) はすべての境界条件で生じ, 両端固定と固定-自由の $\phi=30^\circ$ および 60° においても現れる. このねじりモードでは, 心材厚さ比 t_c/H が増加すると固有振動数はゆるやかに減少する傾向を示す.

一方, モード損失係数 η はいずれの境界条件および半頂角 ϕ についても, 心材厚さ比 t_c/H が増加するにつれて増加するか, ある心材厚さ比 t_c/H

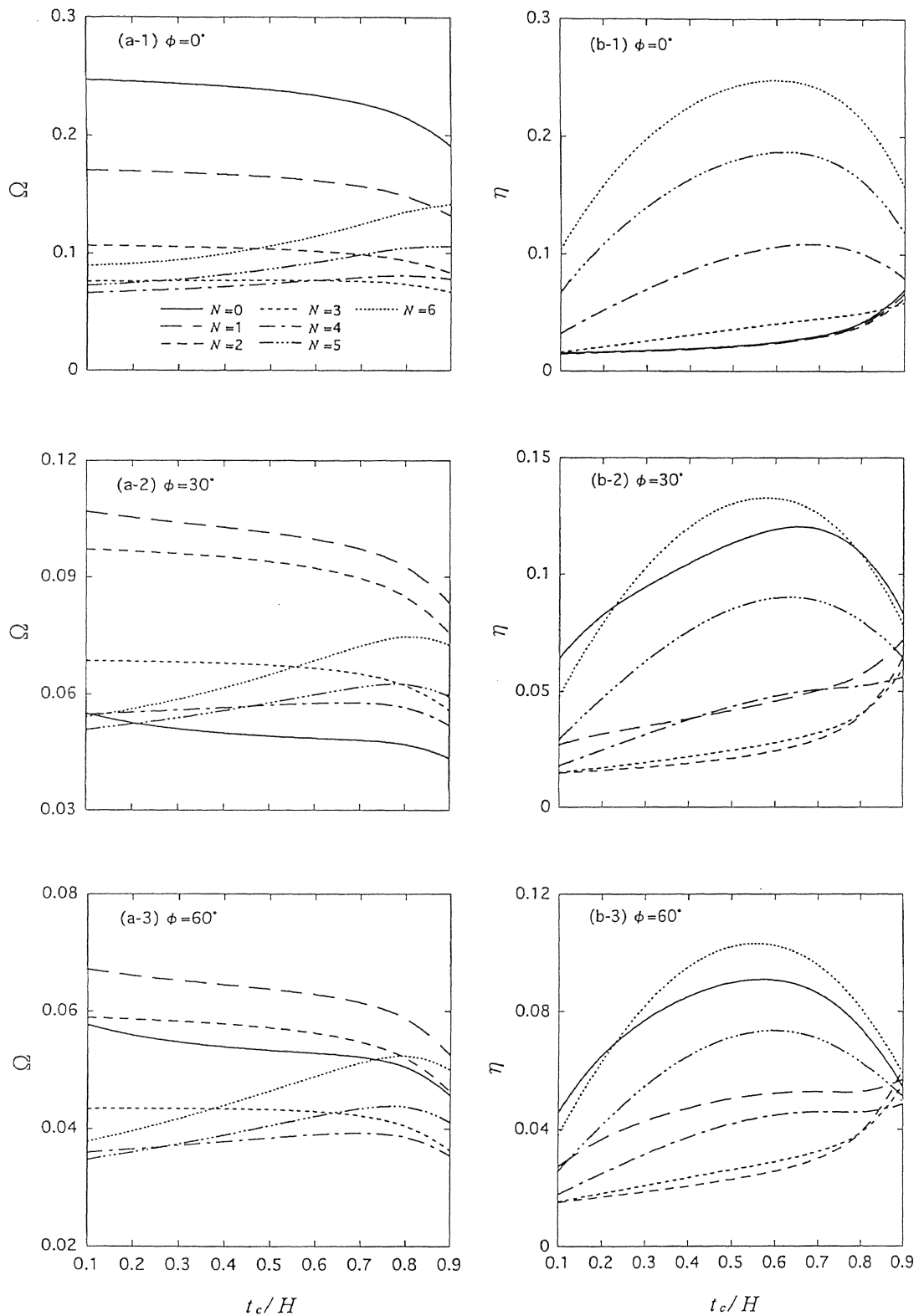


図3-17 心材厚さ比 t_c/H による無次元振動数 Ω と
モード損失係数 η の変化 (両端単純支持)

$[L/R=2, H/R=0.02, t_1/R=t_2/R=(0.02-t_c/R)/2, t_c/R=t_c/50H, E_1/E_2=20,$
 $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5, G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4,$
 $\rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1, \delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5,$
 $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)]$

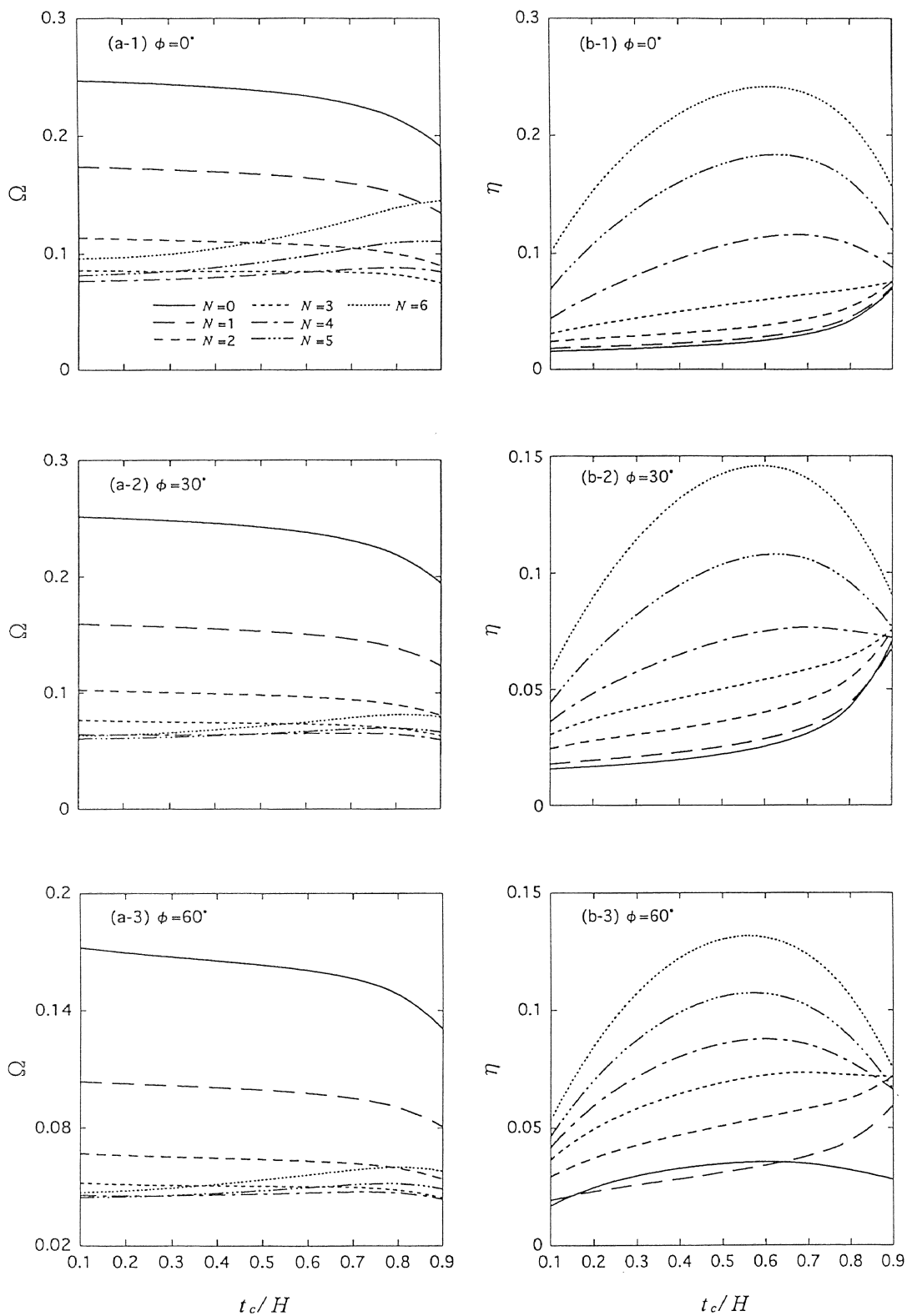


図3-18 心材厚さ比 t_c/H による無次元振動数 Ω と
モード損失係数 η の変化 (両端固定)

【 $L/R=2, H/R=0.02, t_1/R=t_2/R=(0.02-t_c/R)/2, t_c/R=t_c/50H, E_1/E_2=20,$
 $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5, G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4,$
 $\rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1, \delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5,$
 $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ 】

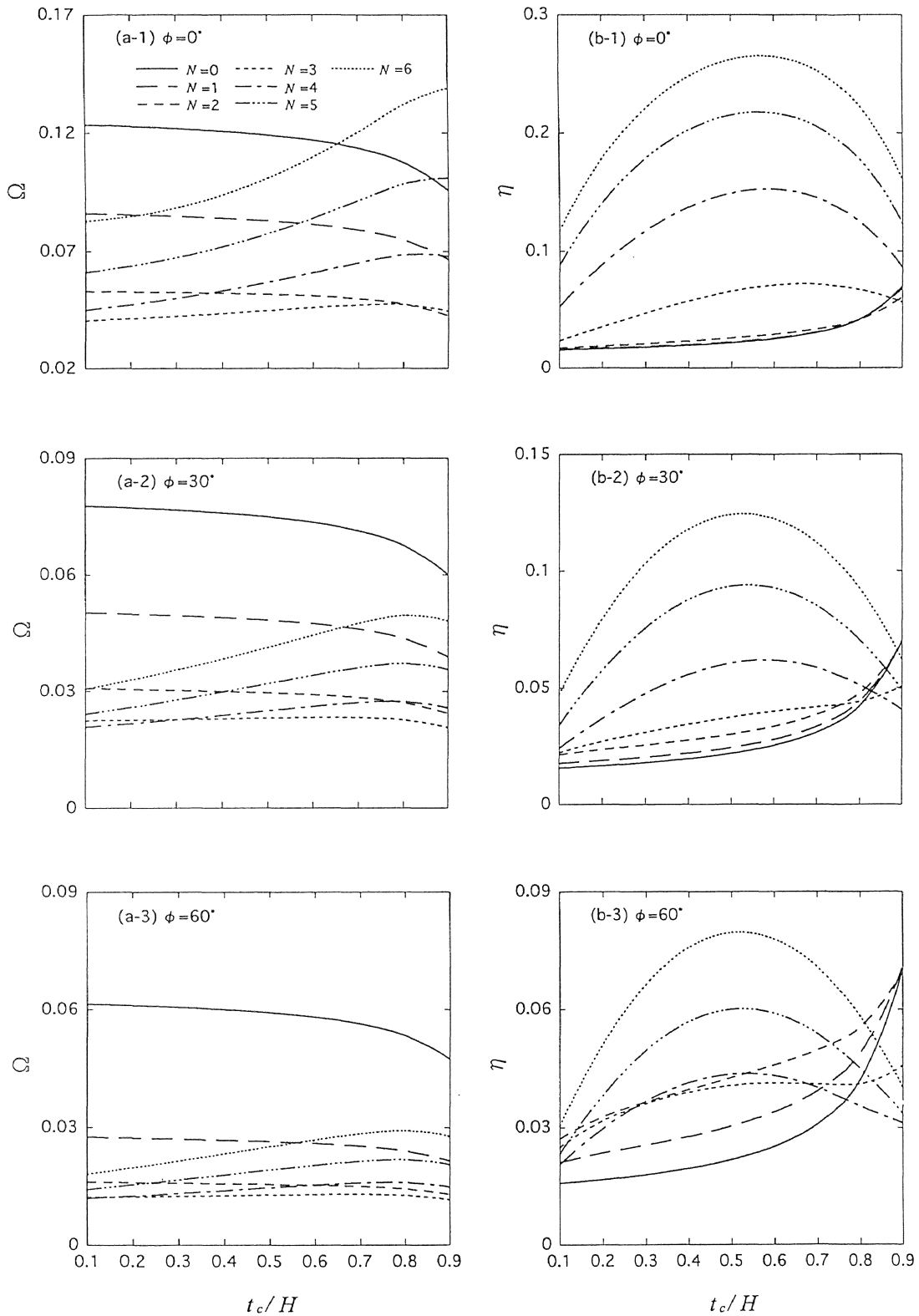


図3-19 心材厚さ比 t_c/H による無次元振動数 Ω と
モード損失係数 η の変化 (固定-自由)

【 $L/R=2, H/R=0.02, t_1/R=t_2/R=(0.02-t_c/R)/2, t_c/R=t_c/50H, E_1/E_2=20,$
 $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5, G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4,$
 $\rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1, \delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5,$
 $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ 】

において最大となる．例えば，両端単純支持の $\phi=30^\circ$ と 60° を除いて，周方向波数 $N=4\sim 6$ では $t_c/H=0.5\sim 0.6$ 付近でモード損失係数は最大値をとる．したがって，周方向波数 N について低次の振動モードでは， t_c/H の値を大きくすれば高いモード損失係数が得られるが，周方向波数 N について高次の振動モードでは，モード損失係数を最大にする心材厚さ比 t_c/H が存在する．

3.4 結 言

本章では，FRP積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ円錐殻の振動減衰特性をリッツ法により解析した．

はじめに，微小変形理論および積層理論に基づいて円錐殻の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価し，円錐殻のラグランジュ関数を極小化することにより，円錐殻の振動数方程式を導出した．

数値計算では，まず，解の収束性を調べ，他の著者らによる解析および実験結果との比較を行い本解析結果の精度と妥当性を検討した．つぎに，周方向波数，表面材の積層形態および各種形状寸法比が固有振動数，振動モードおよびモード損失係数に及ぼす影響を検討し，複合材サンドイッチ円錐殻の振動減衰特性を考究した．その結果を要約すると以下のようなになる．

(1) 変位関数の項数による固有振動数とモード損失係数の収束状況を調べ，項数を適切に取ることによって実用上十分な精度を有する解が得られることを示した．また，他の著者らが解析および実験によって求めた結果と比較して，本解析結果が十分な精度と妥当性を有することを確かめた．

(2) 基本振動数を与える周方向波数は半頂角，積層形態および境界条件に依存する．また，周方向波数が増加するにつれてモード損失係数は全体的に増加する傾向を示し，周方向に対する曲率が大きくなるほど減衰効果が大きく現れる．

(3) 表面材の積層形態は一方向積層よりもクロスプライ積層の方が円錐殻の動的剛性および減衰の向上に効果がある。

(4) 半頂角の変化に対して、固有振動数が最小となる周方向波数の値は境界条件と長さ比 L/R に依存する。また、ねじりモードのモード損失係数における半頂角の影響は小さい。

(5) 長さ比 L/R の変化に対して、固有振動数が最小となる周方向波数の値は境界条件と半頂角に依存する。また、ねじりモードのモード損失係数における長さ比 L/R の影響は小さい。

(6) 厚さ比 H/R の変化に対して、固有振動数が最小となる周方向波数の値は境界条件と半頂角に依存する。また、厚さ比 H/R が増加すると、モード損失係数は増加する傾向を示し、その変化割合は周方向波数が大きい方がより顕著である。

(7) 周方向波数において低次の振動モードでは、 t_c/H の値が増加すると円錐殻の剛性が低下し固有振動数は減少するが、周方向波数において高次の振動モードでは、質量効果により固有振動数は単調に増加するか、ある t_c/H において最大値をとる。また、周方向波数について低次の振動モードでは、 t_c/H が大きくなるにつれてモード損失係数は増加するが、周方向波数について高次の振動モードでは、モード損失係数を最大にする心材厚さ比 t_c/H が存在する。

第4章 複合材サンドイッチ球殻の振動減衰特性⁽¹⁰⁰⁾⁽¹⁰¹⁾

4.1 緒言

球殻は航空宇宙機器に搭載される高圧ガス容器をはじめさまざまな工業分野で応用されている。したがって、構造設計上これらの振動特性を把握することは重要であり、Singhら⁽⁵⁴⁾⁽⁵⁵⁾による等方性球殻の自由振動をはじめ、これまで数多くの研究報告がなされている。

近年、航空宇宙分野における構造物の軽量化を目的として、FRP積層材を使用した積層球殻の最適設計および振動に関する研究^{(57)~(63)}が多く見受けられるようになった。また、サンドイッチ構造から成る球殻の自由振動に関しては、KoplikとYu⁽⁶⁴⁾をはじめ数多くの研究報告^{(65)~(69)}がなされている。

一方、心材に粘弾性材料を使用したサンドイッチ球殻の振動減衰特性に関する研究は、Okazakiら⁽⁷⁰⁾が種々の境界条件をもつ浅い球殻を扱っており、GauthamとGanesan⁽⁷¹⁾が固定と単純支持の境界条件をもつ球殻の振動減衰特性を有限要素法により解析している。

このように、これまでの球殻の振動に関する研究は、減衰を考慮しない等方性および積層球殻の自由振動に関するものが多く、サンドイッチ構造から成る球殻の振動減衰特性に関しては、表面材および心材ともに等方性材料を使用した場合が多い。また、これらの研究では固定の境界条件を扱ったものや、有限要素法による近似解がほとんどである。

このような背景を踏まえ、本章ではFRP積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ球殻の振動減衰特性をリッツ法により解析する。はじめに、最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価し、球殻のラグランジュ関数を極小化することにより、球殻の振動数方程式を導く。数値計算では、はじめに解の収束性を調べ、他の著者らによる解析結果との比較から本解析結果の精度と妥当性を検討する。つぎに、周方向波数、表面材の積層形態および各種形状寸法比が固有振動数、振動モードおよび

モード損失係数に及ぼす影響を検討し、複合材サンドイッチ球殻の振動減衰特性を考究する。

4.2 理論解析

解析において、以下の仮定を用いる。

(1) 表面材と心材は完全に接着されており、それらの界面において、はく離やすべりは生じない。

(2) 表面材および心材の厚さは他の寸法に比べて小さく、面外方向の垂直応力は他の応力に比べて微小となるため無視できる。また、面外せん断変形およびそれに関する応力、ひずみは考慮する。

(3) 表面材および心材の変位、回転およびひずみは微小であり、線形弾性体としての扱いが可能である。

以上の仮定により、変位を面外方向に連続な関数を用いて表すことができ、複合材サンドイッチ球殻を積層表面材を有する均質な連続体と考えると異方性弾性論の適用が可能となる。

4.2.1 形状と座標系

図4-1に複合材サンドイッチ球殻の形状と座標系を示す。図のように座標 (ϕ, θ, z) をとり、任意点における ϕ, θ, z 方向の各変位を u_l, v_l, w_l ($l=1$; 表面材1, 2; 表面材2, c ; 心材)とする。球殻の中心点をO, 極点をP, 端点をQとする。 \overline{OP} と \overline{OQ} のなす角度を開き角 ϕ_0 とし、点Oから心材の中央面までの距離を球殻の半径 R とする。 t_1, t_2 および t_c は、それぞれ表面材1, 表面材2および心材の厚さを表す。さらに、表面材1が N_1 層、表面材2が N_2 層から成る複合材サンドイッチ球殻を考え、長方形板の場合(図2-1(b))と同様に表面材 n ($n=1, 2$)の第 m 層上面への中央面からの距離を $h_m^{(n)}$ とする。また、各ラミナにおいて繊維方向、繊維と直角方向および面外方向にそれぞれ1軸, 2軸および3軸をとり、材料主軸1(繊維方向)と経線(ϕ 方向)のなす角度を繊維角度 $\theta_m^{(n)}$ (ここでは、 0° または 90° のいずれか)とする。

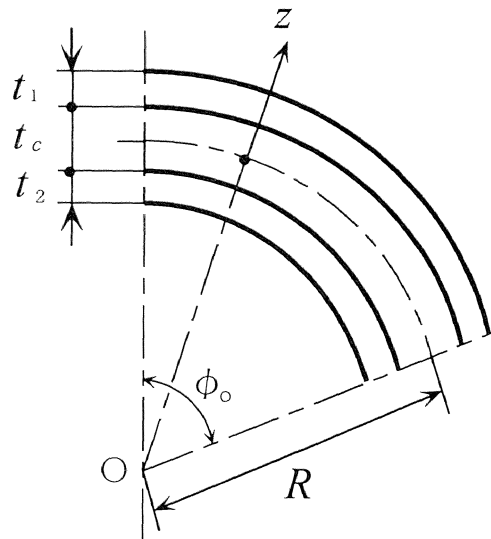
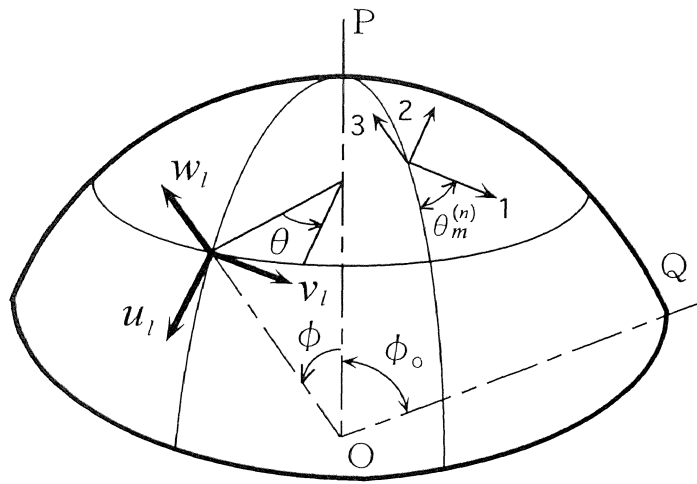


図4-1 複合材サンドイッチ球殻の形状と座標系

4.2.2 変位場の仮定とひずみ

図4-2にサンドイッチ球殻の任意点における変位(ϕ - z 面)を示す. ψ_ϕ および β_ϕ は, それぞれ心材と表面材における z 軸からの回転を表す. θ - z 面についても各回転の添字 ϕ を θ に, u_0 を v_0 に置き換えることにより同様な考え方が可能である. いま, 球殻の厚さは他の寸法に比べて小さいため, 表面材および心材の変形を球殻の中央面における変位量 u_0, v_0 および w_0 を用いて記述することを考えると, ϕ, θ および z 方向の各変位 u_l, v_l および w_l ($l=1, 2, c$) は次のように書ける.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \left(\frac{R+z}{R} \right) u_0 - z\beta_\phi + \frac{t_c}{2} (\beta_\phi - \psi_\phi) \\
 v_1 &= \left(\frac{R+z}{R} \right) v_0 - z\beta_\theta + \frac{t_c}{2} (\beta_\theta - \psi_\theta) \\
 u_2 &= \left(\frac{R+z}{R} \right) u_0 - z\beta_\phi - \frac{t_c}{2} (\beta_\phi - \psi_\phi) \\
 v_2 &= \left(\frac{R+z}{R} \right) v_0 - z\beta_\theta - \frac{t_c}{2} (\beta_\theta - \psi_\theta) \\
 u_c &= \left(\frac{R+z}{R} \right) u_0 - z\psi_\phi \\
 v_c &= \left(\frac{R+z}{R} \right) v_0 - z\psi_\theta \\
 w_1 &= w_2 = w_c = w_0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで, ψ_θ および β_θ は, それぞれ心材と表面材における z 軸からの回転を表す.

微小変形理論に基づくと, 表面材 n ($n=1, 2$) と心材 c のひずみ - 変位関係式は

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\phi^{(l)} &= \frac{1}{R(1+z/R)} \left(\frac{\partial u_l}{\partial \phi} + w_l \right) \\
 \varepsilon_\theta^{(l)} &= \frac{1}{R(1+z/R)} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial v_l}{\partial \theta} + \frac{u_l}{\tan \phi} + w_l \right) \\
 \gamma_{\phi\theta}^{(l)} &= \frac{1}{R(1+z/R)} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial u_l}{\partial \theta} + \frac{\partial v_l}{\partial \phi} - \frac{v_l}{\tan \phi} \right) \\
 \gamma_{\theta z}^{(l)} &= \frac{\partial v_l}{\partial z} + \frac{1}{R(1+z/R)} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial w_l}{\partial \theta} - v_l \right) \\
 \gamma_{z\phi}^{(l)} &= \frac{\partial u_l}{\partial z} + \frac{1}{R(1+z/R)} \left(\frac{\partial w_l}{\partial \phi} - u_l \right)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

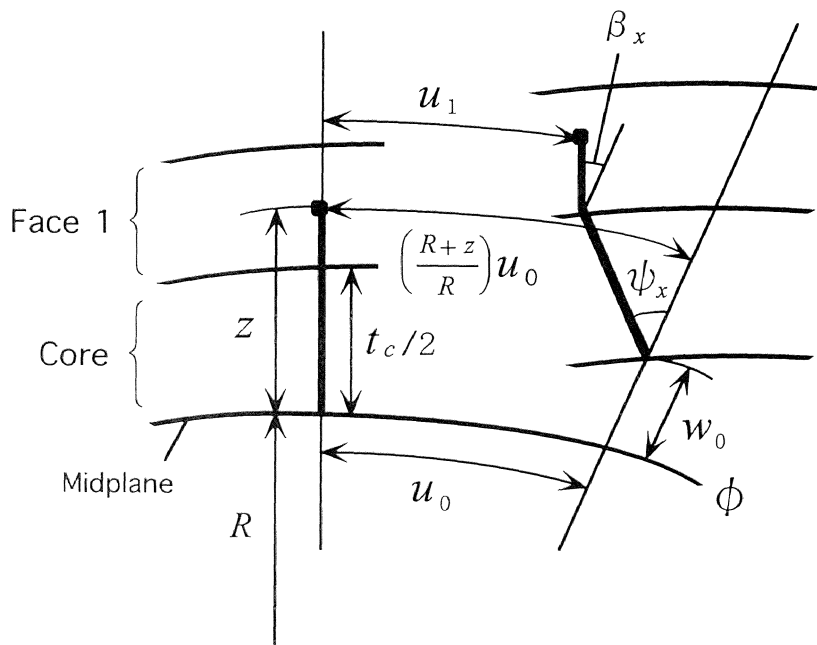


図4-2 サンドイッチ球殻の任意点における変位 (ϕ - z 面)

となる。

これより，式(4.1)を式(4.2)に代入すると表面材 n ($n=1,2$)の各ひずみは

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\phi}^{(n)} &= \varepsilon_{\phi 1} + \frac{1}{1+z/R} \varepsilon_{\phi 2} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\phi 1} + (-1)^n \frac{t_c}{2} \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\phi 2} \\
\varepsilon_{\theta}^{(n)} &= \varepsilon_{\theta 1} + \frac{1}{1+z/R} \varepsilon_{\theta 2} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\theta 1} + (-1)^n \frac{t_c}{2} \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\theta 2} \\
\gamma_{\phi\theta}^{(n)} &= \gamma_{\phi\theta 1} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\phi\theta 1} + (-1)^n \frac{t_c}{2} \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\phi\theta 2} \\
\gamma_{\theta z}^{(n)} &= \gamma_{\theta z 1} + \frac{1}{1+z/R} \gamma_{\theta z 2} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\theta z 1} + (-1)^n \frac{t_c}{2} \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\theta z 2} \\
\gamma_{z\phi}^{(n)} &= \gamma_{z\phi 1} + \frac{1}{1+z/R} \gamma_{z\phi 2} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{z\phi 1} + (-1)^n \frac{t_c}{2} \frac{z}{1+z/R} \kappa_{z\phi 2}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

となり，心材の各ひずみは

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\phi}^{(c)} &= \varepsilon_{\phi 1} + \frac{1}{1+z/R} \varepsilon_{\phi 2} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\phi c} \\
\varepsilon_{\theta}^{(c)} &= \varepsilon_{\theta 1} + \frac{1}{1+z/R} \varepsilon_{\theta 2} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\theta c} \\
\gamma_{\phi\theta}^{(c)} &= \gamma_{\phi\theta 1} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\phi\theta c} \\
\gamma_{\theta z}^{(c)} &= \gamma_{\theta z c} + \frac{1}{1+z/R} \gamma_{\theta z 2} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\theta z c} \\
\gamma_{z\phi}^{(c)} &= \gamma_{z\phi c} + \frac{1}{1+z/R} \gamma_{z\phi 2} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{z\phi c}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

となる．式(4.3)および(4.4)において

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\phi 1} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \phi}, \quad \varepsilon_{\phi 2} = \frac{w_0}{R}, \quad \varepsilon_{\theta 1} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{\tan \phi} \right), \quad \varepsilon_{\theta 2} = \frac{w_0}{R}, \\
\gamma_{\phi\theta 1} &= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial \phi} - \frac{v_0}{\tan \phi} \right), \\
\gamma_{\theta z 1} &= -\beta_{\theta}, \quad \gamma_{\theta z 2} = \frac{1}{R \sin \phi} \frac{\partial w_0}{\partial \theta}, \quad \gamma_{\theta z c} = -\psi_{\theta}, \\
\gamma_{z\phi 1} &= -\beta_{\phi}, \quad \gamma_{z\phi 2} = \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \phi}, \quad \gamma_{z\phi c} = -\psi_{\phi}, \\
\kappa_{\phi 1} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \beta_{\phi}}{\partial \phi}, \quad \kappa_{\phi 2} = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \beta_{\phi}}{\partial \phi} - \frac{\partial \psi_{\phi}}{\partial \phi} \right), \quad \kappa_{\phi c} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi_{\phi}}{\partial \phi}, \\
\kappa_{\theta 1} &= -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \beta_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\beta_{\phi}}{\tan \phi} \right), \quad \kappa_{\theta 2} = -\frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{\sin \phi} \left(\frac{\partial \beta_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\tan \phi} (\beta_{\phi} - \psi_{\phi}) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\theta c} &= -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\psi_{\phi}}{\tan \phi} \right), \\
\kappa_{\phi \theta 1} &= -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \beta_{\phi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_{\theta}}{\partial \phi} - \frac{\beta_{\theta}}{\tan \phi} \right), \\
\kappa_{\phi \theta 2} &= -\frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{\sin \phi} \left(\frac{\partial \beta_{\phi}}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_{\phi}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \beta_{\theta}}{\partial \phi} - \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial \phi} - \frac{1}{\tan \phi} (\beta_{\theta} - \psi_{\theta}) \right\}, \\
\kappa_{\phi \theta c} &= -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \psi_{\phi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_{\theta}}{\partial \phi} - \frac{\psi_{\theta}}{\tan \phi} \right), \\
\kappa_{\theta z 1} &= \frac{\beta_{\theta}}{R}, \quad \kappa_{\theta z 2} = \frac{1}{R} (\beta_{\theta} - \psi_{\theta}), \quad \kappa_{\theta z c} = \frac{\psi_{\theta}}{R}, \\
\kappa_{z \phi 1} &= \frac{\beta_{\phi}}{R}, \quad \kappa_{z \phi 2} = \frac{1}{R} (\beta_{\phi} - \psi_{\phi}), \quad \kappa_{z \phi c} = \frac{\psi_{\phi}}{R}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

である。

4.2.3 応力-ひずみ関係式

表面材における各ラミナは1, 2, 3軸のいずれの軸に対しても対称面をもつ直交異方性材料である。したがって、異方性弾性論における一般化されたフックの法則により表面材 $n(n=1, 2)$ の第 m 層目のラミナにおける応力-ひずみ関係式は式(2.7)で与えられる。式(2.7)中の剛性係数 Q_{ij} は第 m 層目のラミナの内部減衰を考慮した複素弾性係数 E_1^*, E_2^*, G_{12}^* およびポアソン比 ν_{12}, ν_{21} を用いて

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1^*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2^*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{12} &= \frac{E_1^* \nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2^* \nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{44} &= G_{23}^*, \quad Q_{55} = G_{31}^*, \quad Q_{66} = G_{12}^*
\end{aligned} \tag{4.6}$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{aligned}
E_1^* &= E_1(1 + j\delta_1), \quad E_2^* = E_2(1 + j\delta_2), \\
G_{12}^* &= G_{12}(1 + j\delta_{12}), \quad G_{23}^* = G_{23}(1 + j\delta_{23}), \quad G_{31}^* = G_{31}(1 + j\delta_{31}), \quad j = \sqrt{-1}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

である。ここで、 $E_1, E_2, G_{12}, G_{23}, G_{31}$ は各複素弾性係数の実部であり、 $\delta_1, \delta_2, \delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{31}$ は各複素弾性係数における虚部と実部の比を表す材料損

失係数である。

つぎに、各ラミナの材料主軸上における応力-ひずみ関係式(2.7)を図4-1に示す座標 (ϕ, θ, z) 座標に変換すると

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\phi \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{z\phi} \\ \tau_{\phi\theta} \end{Bmatrix}^{(n,m)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\phi \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{z\phi} \\ \gamma_{\phi\theta} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (4.8)$$

となる。式(4.8)中の剛性係数 $\bar{Q}_{ij}^{(n,m)}$ ($i, j=1,2,4,5,6$)はそれぞれ式(2.10)で与えられる。また、ここでは各ラミナの材料主軸1(繊維方向)と ϕ 方向のなす繊維角度 $\theta_m^{(n)}$ は 0° または 90° のいずれかの値をとるため、式(4.8)において

$$\bar{Q}_{16}^{(n,m)} = \bar{Q}_{26}^{(n,m)} = \bar{Q}_{45}^{(n,m)} = 0 \quad (4.9)$$

となる。

一方、粘弾性心材は等方性であるため、応力-ひずみ関係式は材料損失係数 δ_c を考慮した複素縦弾性係数 E_c^* およびポアソン比 ν_c を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\phi \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{z\phi} \\ \tau_{\phi\theta} \end{Bmatrix}^{(c)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(c)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\phi \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{z\phi} \\ \gamma_{\phi\theta} \end{Bmatrix}^{(c)} \quad (4.10)$$

ここで

$$Q_{11}^{(c)} = Q_{22}^{(c)} = \frac{E_c^*}{1-\nu_c^2}, \quad Q_{12}^{(c)} = \frac{E_c^* \nu_c}{1-\nu_c^2}, \quad Q_{44}^{(c)} = Q_{55}^{(c)} = Q_{66}^{(c)} = \frac{E_c^*}{2(1+\nu_c)} \quad (4.11)$$

であり、複素縦弾性係数 E_c^* は E_c を実部として

$$E_c^* = E_c(1+j\delta_c) \quad , \quad j = \sqrt{-1} \quad (4.12)$$

で表せる。

4.2.4 エネルギー評価

サンドイッチ球殻の自由振動に対して角振動数 ω の調和振動を考え、殻の各変位を

$$\begin{aligned}
 u_0(\phi, \theta, t) &= U_0(\phi, \theta) \sin \omega t \\
 v_0(\phi, \theta, t) &= V_0(\phi, \theta) \sin \omega t \\
 w_0(\phi, \theta, t) &= W_0(\phi, \theta) \sin \omega t \\
 \psi_\phi(\phi, \theta, t) &= \bar{\psi}_\phi(\phi, \theta) \sin \omega t \\
 \psi_\theta(\phi, \theta, t) &= \bar{\psi}_\theta(\phi, \theta) \sin \omega t \\
 \beta_\phi(\phi, \theta, t) &= \bar{\beta}_\phi(\phi, \theta) \sin \omega t \\
 \beta_\theta(\phi, \theta, t) &= \bar{\beta}_\theta(\phi, \theta) \sin \omega t
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

のように与える。ここでは、式(4.13)を用いて球殻の最大ひずみエネルギーと最大運動エネルギーを導く。

まず、サンドイッチ球殻の最大ひずみエネルギー U は表面材のひずみエネルギー U_f と心材のひずみエネルギー U_c との和

$$U = U_f + U_c \tag{4.14}$$

で表すことができる。さらに、表面材のひずみエネルギー U_f は、表面材 1 のひずみエネルギー U_{f1} と表面材 2 のひずみエネルギー U_{f2} の和

$$U_f = U_{f1} + U_{f2} \tag{4.15}$$

で与えられる。さらに、表面材のひずみエネルギー U_{fn} ($n=1,2$) は

$$\begin{aligned}
 U_{fn} = \frac{R^2}{2} \sum_{m=1}^{N_n} \int_{h_{m-1}^{(n)}}^{h_m^{(n)}} \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [&\sigma_\phi \varepsilon_\phi + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{\phi\theta} \gamma_{\phi\theta} \\
 &+ \tau_{z\phi} \gamma_{z\phi} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z}]^{(n,m)} (1+z/R)^2 \sin \phi d\phi d\theta dz
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

であり、式(4.8)を式(4.16)に代入し、表面材のひずみエネルギー U_{fn} ($n=1,2$) を剛性係数 $\bar{Q}_{ij}^{(n,m)}$ とひずみで表すと

$$\begin{aligned}
 U_{fn} = \frac{R^2}{2} \sum_{m=1}^{N_n} \int_{h_{m-1}^{(n)}}^{h_m^{(n)}} \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [&\bar{Q}_{11} \varepsilon_\phi^2 + \bar{Q}_{22} \varepsilon_\theta^2 + \bar{Q}_{66} \gamma_{\phi\theta}^2 \\
 &+ 2\bar{Q}_{12} \varepsilon_\phi \varepsilon_\theta + \bar{Q}_{44} \gamma_{z\phi}^2 + \bar{Q}_{55} \gamma_{z\theta}^2]^{(n,m)} (1+z/R)^2 \sin \phi d\phi d\theta dz
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

となる．式(4.3)を式(4.16)に代入し，式(4.13)の最大振幅により表面材のひずみエネルギー U_f を評価すると

$$\begin{aligned}
U_f = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& \{\varepsilon_1\}^T [\tilde{A}] \{\varepsilon_1\} + 2\{\varepsilon_1\}^T [\bar{B}] \{\kappa_1\} + \{\kappa_1\}^T [D] \{\kappa_1\} \\
& - 2t_c \{\varepsilon_1\}^T [\bar{C}] \{\kappa_2\} + 2\{\varepsilon_2\}^T [\bar{A}] \{\varepsilon_3\} - 2t_c \{\kappa_1\}^T [E] \{\kappa_2\} \\
& + 2\{\varepsilon_3\}^T [B] \{\kappa_3\} + (t_c^2/4) \{\kappa_2\}^T [A_1] \{\kappa_2\} \\
& - 2t_c \{\varepsilon_3\}^T [F] \{\kappa_4\} + \{\varepsilon_3\}^T [A_2] \{\varepsilon_3\}] \sin\phi \, d\phi \, d\theta
\end{aligned} \tag{4.18}$$

となる．上式において各剛性マトリックスは

$$\begin{aligned}
[\tilde{A}] &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f \tilde{A}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_f \tilde{A}_{55} \end{bmatrix}, & [\bar{A}] &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & 0 & 0 \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_f \bar{A}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f \bar{A}_{55} \end{bmatrix} \\
[A_1] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_f A_{55} \end{bmatrix}, & [A_2] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_f A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f A_{55} \end{bmatrix} \\
[\bar{B}] &= \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_{12} & \bar{B}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{B}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f \bar{B}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_f \bar{B}_{55} \end{bmatrix}, & [B] &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_f B_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f B_{55} \end{bmatrix} \\
[\bar{C}] &= \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f \bar{C}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_f \bar{C}_{55} \end{bmatrix}, & [D] &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_f D_{55} \end{bmatrix} \\
[E] &= \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_f E_{55} \end{bmatrix}, & [F] &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_f F_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f F_{55} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

となる．ここで， k_f は表面材のせん断補正係数である．また，各マトリックスの要素は

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= A_{ij}^{(1)} + A_{ij}^{(2)}, \quad B_{ij} = B_{ij}^{(1)} + B_{ij}^{(2)}, \quad D_{ij} = D_{ij}^{(1)} + D_{ij}^{(2)} \\
\tilde{A}_{ij} &= A_{ij} + \frac{2}{R} B_{ij} + \frac{1}{R^2} D_{ij}, \quad \bar{A}_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{R} B_{ij} \\
\bar{B}_{ij} &= B_{ij} + \frac{1}{R} D_{ij}, \quad \bar{C}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ A_{ij}^{(1)} - A_{ij}^{(2)} + \frac{1}{R} (B_{ij}^{(1)} - B_{ij}^{(2)}) \right\}, \\
E_{ij} &= \frac{1}{2} (B_{ij}^{(1)} - B_{ij}^{(2)}), \quad F_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij}^{(1)} - A_{ij}^{(2)}) \\
(A_{ij}^{(n)}, B_{ij}^{(n)}, D_{ij}^{(n)}) &= \sum_{m=1}^{N_n} \int_{h_{n-1}^{(n)}}^{h_m^{(n)}} Q_{ij}^{(n,m)}(1, z, z^2) dz \quad (n=1,2 \mid i,j=1,2,4,5,6)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

となる．また，各ひずみベクトルは次のようになる．

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon_1\} &= \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial U_0}{\partial \phi}, \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + \frac{U_0}{\tan \phi} \right), \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial U_0}{\partial \theta} + \frac{\partial V_0}{\partial \phi} - \frac{V_0}{\tan \phi} \right), -\bar{\beta}_\theta, -\bar{\beta}_\phi \right\}^T \\
\{\varepsilon_2\} &= \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial U_0}{\partial \phi}, \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + \frac{U_0}{\tan \phi} \right), -\bar{\beta}_\theta, -\bar{\beta}_\phi \right\}^T \\
\{\varepsilon_3\} &= \left\{ \frac{W_0}{R}, \frac{W_0}{R}, \frac{1}{R \sin \phi} \frac{\partial W_0}{\partial \theta}, \frac{1}{R} \frac{\partial W_0}{\partial \phi} \right\}^T \\
\{\kappa_1\} &= \left\{ -\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{\beta}_\phi}{\partial \phi}, -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{\beta}_\phi}{\tan \phi} \right), -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{\beta}_\phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \phi} - \frac{\bar{\beta}_\theta}{\tan \phi} \right), \frac{\bar{\beta}_\theta}{R}, \frac{\bar{\beta}_\phi}{R} \right\}^T \\
\{\kappa_2\} &= \left\{ -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial \bar{\psi}_\phi}{\partial \phi} \right), -\frac{1}{R \sin \phi} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{R \tan \phi} (\bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi), \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{R \sin \phi} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{R \partial \phi} + \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{R \partial \phi} + \frac{1}{R \tan \phi} (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta), \frac{\bar{\beta}_\theta}{R} - \frac{\bar{\psi}_\theta}{R}, \frac{\bar{\beta}_\phi}{R} - \frac{\bar{\psi}_\phi}{R} \right\}^T \\
\{\kappa_3\} &= \left\{ -\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{\beta}_\phi}{\partial \phi}, -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{\beta}_\phi}{\tan \phi} \right), \frac{\bar{\beta}_\theta}{R}, \frac{\bar{\beta}_\phi}{R} \right\}^T \\
\{\kappa_4\} &= \left\{ -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial \bar{\psi}_\phi}{\partial \phi} \right), -\frac{1}{R \sin \phi} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{R \tan \phi} (\bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{R} (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta), \frac{1}{R} (\bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi) \right\}^T
\end{aligned} \tag{4.21}$$

一方，心材のひずみエネルギー U_c は

$$U_c = \frac{R^2}{2} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\sigma_\phi^{(c)} \varepsilon_\phi^{(c)} + \sigma_\theta^{(c)} \varepsilon_\theta^{(c)} + \tau_{\phi\theta}^{(c)} \gamma_{\phi\theta}^{(c)} + \tau_{\theta z}^{(c)} \gamma_{\theta z}^{(c)} + \tau_{z\phi}^{(c)} \gamma_{z\phi}^{(c)}] (1+z/R)^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, dz \quad (4.22)$$

である．式(4.10)を式(4.22)に代入し，心材のひずみエネルギー U_c を剛性係数 $Q_{ij}^{(c)}$ ($i, j=1, 2, 6$) とひずみで表すと

$$U_c = \frac{R^2}{2} \int_{-l_c/2}^{l_c/2} \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [Q_{11} \varepsilon_\phi^2 + Q_{22} \varepsilon_\theta^2 + Q_{66} \gamma_{\phi\theta}^2 + 2Q_{12} \varepsilon_\phi \varepsilon_\theta + Q_{44} \gamma_{\theta z}^2 + Q_{55} \gamma_{z\phi}^2]^{(c)} (1+z/R)^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, dz \quad (4.23)$$

となる．つぎに，式(4.4)を式(4.23)に代入し，式(4.13)の最大振幅により心材のひずみエネルギー U_c を評価すると

$$U_c = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\{\varepsilon_{c1}\}^T [\tilde{A}_c] \{\varepsilon_{c1}\} + 2\{\varepsilon_{c1}\}^T [\bar{B}_c] \{\kappa_c\} + \{\kappa_c\}^T [D_c] \{\kappa_c\} + 2\{\varepsilon_{c2}\}^T [A_c] \{\varepsilon_{c3}\} + \{\varepsilon_{c3}\}^T [A_c] \{\varepsilon_{c3}\}] \sin\phi \, d\phi \, d\theta \quad (4.24)$$

となる．上式において各剛性マトリックスは

$$[\tilde{A}_c] = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_c \tilde{A}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_c \tilde{A}_{55} \end{bmatrix}^{(c)},$$

$$[\bar{B}_c] = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_{12} & \bar{B}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{B}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_c \bar{B}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_c \bar{B}_{55} \end{bmatrix}^{(c)},$$

$$[D_c] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_c D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_c D_{55} \end{bmatrix}^{(c)},$$

$$[A_c] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_c A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_c A_{55} \end{bmatrix}^{(c)} \quad (4.25)$$

である．ここで， k_c は心材のせん断補正係数であり，各マトリックスの要素は

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij}^{(c)} &= \int_{-t_c/2}^{t_c/2} Q_{ij}^{(c)} (1+z/R)^2 dz = A_{ij}^{(c)} + \frac{1}{R^2} D_{ij}^{(c)} \\ \bar{B}_{ij}^{(c)} &= \int_{-t_c/2}^{t_c/2} Q_{ij}^{(c)} z (1+z/R) dz = \frac{1}{R} D_{ij}^{(c)} \\ A_{ij}^{(c)} &= \int_{-t_c/2}^{t_c/2} Q_{ij}^{(c)} dz = t_c Q_{ij}^{(c)} \\ D_{ij}^{(c)} &= \int_{-t_c/2}^{t_c/2} z^2 Q_{ij}^{(c)} dz = \frac{t_c^3}{12} Q_{ij}^{(c)} \end{aligned} \quad (4.26)$$

である．また，式(4.24)の各ひずみベクトルは

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_{c1}\} &= \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial U_0}{\partial \phi}, \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + \frac{U_0}{\tan \phi} \right), \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial U_0}{\partial \theta} + \frac{\partial V_0}{\partial \phi} - \frac{V_0}{\tan \phi} \right), -\bar{\psi}_\theta, -\bar{\psi}_\phi \right\}^T \\ \{\varepsilon_{c2}\} &= \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial U_0}{\partial \phi}, \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + \frac{U_0}{\tan \phi} \right), -\bar{\psi}_\theta, -\bar{\psi}_\phi \right\}^T \\ \{\varepsilon_{c3}\} &= \left\{ \frac{W_0}{R}, \frac{W_0}{R}, \frac{1}{R \sin \phi} \frac{\partial W_0}{\partial \theta}, \frac{1}{R} \frac{\partial W_0}{\partial \phi} \right\}^T \\ \{\kappa_c\} &= \left\{ -\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{\psi}_\phi}{\partial \phi}, -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{\psi}_\phi}{\tan \phi} \right), -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{\psi}_\phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \phi} - \frac{\bar{\psi}_\theta}{\tan \phi} \right), \frac{\bar{\psi}_\theta}{R}, \frac{\bar{\psi}_\phi}{R} \right\}^T \end{aligned} \quad (4.27)$$

となる．

一方，サンドイッチ球殻の最大運動エネルギー T は表面材の運動エネルギー T_f と心材の運動エネルギー T_c との和で次のように表すことができる．

$$T = T_f + T_c \quad (4.28)$$

さらに，表面材の運動エネルギー T_f は表面材1の運動エネルギー T_{f1} と表面材2の運動エネルギー T_{f2} の和

$$T_f = T_{f1} + T_{f2} \quad (4.29)$$

で与えられる．表面材 n の運動エネルギー T_{fn} ($n=1,2$)はそれぞれ

$$T_{f1} = \frac{\rho_1}{2} R^2 \int_{t_c/2}^{t_c/2+t_1} \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2 + \dot{w}_1^2] (1+z/R)^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, dz \quad (4.30)$$

$$T_{f2} = \frac{\rho_2}{2} R^2 \int_{-t_c/2-t_2}^{-t_c/2} \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\dot{u}_2^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{w}_2^2] (1+z/R)^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, dz \quad (4.31)$$

と表すことができる．

つぎに，心材の運動エネルギー T_c は

$$T_c = \frac{\rho_c}{2} R^2 \int_{-t_c/2}^{t_c/2} \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2 + \dot{w}_c^2] (1+z/R)^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \, dz \quad (4.32)$$

となる．式(4.30)，(4.31)および(4.32)において， ρ_n および ρ_c はそれぞれ表面材と心材の平均密度であり， $(\dot{\quad})$ は時間微分を表す．式(4.13)を代入した式(4.1)を式(4.30)~(4.32)に代入し， z 方向に積分すると，サンドイッチ球殻の最大運動エネルギー T は変位の最大振幅を用いて次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} T = \frac{\omega^2}{2} R^2 \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& I_1 (U_0^2 + V_0^2) \\ & + I_2 (U_0 \bar{\beta}_\phi + V_0 \bar{\beta}_\theta) \\ & + I_3 t_c \{ U_0 (\bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi) + V_0 (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \} \\ & + I_4 (\bar{\beta}_\phi^2 + \bar{\beta}_\theta^2) \\ & + I_5 t_c \{ \bar{\beta}_\phi (\bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi) + \bar{\beta}_\theta (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \} \\ & + I_6 (t_c^2/4) \{ (\bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi)^2 + (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta)^2 \} \\ & + I_7 (U_0 \bar{\psi}_\phi + V_0 \bar{\psi}_\theta) \\ & + I_8 (\bar{\psi}_\phi^2 + \bar{\psi}_\theta^2) \\ & + I_9 W_0^2] \sin\phi \, d\phi \, d\theta \end{aligned} \quad (4.33)$$

上式において, I_i ($i=1,2,3,\dots,9$) は慣性量であり

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\rho_1 R}{5} \left\{ \left(1 + \frac{t_c}{2R} + \frac{t_1}{R}\right)^5 - \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^5 \right\} + \frac{\rho_2 R}{5} \left\{ \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^5 - \left(1 - \frac{t_c}{2R} - \frac{t_2}{R}\right)^5 \right\} \\
&\quad + \frac{\rho_c R}{5} \left\{ \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^5 - \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^5 \right\} \\
I_2 &= -2\rho_1 R^2 \left\{ \frac{1}{5} \left(1 + \frac{t_c}{2R} + \frac{t_1}{R}\right)^5 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{t_c}{2R} + \frac{t_1}{R}\right)^4 - \frac{1}{5} \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^5 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^4 \right\} \\
&\quad - 2\rho_2 R^2 \left\{ -\frac{1}{5} \left(1 - \frac{t_c}{2R} - \frac{t_2}{R}\right)^5 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{t_c}{2R} - \frac{t_2}{R}\right)^4 + \frac{1}{5} \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^5 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^4 \right\} \\
I_3 &= \frac{\rho_1 R}{4} \left\{ \left(1 + \frac{t_c}{2R} + \frac{t_1}{R}\right)^4 - \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^4 \right\} - \frac{\rho_2 R}{4} \left\{ -\left(1 - \frac{t_c}{2R} - \frac{t_2}{R}\right)^4 + \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^4 \right\} \\
I_4 &= \rho_1 R^3 \left\{ \frac{1}{5} \left(1 + \frac{t_c}{2R} + \frac{t_1}{R}\right)^5 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_c}{2R} + \frac{t_1}{R}\right)^4 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{t_c}{2R} + \frac{t_1}{R}\right)^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{5} \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^5 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^4 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^3 \right\} \\
&\quad + \rho_2 R^3 \left\{ -\frac{1}{5} \left(1 - \frac{t_c}{2R} - \frac{t_2}{R}\right)^5 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t_c}{2R} - \frac{t_2}{R}\right)^4 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{t_c}{2R} - \frac{t_2}{R}\right)^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{5} \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^5 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^4 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^3 \right\} \\
I_5 &= -\rho_1 R^2 \left\{ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{t_c}{2R} + \frac{t_1}{R}\right)^4 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{t_c}{2R} + \frac{t_1}{R}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^4 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^3 \right\} \\
&\quad + \rho_2 R^2 \left\{ -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{t_c}{2R} - \frac{t_2}{R}\right)^4 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{t_c}{2R} - \frac{t_2}{R}\right)^3 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^4 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^3 \right\} \\
I_6 &= \frac{\rho_1 R}{3} \left\{ \left(1 + \frac{t_c}{2R} + \frac{t_1}{R}\right)^3 - \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^3 \right\} + \frac{\rho_2 R}{3} \left\{ -\left(1 - \frac{t_c}{2R} - \frac{t_2}{R}\right)^3 + \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^3 \right\} \\
I_7 &= -2\rho_c R^2 \left\{ \frac{1}{5} \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^5 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{t_c}{2R}\right)^4 - \frac{1}{5} \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^5 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{t_c}{2R}\right)^4 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8 &= \rho_c R^3 \left\{ \frac{1}{5} \left(1 + \frac{t_c}{2R} \right)^5 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_c}{2R} \right)^4 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{t_c}{2R} \right)^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{5} \left(1 - \frac{t_c}{2R} \right)^5 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t_c}{2R} \right)^4 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{t_c}{2R} \right)^3 \right\} \\
I_9 &= \frac{\rho_1 R}{3} \left\{ \left(1 + \frac{t_c}{2R} + \frac{t_1}{R} \right)^3 - \left(1 + \frac{t_c}{2R} \right)^3 \right\} + \frac{\rho_2 R}{3} \left\{ - \left(1 - \frac{t_c}{2R} - \frac{t_2}{R} \right)^3 + \left(1 - \frac{t_c}{2R} \right)^3 \right\} \\
&\quad + \frac{\rho_c R}{3} \left\{ \left(1 + \frac{t_c}{2R} \right)^3 - \left(1 - \frac{t_c}{2R} \right)^3 \right\}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

となる。

つぎに、解析の簡単化のために、サンドイッチ球殻の最大ひずみエネルギー U と最大運動エネルギー T に次の無次元量を導入する。ただし、 $H = t_1 + t_2 + t_c$ である

$$(\text{寸法比}) \quad \alpha = H/R, \quad \mu_1 = t_1/R, \quad \mu_2 = t_2/R, \quad \mu_3 = t_c/R$$

$$(\text{無次元変位}) \quad \bar{u} = U_0/H, \quad \bar{v} = V_0/H, \quad \bar{w} = W_0/H$$

$$(\text{密度比}) \quad \lambda_2 = \rho_2/\rho_1, \quad \lambda_3 = \rho_c/\rho_1$$

$$\begin{aligned}
(\text{無次元剛性}) \quad & (A_{ij}^*, \bar{A}_{ij}^*, \tilde{A}_{ij}^*, \bar{C}_{ij}^*, F_{ij}^*, A_{ij}^{(c)*}, \tilde{A}_{ij}^{(c)*}) \\
& = (A_{ij}, \bar{A}_{ij}, \tilde{A}_{ij}, \bar{C}_{ij}, F_{ij}, A_{ij}^{(c)}, \tilde{A}_{ij}^{(c)}) / (E_1 R) \\
& (B_{ij}^*, \bar{B}_{ij}^*, E_{ij}^*, \bar{B}_{ij}^{(c)*}) = (B_{ij}, \bar{B}_{ij}, E_{ij}, \bar{B}_{ij}^{(c)}) / (E_1 R^2) \\
& D_{ij}^* = D_{ij} / (E_1 R^3) \\
& (i, j = 1, 2, 4, 5, 6)
\end{aligned}$$

$$(\text{無次元振動数}) \quad \Lambda = \omega R \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} \tag{4.35}$$

式(4.35)の無次元量を式(4.18)と(4.24)に代入すると、球殻の最大ひずみエネルギー U は次のように書き直せる。

$$\begin{aligned}
U = \frac{E_1 R^3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_0} [& \{\bar{\varepsilon}_1\}^T [\tilde{A}^*] \{\bar{\varepsilon}_1\} + 2 \{\bar{\varepsilon}_1\}^T [\bar{B}^*] \{\bar{\kappa}_1\} \\
& + \{\bar{\kappa}_1\}^T [D^*] \{\bar{\kappa}_1\} - 2 \mu_3 \{\bar{\varepsilon}_1\}^T [\bar{C}^*] \{\bar{\kappa}_2\} \\
& + 2\alpha \{\bar{\varepsilon}_2\}^T [\bar{A}^*] \{\bar{\varepsilon}_3\} - 2 \mu_3 \{\bar{\kappa}_1\}^T [E^*] \{\bar{\kappa}_2\} \\
& + 2\alpha \{\bar{\varepsilon}_3\}^T [B^*] \{\bar{\kappa}_3\} + (\mu_3^2/4) \{\bar{\kappa}_2\}^T [A_1^*] \{\bar{\kappa}_2\} \\
& - 2\alpha \mu_3 \{\bar{\varepsilon}_3\}^T [F^*] \{\bar{\kappa}_4\} + \alpha^2 \{\bar{\varepsilon}_3\}^T [A_2^*] \{\bar{\varepsilon}_3\} \\
& + \{\bar{\varepsilon}_{c1}\}^T [\tilde{A}^{(c)*}] \{\bar{\varepsilon}_{c1}\} + 2 \{\bar{\varepsilon}_{c1}\}^T [\bar{B}^{(c)*}] \{\bar{\kappa}_c\} \\
& + \{\bar{\kappa}_c\}^T [D^{(c)*}] \{\bar{\kappa}_c\} + 2\alpha \{\bar{\varepsilon}_{c2}\}^T [A^{(c)*}] \{\bar{\varepsilon}_{c3}\} \\
& + \alpha^2 \{\bar{\varepsilon}_{c3}\}^T [A^{(c)*}] \{\bar{\varepsilon}_{c3}\}] \sin \phi \, d\phi \, d\theta
\end{aligned} \tag{4.36}$$

ここで、各剛性マトリックスは式(4.19)および式(4.25)を式(4.35)の定義に従い無次元化したものである。また、式(4.36)の各ひずみベクトルは次のようになる。

$$\begin{aligned}
\{\bar{\varepsilon}_1\} &= \left\{ \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi}, \alpha \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}}{\tan \phi} \right), \alpha \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} - \frac{\bar{v}}{\tan \phi} \right), -\bar{\beta}_\theta, -\bar{\beta}_\phi \right\}^T \\
\{\bar{\varepsilon}_2\} &= \left\{ \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi}, \alpha \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}}{\tan \phi} \right), -\bar{\beta}_\theta, -\bar{\beta}_\phi \right\}^T \\
\{\bar{\varepsilon}_3\} &= \left\{ \bar{w}, \bar{w}, \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \phi} \right\}^T \\
\{\bar{\kappa}_1\} &= \left\{ -\frac{\partial \bar{\beta}_\phi}{\partial \phi}, -\left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{\beta}_\phi}{\tan \phi} \right), -\left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{\beta}_\phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \phi} - \frac{\bar{\beta}_\theta}{\tan \phi} \right), \bar{\beta}_\theta, \bar{\beta}_\phi \right\}^T \\
\{\bar{\kappa}_2\} &= \left\{ -\left(\frac{\partial \bar{\beta}_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial \bar{\psi}_\phi}{\partial \phi} \right), -\frac{1}{\sin \phi} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\tan \phi} (\bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi), \right. \\
& \quad \left. -\frac{1}{\sin \phi} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \phi} + \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{\tan \phi} (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta), \bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta, \bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi \right\}^T \\
\{\bar{\kappa}_3\} &= \left\{ -\frac{\partial \bar{\beta}_\phi}{\partial \phi}, -\left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{\beta}_\phi}{\tan \phi} \right), \bar{\beta}_\theta, \bar{\beta}_\phi \right\}^T \\
\{\bar{\kappa}_4\} &= \left\{ -\left(\frac{\partial \bar{\beta}_\phi}{\partial \phi} - \frac{\partial \bar{\psi}_\phi}{\partial \phi} \right), -\frac{1}{\sin \phi} \left(\frac{\partial \bar{\beta}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\tan \phi} (\bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi), \right. \\
& \quad \left. \bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta, \bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi \right\}^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\bar{\varepsilon}_{c1}\} &= \left\{ \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi}, \alpha \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}}{\tan \phi} \right), \alpha \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} - \frac{\bar{v}}{\tan \phi} \right), -\bar{\psi}_\theta, -\bar{\psi}_\phi \right\}^T \\
\{\bar{\varepsilon}_{c2}\} &= \left\{ \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi}, \alpha \left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}}{\tan \phi} \right), -\bar{\psi}_\theta, -\bar{\psi}_\phi \right\}^T \\
\{\bar{\varepsilon}_{c3}\} &= \left\{ \bar{w}, \bar{w}, \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \phi} \right\}^T \\
\{\bar{\kappa}_c\} &= \left\{ -\frac{\partial \bar{\psi}_\phi}{\partial \phi}, -\left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{\psi}_\phi}{\tan \phi} \right), -\left(\frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{\psi}_\phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\psi}_\theta}{\partial \phi} - \frac{\bar{\psi}_\theta}{\tan \phi} \right), \bar{\psi}_\theta, \bar{\psi}_\phi \right\}^T
\end{aligned} \tag{4.37}$$

式(4.35)の無次元量を式(4.33)に代入すると、球殻の最大運動エネルギー T は次のように書き直せる。

$$\begin{aligned}
T = \frac{E_1 R^3}{2} \Lambda^2 \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& \bar{I}_1 \alpha^2 (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \\
& + \bar{I}_2 \alpha (\bar{u} \bar{\beta}_\phi + \bar{v} \bar{\beta}_\theta) \\
& + \bar{I}_3 \alpha \mu_3 \{ \bar{u} (\bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi) + \bar{v} (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \} \\
& + \bar{I}_4 (\bar{\beta}_\phi^2 + \bar{\beta}_\theta^2) \\
& + \bar{I}_5 \mu_3 \{ \bar{\beta}_\phi (\bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi) + \bar{\beta}_\theta (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta) \} \\
& + \bar{I}_6 \mu_3^2 \{ (\bar{\beta}_\phi - \bar{\psi}_\phi)^2 + (\bar{\beta}_\theta - \bar{\psi}_\theta)^2 \} \\
& + \bar{I}_7 \alpha \lambda_3 (\bar{u} \bar{\psi}_\phi + \bar{v} \bar{\psi}_\theta) \\
& + \bar{I}_8 \lambda_3 (\bar{\psi}_\phi^2 + \bar{\psi}_\theta^2) \\
& + \bar{I}_9 \alpha^2 \bar{w}^2] \sin \phi d\phi d\theta
\end{aligned} \tag{4.38}$$

ここで、 \bar{I}_i ($i=1,2,\dots,9$) は無次元化された慣性量であり、それぞれ

$$\begin{aligned}
\bar{I}_1 &= \left\{ (1 + \mu_1 + \mu_3/2)^5 - (1 + \mu_3/2)^5 \right\} / 5 + \lambda_2 \left\{ -(1 - \mu_2 - \mu_3/2)^5 + (1 - \mu_3/2)^5 \right\} / 5 \\
&+ \lambda_3 \left\{ -(1 - \mu_3/2)^5 + (1 + \mu_3/2)^5 \right\} / 5 \\
\bar{I}_2 &= -2 \left\{ (1 + \mu_1 + \mu_3/2)^5 / 5 - (1 + \mu_1 + \mu_3/2)^4 / 4 - (1 + \mu_3/2)^5 / 5 + (1 + \mu_3/2)^4 / 4 \right\} \\
&- 2 \lambda_2 \left\{ -(1 - \mu_2 - \mu_3/2)^5 / 5 + (1 - \mu_2 - \mu_3/2)^4 / 4 + (1 - \mu_3/2)^5 / 5 - (1 - \mu_3/2)^4 / 4 \right\} \\
\bar{I}_3 &= \left\{ (1 + \mu_1 + \mu_3/2)^4 - (1 + \mu_3/2)^4 \right\} / 4 + \lambda_2 \left\{ -(1 - \mu_2 - \mu_3/2)^4 + (1 - \mu_3/2)^4 \right\} / 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= (1 + \mu_1 + \mu_3/2)^5/5 - (1 + \mu_1 + \mu_3/2)^4/2 + (1 + \mu_1 + \mu_3/2)^3/3 \\
&\quad - (1 + \mu_3/2)^5/5 + (1 + \mu_3/2)^4/2 - (1 + \mu_3/2)^3/3 \\
&\quad + \lambda_2 \{ -(1 - \mu_2 - \mu_3/2)^5/5 + (1 - \mu_2 - \mu_3/2)^4/2 - (1 - \mu_2 - \mu_3/2)^3/3 \\
&\quad + (1 - \mu_3/2)^5/5 - (1 - \mu_3/2)^4/2 + (1 - \mu_3/2)^3/3 \} \\
\bar{I}_5 &= -(1 + \mu_1 + \mu_3/2)^4/4 + (1 + \mu_1 + \mu_3/2)^3/3 + (1 + \mu_3/2)^4/4 - (1 + \mu_3/2)^3/3 \\
&\quad + \lambda_2 \{ -(1 - \mu_1 - \mu_3/2)^4/4 + (1 - \mu_1 - \mu_3/2)^3/3 + (1 - \mu_3/2)^4/4 - (1 - \mu_3/2)^3/3 \} \\
\bar{I}_6 &= \{ (1 + \mu_1 + \mu_3/2)^3 - (1 + \mu_3/2)^3 \} / 12 + \lambda_2 \{ -(1 - \mu_2 - \mu_3/2)^3 + (1 - \mu_3/2)^3 \} / 12 \\
\bar{I}_7 &= 2 \{ (1 + \mu_3/2)^5 - (1 - \mu_3/2)^5 \} / 5 + \{ -(1 + \mu_3/2)^4 + (1 - \mu_3/2)^4 \} / 2 \\
\bar{I}_8 &= \{ (1 + \mu_3/2)^5 - (1 - \mu_3/2)^5 \} / 5 + \{ -(1 + \mu_3/2)^4 + (1 - \mu_3/2)^4 \} / 2 \\
&\quad + \{ (1 + \mu_3/2)^3 - (1 - \mu_3/2)^3 \} / 3 \\
\bar{I}_9 &= \{ (1 + \mu_1 + \mu_3/2)^3 - (1 + \mu_3/2)^3 \} / 3 + \lambda_2 \{ -(1 - \mu_2 - \mu_3/2)^3 + (1 - \mu_3/2)^3 \} / 3 \\
&\quad + \lambda_3 \{ -(1 - \mu_3/2)^3 + (1 + \mu_3/2)^3 \} / 3
\end{aligned} \tag{4.39}$$

となる。

4.2.5 変位関数と振動数方程式

球殻の端における幾何学的境界条件を満足する変位関数を試験関数 $X_{ni}(\phi)$ と三角関数の積による級数により次のように仮定する。

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\phi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} U_i X_{1i}(\phi) \cos N\theta \\
\bar{v}(\phi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} V_i X_{2i}(\phi) \sin N\theta \\
\bar{w}(\phi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} W_i X_{3i}(\phi) \cos N\theta \\
\bar{\psi}_\phi(\phi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} \psi_{\phi i} X_{4i}(\phi) \cos N\theta \\
\bar{\psi}_\theta(\phi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} \psi_{\theta i} X_{5i}(\phi) \sin N\theta \\
\bar{\beta}_\phi(\phi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} \beta_{\phi i} X_{6i}(\phi) \cos N\theta \\
\bar{\beta}_\theta(\phi, \theta) &= \sum_{i=0}^{l-1} \beta_{\theta i} X_{7i}(\phi) \sin N\theta
\end{aligned} \tag{4.40}$$

ここで、上式中の U_i , V_i , W_i , $\psi_{\phi i}$, $\psi_{\theta i}$, $\beta_{\phi i}$, $\beta_{\theta i}$ は未定係数であり、 N は周方向波数を表す。また、試験関数 $X_{ni}(\phi)$ は選択する境界条件により決定される。本解析では、固定および単純支持の二つの境界条件を扱い、各々の境界条件において使用する試験関数を次のように使い分ける。

(a) 固定 (全ての変位と回転を拘束)

$$\text{拘束条件 : } \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \bar{\psi}_\phi = \bar{\psi}_\theta = \bar{\beta}_\phi = \bar{\beta}_\theta = 0 \text{ at } \phi = \phi_0$$

$$X_{1i}(\phi) = X_{2i}(\phi) = X_{3i}(\phi) = X_{4i}(\phi) = X_{5i}(\phi) = X_{6i}(\phi) = X_{7i}(\phi) = \phi^i(\phi - \phi_0) \quad (4.41)$$

(b) 単純支持 (全ての変位と θ 方向の回転を拘束, ϕ 方向の回転は非拘束)

$$\text{拘束条件 : } \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \bar{\psi}_\theta = \bar{\beta}_\theta = 0 \text{ at } \phi = \phi_0$$

$$X_{1i}(\phi) = X_{2i}(\phi) = X_{3i}(\phi) = X_{5i}(\phi) = X_{7i}(\phi) = \phi^i(\phi - \phi_0) \quad (4.42)$$

$$X_{4i}(\phi) = X_{6i}(\phi) = \phi^i$$

つぎに、ラグランジュ関数 $L = T - U$ に関する停留条件を用いて、サンドイッチ球殻の振動数方程式を誘導する。このために、式(4.40)の変位関数を最大ひずみエネルギー式(4.36)および最大運動エネルギー式(4.38)に代入し、ラグランジュ関数 $L = T - U$ に停留条件

$$\frac{\partial L}{\partial U_m} = \frac{\partial L}{\partial V_m} = \frac{\partial L}{\partial W_m} = \frac{\partial L}{\partial \psi_{\phi m}} = \frac{\partial L}{\partial \psi_{\theta m}} = \frac{\partial L}{\partial \beta_{\phi m}} = \frac{\partial L}{\partial \beta_{\theta m}} = 0 \quad (4.43)$$

$$(m = 1, 2, \dots, I)$$

を適用すると、次の振動数方程式が得られる。

$$[[K_i^{(m)}] - \Lambda^2 [M_i^{(m)}]] \left\{ \begin{array}{c} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \psi_{\phi i} \\ \psi_{\theta i} \\ \beta_{\phi i} \\ \beta_{\theta i} \end{array} \right\} = 0 \quad (4.44)$$

$$(i, m = 1, 2, \dots, I)$$

減衰を考慮した複素数で各弾性係数を扱う場合、 $[K_i^{(m)}]$ は複素剛性マトリックスとなるため、式(4.44)は複素固有値問題となる。この複素固有値問題の複素固有値として Λ^2 が得られ、 Λ^2 が

$$\Lambda^2 = \text{Re}(\Lambda^2) + j \text{Im}(\Lambda^2) = \text{Re}(\Lambda^2) \left[1 + j \frac{\text{Im}(\Lambda^2)}{\text{Re}(\Lambda^2)} \right], \quad j = \sqrt{-1} \quad (4.45)$$

の形で表されるとき、無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η を次のように再定義する。

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{\text{Re}(\Lambda^2)} \\ \eta &= \frac{\text{Im}(\Lambda^2)}{\text{Re}(\Lambda^2)} \end{aligned} \quad (4.46)$$

ただし、 $\text{Re}(\Lambda^2)$ と $\text{Im}(\Lambda^2)$ はそれぞれ Λ^2 の実部と虚部を表す。また、各固有値に対応する固有ベクトルとして、未定係数によるベクトル $\{U_i \ V_i \ W_i \ \psi_{\phi i} \ \psi_{\theta i} \ \beta_{\phi i} \ \beta_{\theta i}\}^T$ が得られ、未定係数を式(4.40)の変位に代入することにより振動モードが求められる。

ここで、式(4.44)中の係数マトリックス $[K_i^{(m)}]$ および $[M_i^{(m)}]$ は

$$[K_i^{(m)}] = \begin{bmatrix} Kaa_i^{(m)} & Kab_i^{(m)} & Kac_i^{(m)} & Kad_i^{(m)} & Kae_i^{(m)} & Kaf_i^{(m)} & Kag_i^{(m)} \\ & Kbb_i^{(m)} & Kbc_i^{(m)} & Kbd_i^{(m)} & Kbe_i^{(m)} & Kbf_i^{(m)} & Kbg_i^{(m)} \\ & & Kcc_i^{(m)} & Kcd_i^{(m)} & Kce_i^{(m)} & Kcf_i^{(m)} & Kcg_i^{(m)} \\ & & & Kdd_i^{(m)} & Kde_i^{(m)} & Kdf_i^{(m)} & Kdg_i^{(m)} \\ & & & & Kee_i^{(m)} & Kef_i^{(m)} & Keg_i^{(m)} \\ & \text{Sym.} & & & & Kff_i^{(m)} & Kfg_i^{(m)} \\ & & & & & & Kgg_i^{(m)} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$[M_i^{(m)}] = \begin{bmatrix} Maa_i^{(m)} & Mab_i^{(m)} & Mac_i^{(m)} & Mad_i^{(m)} & Mae_i^{(m)} & Maf_i^{(m)} & Mag_i^{(m)} \\ & Mbb_i^{(m)} & Mbc_i^{(m)} & Mbd_i^{(m)} & Mbe_i^{(m)} & Mbf_i^{(m)} & Mbg_i^{(m)} \\ & & Mcc_i^{(m)} & Mcd_i^{(m)} & Mce_i^{(m)} & Mcf_i^{(m)} & Mcg_i^{(m)} \\ & & & Mdd_i^{(m)} & Mde_i^{(m)} & Mdf_i^{(m)} & Mdg_i^{(m)} \\ & & & & Mee_i^{(m)} & Mef_i^{(m)} & Meg_i^{(m)} \\ & \text{Sym.} & & & & Mff_i^{(m)} & Mfg_i^{(m)} \\ & & & & & & Mgg_i^{(m)} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

であり，マトリックス $[K_i^{(m)}]$ の各要素は次のようになる．

$$\begin{aligned}
Kaa_i^{(m)} = & \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\alpha^2 (\tilde{A}_{11}^* + \tilde{A}_{11}^{(c)*}) \sin \phi X'_{1i} X'_{1m} Y_u^2 \\
& + \alpha^2 (\tilde{A}_{22}^* + \tilde{A}_{22}^{(c)*}) (\cos^2 \phi / \sin \phi) X_{1i} X_{1m} Y_u^2 \\
& + \alpha^2 (\tilde{A}_{66}^* + \tilde{A}_{66}^{(c)*}) (1 / \sin \phi) X_{1i} X_{1m} Y_u'^2 \\
& + \alpha^2 (\tilde{A}_{12}^* + \tilde{A}_{12}^{(c)*}) \cos \phi X_{1i} X'_{1m} Y_u^2 \\
& + \alpha^2 (\tilde{A}_{12}^* + \tilde{A}_{12}^{(c)*}) \cos \phi X'_{1i} X_{1m} Y_u^2] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kab_i^{(m)} = & \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\alpha^2 (\tilde{A}_{22}^* + \tilde{A}_{22}^{(c)*}) (1 / \tan \phi) X_{2i} X_{1m} Y'_v Y_u \\
& - \alpha^2 (\tilde{A}_{66}^* + \tilde{A}_{66}^{(c)*}) (1 / \tan \phi) X_{2i} X_{1m} Y_v Y'_u \\
& + \alpha^2 (\tilde{A}_{66}^* + \tilde{A}_{66}^{(c)*}) X'_{2i} X_{1m} Y_v Y'_u \\
& + \alpha^2 (\tilde{A}_{12}^* + \tilde{A}_{12}^{(c)*}) X_{2i} X'_{1m} Y'_v Y_u] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kac_i^{(m)} = & \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\alpha^2 (\tilde{A}_{11}^* + \tilde{A}_{11}^{(c)*}) \sin \phi X_{3i} X'_{1m} Y_w Y_u \\
& + \alpha^2 (\tilde{A}_{22}^* + \tilde{A}_{22}^{(c)*}) \cos \phi X_{3i} X_{1m} Y_w Y_u \\
& + \alpha^2 (\tilde{A}_{12}^* + \tilde{A}_{12}^{(c)*}) \sin \phi X_{3i} X'_{1m} Y_w Y_u \\
& + \alpha^2 (\tilde{A}_{12}^* + \tilde{A}_{12}^{(c)*}) \cos \phi X_{3i} X_{1m} Y_w Y_u] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kad_i^{(m)} = & \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [-\alpha (\mu_3 \bar{C}_{11}^* + \bar{B}_{11}^{(c)*}) \sin \phi X'_{4i} X'_{1m} Y_{\psi\phi} Y_u \\
& - \alpha (\mu_3 \bar{C}_{22}^* + \bar{B}_{22}^{(c)*}) (\cos^2 \phi / \sin \phi) X_{4i} X_{1m} Y_{\psi\phi} Y_u \\
& - \alpha (\mu_3 \bar{C}_{66}^* + \bar{B}_{66}^{(c)*}) (1 / \sin \phi) X_{4i} X_{1m} Y'_{\psi\phi} Y'_u \\
& - \alpha (\mu_3 \bar{C}_{12}^* + \bar{B}_{12}^{(c)*}) \cos \phi X_{4i} X'_{1m} Y_{\psi\phi} Y_u \\
& - \alpha (\mu_3 \bar{C}_{12}^* + \bar{B}_{12}^{(c)*}) \cos \phi X'_{4i} X_{1m} Y_{\psi\phi} Y_u] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kae_i^{(m)} = & \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [-\alpha (\mu_3 \bar{C}_{22}^* + \bar{B}_{22}^{(c)*}) (1 / \tan \phi) X_{5i} X_{1m} Y'_{\psi\theta} Y_u \\
& + \alpha (\mu_3 \bar{C}_{66}^* + \bar{B}_{66}^{(c)*}) (1 / \tan \phi) X_{5i} X_{1m} Y_{\psi\theta} Y'_u \\
& - \alpha (\mu_3 \bar{C}_{66}^* + \bar{B}_{66}^{(c)*}) X'_{5i} X_{1m} Y_{\psi\theta} Y'_u \\
& - \alpha (\mu_3 \bar{C}_{12}^* + \bar{B}_{12}^{(c)*}) X_{5i} X'_{1m} Y'_{\psi\theta} Y_u] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kaf_i^{(m)} = & \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [-\alpha (\bar{B}_{11}^* - \mu_3 \bar{C}_{11}^*) \sin \phi X'_{6i} X'_{1m} Y_{\beta\phi} Y_u \\
& - \alpha (\bar{B}_{22}^* - \mu_3 \bar{C}_{22}^*) (\cos^2 \phi / \sin \phi) X_{6i} X_{1m} Y_{\beta\phi} Y_u \\
& - \alpha (\bar{B}_{66}^* - \mu_3 \bar{C}_{66}^*) (1 / \sin \phi) X_{6i} X_{1m} Y'_{\beta\phi} Y'_u \\
& - \alpha (\bar{B}_{12}^* - \mu_3 \bar{C}_{12}^*) \cos \phi X_{6i} X'_{1m} Y_{\beta\phi} Y_u \\
& - \alpha (\bar{B}_{12}^* - \mu_3 \bar{C}_{12}^*) \cos \phi X'_{6i} X_{1m} Y_{\beta\phi} Y_u] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kag_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& -\alpha(\bar{B}_{22}^* - \mu_3 \bar{C}_{22}^*)(1/\tan\phi) X_{7i} X_{1m} Y'_{\beta\theta} Y_u \\
& + \alpha(\bar{B}_{66}^* - \mu_3 \bar{C}_{66}^*)(1/\tan\phi) X_{7i} X_{1m} Y_{\beta\theta} Y'_u \\
& - \alpha(\bar{B}_{66}^* - \mu_3 \bar{C}_{66}^*) X'_{7i} X_{1m} Y_{\beta\theta} Y'_u \\
& - \alpha(\bar{B}_{12}^* - \mu_3 \bar{C}_{12}^*) X_{7i} X'_{1m} Y'_{\beta\theta} Y_u] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kbb_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& \alpha^2(\tilde{A}_{22}^* + \tilde{A}_{22}^{(c)*})(1/\sin\phi) X_{2i} X_{2m} Y_v'^2 \\
& + \alpha^2(\tilde{A}_{66}^* + \tilde{A}_{66}^{(c)*}) \sin\phi X'_{2i} X'_{2m} Y_v^2 \\
& - \alpha^2(\tilde{A}_{66}^* + \tilde{A}_{66}^{(c)*}) \cos\phi X_{2i} X'_{2m} Y_v^2 \\
& - \alpha^2(\tilde{A}_{66}^* + \tilde{A}_{66}^{(c)*}) \cos\phi X'_{2i} X_{2m} Y_v^2 \\
& + \alpha^2(\tilde{A}_{66}^* + \tilde{A}_{66}^{(c)*})(\cos^2\phi/\sin\phi) X_{2i} X_{2m} Y_v^2] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kbc_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& \alpha^2(\bar{A}_{22}^* + A_{22}^{(c)*}) X_{3i} X_{2m} Y_w Y'_v \\
& + \alpha^2(\bar{A}_{12}^* + A_{12}^{(c)*}) X_{3i} X_{2m} Y_w Y'_v] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kbd_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& -\alpha(\mu_3 \bar{C}_{22}^* + \bar{B}_{22}^{(c)*})(1/\tan\phi) X_{4i} X_{2m} Y_{\psi\phi} Y'_v \\
& + \alpha(\mu_3 \bar{C}_{66}^* + \bar{B}_{66}^{(c)*})(1/\tan\phi) X_{4i} X_{2m} Y'_{\psi\phi} Y_v \\
& - \alpha(\mu_3 \bar{C}_{66}^* + \bar{B}_{66}^{(c)*}) X_{4i} X'_{2m} Y'_{\psi\phi} Y_v \\
& - \alpha(\mu_3 \bar{C}_{12}^* + \bar{B}_{12}^{(c)*}) X'_{4i} X_{2m} Y_{\psi\phi} Y'_v] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kbe_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& -\alpha(\mu_3 \bar{C}_{22}^* + \bar{B}_{22}^{(c)*})(1/\sin\phi) X_{5i} X_{2m} Y'_{\psi\theta} Y'_v \\
& - \alpha(\mu_3 \bar{C}_{66}^* + \bar{B}_{66}^{(c)*})(\cos^2\phi/\sin\phi) X_{5i} X_{2m} Y_{\psi\theta} Y_v \\
& + \alpha(\mu_3 \bar{C}_{66}^* + \bar{B}_{66}^{(c)*}) \cos\phi X_{5i} X'_{2m} Y_{\psi\theta} Y_v \\
& + \alpha(\mu_3 \bar{C}_{66}^* + \bar{B}_{66}^{(c)*}) \cos\phi X'_{5i} X_{2m} Y_{\psi\theta} Y_v \\
& - \alpha(\mu_3 \bar{C}_{66}^* + \bar{B}_{66}^{(c)*}) \sin\phi X'_{5i} X'_{2m} Y_{\psi\theta} Y_v] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kbf_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& -\alpha(\bar{B}_{22}^* - \mu_3 \bar{C}_{22}^*)(1/\tan\phi) X_{6i} X_{2m} Y_{\beta\phi} Y'_v \\
& + \alpha(\bar{B}_{66}^* - \mu_3 \bar{C}_{66}^*)(1/\tan\phi) X_{6i} X_{2m} Y'_{\beta\phi} Y_v \\
& - \alpha(\bar{B}_{66}^* - \mu_3 \bar{C}_{66}^*) X_{6i} X'_{2m} Y'_{\beta\phi} Y_v \\
& - \alpha(\bar{B}_{12}^* - \mu_3 \bar{C}_{12}^*) X'_{6i} X_{2m} Y_{\beta\phi} Y'_v] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kbg_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& -\alpha(\bar{B}_{22}^* - \mu_3 \bar{C}_{22}^*)(1/\sin\phi) X_{7i} X_{2m} Y'_{\beta\theta} Y'_v \\
& - \alpha(\bar{B}_{66}^* - \mu_3 \bar{C}_{66}^*) \sin\phi X'_{7i} X'_{2m} Y_{\beta\theta} Y_v \\
& + \alpha(\bar{B}_{66}^* - \mu_3 \bar{C}_{66}^*) \cos\phi X'_{7i} X_{2m} Y_{\beta\theta} Y_v \\
& + \alpha(\bar{B}_{66}^* - \mu_3 \bar{C}_{66}^*) \cos\phi X_{7i} X'_{2m} Y_{\beta\theta} Y_v \\
& - \alpha(\bar{B}_{66}^* - \mu_3 \bar{C}_{66}^*)(\cos^2\phi/\sin\phi) X_{7i} X_{2m} Y_{\beta\theta} Y_v] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kcc_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& \alpha^2 (A_{11}^* + A_{11}^{(c)*}) \sin\phi X_{3i} X_{3m} Y_w^2 \\
& + \alpha^2 (A_{22}^* + A_{22}^{(c)*}) \sin\phi X_{3i} X_{3m} Y_w^2 \\
& + 2\alpha^2 (A_{12}^* + A_{12}^{(c)*}) \sin\phi X_{3i} X_{3m} Y_w^2 \\
& + \alpha^2 (k_f A_{44}^* + k_c A_{44}^{(c)*}) (1/\sin\phi) X_{3i} X_{3m} Y_w^2 \\
& + \alpha^2 (k_f A_{55}^* + k_c A_{55}^{(c)*}) \sin\phi X'_{3i} X'_{3m} Y_w^2] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kcd_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& -\alpha \mu_3 F_{11}^* \sin\phi X'_{4i} X_{3m} Y_{\psi\phi} Y_w \\
& - \alpha \mu_3 F_{22}^* \cos\phi X_{4i} X_{3m} Y_{\psi\phi} Y_w \\
& - \alpha \mu_3 F_{12}^* \cos\phi X_{4i} X_{3m} Y_{\psi\phi} Y_w \\
& - \alpha \mu_3 F_{12}^* \sin\phi X'_{4i} X_{3m} Y_{\psi\phi} Y_w \\
& + k_f \alpha \mu_3 F_{55}^* \sin\phi X_{4i} X'_{3m} Y_{\psi\phi} Y_w \\
& - k_c \alpha A_{55}^{(c)*} \sin\phi X_{4i} X'_{3m} Y_{\psi\phi} Y_w] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kce_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& -\alpha \mu_3 F_{22}^* X_{5i} X_{3m} Y'_{\psi\theta} Y_w \\
& - \alpha \mu_3 F_{12}^* X_{5i} X_{3m} Y'_{\psi\theta} Y_w \\
& + k_f \alpha \mu_3 F_{44}^* X_{5i} X_{3m} Y_{\psi\theta} Y_w \\
& - k_f \alpha A_{44}^{(c)*} X_{5i} X_{3m} Y_{\psi\theta} Y_w] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kcf_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& -\alpha (B_{11}^* - \mu_3 F_{11}^*) \sin\phi X'_{6i} X_{3m} Y_{\beta\phi} Y_w \\
& - \alpha (B_{22}^* - \mu_3 F_{22}^*) \cos\phi X'_{6i} X_{3m} Y_{\beta\phi} Y_w \\
& - \alpha (B_{12}^* - \mu_3 F_{11}^*) \cos\phi X_{6i} X_{3m} Y_{\beta\phi} Y_w \\
& - \alpha (B_{12}^* - \mu_3 F_{12}^*) \sin\phi X'_{6i} X_{3m} Y_{\beta\phi} Y_w \\
& - k_f \alpha (\bar{A}_{55}^* - B_{55}^* + \mu_3 F_{55}^*) \sin\phi X_{6i} X'_{3m} Y_{\beta\phi} Y_w] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kcg_i^{(m)} = \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [& -\alpha (B_{22}^* - \mu_3 F_{22}^*) X_{7i} X_{3m} Y'_{\beta\theta} Y_w \\
& - \alpha (B_{12}^* - \mu_3 F_{12}^*) X_{7i} X_{3m} Y'_{\beta\theta} Y_w \\
& - k_f \alpha (\bar{A}_{44}^* - B_{44}^* + \mu_3 F_{44}^*) X_{7i} X_{3m} Y_{\beta\theta} Y_w] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kd d_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\{ (\mu_3^2/4) A_{11}^* + D_{11}^{(c)*} \} \sin \phi X'_{4i} X'_{4m} Y_{\psi\phi}^2 \\
&\quad + \{ (\mu_3^2/4) A_{22}^* + D_{22}^{(c)*} \} (\cos^2 \phi / \sin \phi) X_{4i} X_{4m} Y_{\psi\phi}^2 \\
&\quad + \{ (\mu_3^2/4) A_{66}^* + D_{66}^{(c)*} \} (1/\sin \phi) X_{4i} X_{4m} Y_{\psi\phi}^2 \\
&\quad + \{ (\mu_3^2/4) A_{12}^* + D_{12}^{(c)*} \} \cos \phi X'_{4i} X_{4m} Y_{\psi\phi}^2 \\
&\quad + \{ (\mu_3^2/4) A_{12}^* + D_{12}^{(c)*} \} \cos \phi X_{4i} X'_{4m} Y_{\psi\phi}^2 \\
&\quad + \{ k_f (\mu_3^2/4) A_{55}^* + k_c D_{55}^{(c)*} \} \sin \phi X_{4i} X_{4m} Y_{\psi\phi}^2 \\
&\quad + k_c (\tilde{A}_{55}^{(c)*} - 2\bar{B}_{55}^{(c)*}) \sin \phi X_{4i} X_{4m} Y_{\psi\phi}^2] d\phi d\theta \\
Kd e_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\{ (\mu_3^2/4) A_{22}^* + D_{22}^{(c)*} \} (1/\tan \phi) X_{5i} X_{4m} Y'_{\psi\theta} Y_{\psi\phi} \\
&\quad + \{ (\mu_3^2/4) A_{66}^* + D_{66}^{(c)*} \} X'_{5i} X_{4m} Y_{\psi\theta} Y'_{\psi\phi} \\
&\quad - \{ (\mu_3^2/4) A_{66}^* + D_{66}^{(c)*} \} (1/\tan \phi) X_{5i} X_{4m} Y_{\psi\theta} Y'_{\psi\phi} \\
&\quad + \{ (\mu_3^2/4) A_{12}^* + D_{12}^{(c)*} \} X_{5i} X'_{4m} Y'_{\psi\theta} Y_{\psi\phi}] d\phi d\theta \\
Kd f_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\{ \mu_3 E_{11}^* - (\mu_3^2/4) A_{11}^* \} \sin \phi X'_{6i} X'_{4m} Y_{\beta\phi} Y_{\psi\phi} \\
&\quad + \{ \mu_3 E_{22}^* - (\mu_3^2/4) A_{22}^* \} (\cos^2 \phi / \sin \phi) X_{6i} X_{4m} Y_{\beta\phi} Y_{\psi\phi} \\
&\quad + \{ \mu_3 E_{66}^* - (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} (1/\sin \phi) X_{6i} X_{4m} Y'_{\beta\phi} Y'_{\psi\phi} \\
&\quad + \{ \mu_3 E_{12}^* - (\mu_3^2/4) A_{12}^* \} \cos \phi X'_{6i} X_{4m} Y_{\beta\phi} Y_{\psi\phi} \\
&\quad + \{ \mu_3 E_{12}^* - (\mu_3^2/4) A_{12}^* \} \cos \phi X_{6i} X'_{4m} Y_{\beta\phi} Y_{\psi\phi} \\
&\quad + k_f \{ \mu_3 E_{55}^* - (\mu_3^2/4) A_{55}^* \} \sin \phi X_{6i} X_{4m} Y_{\beta\phi} Y_{\psi\phi} \\
&\quad - k_f \mu_3 \bar{C}_{55}^* \sin \phi X_{6i} X_{4m} Y_{\beta\phi} Y_{\psi\phi}] d\phi d\theta \\
Kd g_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\{ \mu_3 E_{22}^* - (\mu_3^2/4) A_{22}^* \} (1/\tan \phi) X_{7i} X_{4m} Y'_{\beta\theta} Y_{\psi\phi} \\
&\quad + \{ \mu_3 E_{66}^* - (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} X'_{7i} X_{4m} Y_{\beta\theta} Y'_{\psi\phi} \\
&\quad - \{ \mu_3 E_{66}^* - (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} (1/\tan \phi) X_{7i} X_{4m} Y_{\beta\theta} Y'_{\psi\phi} \\
&\quad + \{ \mu_3 E_{12}^* - (\mu_3^2/4) A_{12}^* \} X_{7i} X'_{4m} Y'_{\beta\theta} Y_{\psi\phi}] d\phi d\theta \\
Kd h_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\{ (\mu_3^2/4) A_{22}^* + D_{22}^{(c)*} \} (1/\sin \phi) X_{5i} X_{5m} Y_{\psi\theta}^2 \\
&\quad + \{ (\mu_3^2/4) A_{66}^* + D_{66}^{(c)*} \} (\cos^2 \phi / \sin \phi) X_{5i} X_{5m} Y_{\psi\theta}^2 \\
&\quad - \{ (\mu_3^2/4) A_{66}^* + D_{66}^{(c)*} \} \cos \phi X_{5i} X'_{5m} Y_{\psi\theta}^2 \\
&\quad - \{ (\mu_3^2/4) A_{66}^* + D_{66}^{(c)*} \} \cos \phi X'_{5i} X_{5m} Y_{\psi\theta}^2 \\
&\quad + \{ (\mu_3^2/4) A_{66}^* + D_{66}^{(c)*} \} \sin \phi X'_{5i} X'_{5m} Y_{\psi\theta}^2 \\
&\quad + \{ k_f (\mu_3^2/4) A_{44}^* + k_c D_{44}^{(c)*} \} \sin \phi X_{5i} X_{5m} Y_{\psi\theta}^2 \\
&\quad + k_c (\tilde{A}_{44}^{(c)*} - 2\bar{B}_{44}^{(c)*}) \sin \phi X_{5i} X_{5m} Y_{\psi\theta}^2] d\phi d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kef_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\{ \mu_3 E_{22}^* - (\mu_3^2/4) A_{22}^* \} (1/\tan\phi) X_{6i} X_{5m} Y_{\beta\phi} Y'_{\psi\theta} \\
&\quad - \{ \mu_3 E_{66}^* - (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} (1/\tan\phi) X_{6i} X_{5m} Y'_{\beta\phi} Y_{\psi\theta} \\
&\quad + \{ \mu_3 E_{66}^* - (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} X_{6i} X'_{5m} Y'_{\beta\phi} Y_{\psi\theta} \\
&\quad + \{ \mu_3 E_{12}^* - (\mu_3^2/4) A_{12}^* \} X'_{6i} X_{5m} Y_{\beta\phi} Y'_{\psi\theta}] d\phi d\theta \\
Keg_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\{ \mu_3 E_{22}^* - (\mu_3^2/4) A_{22}^* \} (1/\sin\phi) X_{7i} X_{5m} Y'_{\beta\theta} Y'_{\psi\theta} \\
&\quad + \{ \mu_3 E_{66}^* - (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} (\cos^2\phi/\sin\phi) X_{7i} X_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta} \\
&\quad - \{ \mu_3 E_{66}^* - (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} \cos\phi X_{7i} X'_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta} \\
&\quad - \{ \mu_3 E_{66}^* - (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} \cos\phi X'_{7i} X_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta} \\
&\quad + \{ \mu_3 E_{66}^* - (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} \sin\phi X'_{7i} X'_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta} \\
&\quad - k_f \{ \mu_3 E_{44}^* - (\mu_3^2/4) A_{44}^* \} \sin\phi X_{7i} X_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta} \\
&\quad - k_f \mu_3 \bar{C}_{44}^* \sin\phi X_{7i} X_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta}] d\phi d\theta \\
Kff_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\{ D_{11}^* - 2\mu_3 E_{11}^* + (\mu_3^2/4) A_{11}^* \} \sin\phi X'_{6i} X'_{6m} Y_{\beta\phi}^2 \\
&\quad + \{ D_{22}^* - 2\mu_3 E_{22}^* + (\mu_3^2/4) A_{22}^* \} (\cos^2\phi/\sin\phi) X_{6i} X_{6m} Y_{\beta\phi}^2 \\
&\quad + \{ D_{66}^* - 2\mu_3 E_{66}^* + (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} (1/\sin\phi) X_{6i} X_{6m} Y_{\beta\phi}^2 \\
&\quad + \{ D_{12}^* - 2\mu_3 E_{12}^* + (\mu_3^2/4) A_{12}^* \} \cos\phi X'_{6i} X_{6m} Y_{\beta\phi}^2 \\
&\quad + \{ D_{12}^* - 2\mu_3 E_{12}^* + (\mu_3^2/4) A_{12}^* \} \cos\phi X_{6i} X'_{6m} Y_{\beta\phi}^2 \\
&\quad + k_f \{ D_{55}^* - 2\mu_3 E_{55}^* + (\mu_3^2/4) A_{55}^* \} \sin\phi X_{6i} X_{6m} Y_{\beta\phi}^2 \\
&\quad + k_f \{ \tilde{A}_{55}^* - 2\bar{B}_{55}^* + 2\mu_3 \bar{C}_{55}^* \} \sin\phi X_{6i} X_{6m} Y_{\beta\phi}^2] d\phi d\theta \\
Kfg_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\{ D_{22}^* - 2\mu_3 E_{22}^* + (\mu_3^2/4) A_{22}^* \} (1/\tan\phi) X_{7i} X_{6m} Y'_{\beta\theta} Y_{\beta\phi} \\
&\quad + \{ D_{66}^* - 2\mu_3 E_{66}^* + (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} X'_{7i} X_{6m} Y_{\beta\theta} Y'_{\beta\phi} \\
&\quad - \{ D_{66}^* - 2\mu_3 E_{66}^* + (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} (1/\tan\phi) X_{7i} X_{6m} Y_{\beta\theta} Y'_{\beta\phi} \\
&\quad + \{ D_{12}^* - 2\mu_3 E_{12}^* + (\mu_3^2/4) A_{12}^* \} X_{7i} X'_{6m} Y'_{\beta\theta} Y_{\beta\phi}] d\phi d\theta \\
Kgg_i^{(m)} &= \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} [\{ D_{22}^* - 2\mu_3 E_{22}^* + (\mu_3^2/4) A_{22}^* \} (1/\sin\phi) X_{7i} X_{7m} Y_{\beta\theta}^2 \\
&\quad + \{ D_{66}^* - 2\mu_3 E_{66}^* + (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} \sin\phi X'_{7i} X'_{7m} Y_{\beta\theta}^2 \\
&\quad - \{ D_{66}^* - 2\mu_3 E_{66}^* + (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} \cos\phi X_{7i} X'_{7m} Y_{\beta\theta}^2 \\
&\quad - \{ D_{66}^* - 2\mu_3 E_{66}^* + (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} \cos\phi X'_{7i} X_{7m} Y_{\beta\theta}^2 \\
&\quad + \{ D_{66}^* - 2\mu_3 E_{66}^* + (\mu_3^2/4) A_{66}^* \} (\cos^2\phi/\sin\phi) X_{7i} X_{7m} Y_{\beta\theta}^2 \\
&\quad + k_f \{ D_{44}^* - 2\mu_3 E_{44}^* + (\mu_3^2/4) A_{44}^* \} \sin\phi X_{7i} X_{7m} Y_{\beta\theta}^2 \\
&\quad + k_f \{ \tilde{A}_{44}^* - 2\bar{B}_{44}^* + 2\mu_3 \bar{C}_{44}^* \} \sin\phi X_{7i} X_{7m} Y_{\beta\theta}^2] d\phi d\theta
\end{aligned} \tag{4.49}$$

マトリックス $[M_i^{(m)}]$ の各要素は次のようになる。

$$Maa_i^{(m)} = \bar{I}_1 \alpha^2 \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} \sin\phi X_{1i} X_{1m} Y_u^2 d\phi d\theta$$

$$Mab_i^{(m)} = 0$$

$$Mac_i^{(m)} = 0$$

$$Mad_i^{(m)} = -\alpha (\bar{I}_3 \mu_3 / 2 - \bar{I}_7 \lambda_3 / 2) \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} \sin\phi X_{4i} X_{1m} Y_{\psi\phi} Y_u d\phi d\theta$$

$$Mae_i^{(m)} = 0$$

$$Maf_i^{(m)} = \alpha (\bar{I}_2 / 2 + \bar{I}_3 \mu_3 / 2) \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} \sin\phi X_{6i} X_{1m} Y_{\beta\phi} Y_u d\phi d\theta$$

$$Mag_i^{(m)} = 0$$

$$Mbb_i^{(m)} = \bar{I}_1 \alpha^2 \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} \sin\phi X_{2i} X_{2m} Y_v^2 d\phi d\theta$$

$$Mbc_i^{(m)} = 0$$

$$Mbd_i^{(m)} = 0$$

$$Mbe_i^{(m)} = -\alpha (\bar{I}_3 \mu_3 / 2 - \bar{I}_7 \lambda_3 / 2) \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} \sin\phi X_{5i} X_{2m} Y_{\psi\theta} Y_v d\phi d\theta$$

$$Mbf_i^{(m)} = 0$$

$$Mbg_i^{(m)} = \alpha (\bar{I}_2 / 2 + \bar{I}_3 \mu_3 / 2) \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} \sin\phi X_{7i} X_{2m} Y_{\beta\theta} Y_v d\phi d\theta$$

$$Mcc_i^{(m)} = \bar{I}_9 \alpha^2 \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} \sin\phi X_{3i} X_{3m} Y_w^2 d\phi d\theta$$

$$Mcd_i^{(m)} = 0$$

$$Mce_i^{(m)} = 0$$

$$Mcf_i^{(m)} = 0$$

$$Mcg_i^{(m)} = 0$$

$$Mdd_i^{(m)} = (\mu_3^2 \bar{I}_6 + \lambda_3 \bar{I}_8) \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} \sin\phi X_{4i} X_{4m} Y_{\psi\phi}^2 d\phi d\theta$$

$$Mde_i^{(m)} = 0$$

$$Mdf_i^{(m)} = -\mu_3 (\bar{I}_5 / 2 + \mu_3 \bar{I}_6) \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} \sin\phi X_{6i} X_{4m} Y_{\beta\phi} Y_{\psi\phi} d\phi d\theta$$

$$Mdg_i^{(m)} = 0$$

$$Mee_i^{(m)} = (\mu_3^2 \bar{I}_6 + \lambda_3 \bar{I}_8) \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} \sin\phi X_{5i} X_{5m} Y_{\psi\theta}^2 d\phi d\theta$$

$$Mef_i^{(m)} = 0$$

$$Meg_i^{(m)} = -\mu_3 (\bar{I}_4 / 2 + \mu_3 \bar{I}_6) \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} \sin\phi X_{6i} X_{5m} Y_{\beta\theta} Y_{\psi\theta} d\phi d\theta$$

$$Mff_i^{(m)} = (\bar{I}_4 + \mu_3 \bar{I}_5 + \mu_3^2 \bar{I}_6) \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_o} \sin\phi X_{6i} X_{6m} Y_{\beta\phi}^2 d\phi d\theta$$

$$Mfg_i^{(m)} = 0$$

$$Mgg_i^{(m)} = (\bar{I}_4 + \mu_3 \bar{I}_5 + \mu_3^2 \bar{I}_6) \int_0^{2\pi} \int_{\phi_h}^{\phi_0} \sin\phi X_{7i} X_{7m} Y_{\beta\theta}^2 d\phi d\theta \quad (4.50)$$

式(4.49)および(4.50)において

$$\begin{aligned} Y_u = Y_w = Y_{\psi\phi} = Y_{\beta\phi} &= \cos N\theta \\ Y_v = Y_{\psi\theta} = Y_{\beta\theta} &= \sin N\theta \end{aligned} \quad (4.51)$$

であり、(')は

$$X' = \frac{\partial X}{\partial \phi}, \quad Y' = \frac{\partial Y}{\partial \theta} \quad (4.52)$$

を表す。

また、式(4.49)および(4.50)において、 ϕ に関する定積分は Gauss-Legendreの積分公式を用いて数値積分を行う。その際、球殻の極点($\phi=0^\circ$)は特異点となるが、極点において小さな穴の存在を仮定することによりその問題は解決される。すなわち、 ϕ に関する積分範囲を ϕ_h から ϕ_0 ($\phi_h \ll 1$)とすることにより、実用上十分な精度を有する数値が得られる。

4.3 数値計算と考察

積層表面材1および2のラミナはともに一般的なGraphite/Epoxyとし、各材料定数を

$$\begin{aligned} E_1/E_2 = 20, G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = 0.5, \\ G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} (G_{23}/E_2 = 0.37), E_c/E_1 = 10^{-3}, \\ \nu_{12} = 0.28, \nu_{23} = 0.34, \nu_c = 0.4, \rho_1/\rho_2 = 1, \rho_c/\rho_1 = 0.1 \end{aligned} \quad (4.53)$$

とした。ラミナと心材のせん断補正係数 k_f および k_c は $5/6^{(92)}$ を使用した。ラミナの材料損失係数⁽⁹⁵⁾ $\delta_1, \delta_2, \delta_{12}$ および粘弾性心材の材料損失係数⁽²¹⁾ δ_c は振動数依存性や温度依存性の影響が小さいとし

$$\delta_1 = 0.001, \delta_2 = 0.01, \delta_{12} = 0.015, \delta_c = 0.5 \quad (4.54)$$

なる定数を使用した。

球殻の積層形態は(表面材2/心材C/表面材1)とし、 $(\theta_1^{(2)}/\dots/\theta_m^{(2)}/\dots/\theta_{N_2}^{(2)}/C/\theta_1^{(1)}/\dots/\theta_m^{(1)}/\dots/\theta_{N_1}^{(1)})$ のように表す。ただし、 $\theta_m^{(n)}$ は表面材 n ($n=1,2$)の第 m 層目のラミナの繊維角度を表す。また、 s は周方向波数 N に対する s 番目のモード次数を表す。

4.3.1 数値計算精度の検討

本解析では、リッツ法を用いているため、解の精度は変位関数の項数に依存する。そこで、固定と単純支持の複合材サンドイッチ球殻について、積層形態を $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ 、周方向波数 $N=2$ とし、厚さ比 H/R を $0.01, 0.02$ および 0.1 と変化させて無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の収束状況を調べる。

表4-1と表4-2にそれぞれ開き角 $\phi_0=30^\circ$ および 90° の固定されたサンドイッチ球殻について、表4-3と表4-4にそれぞれ開き角 $\phi_0=30^\circ$ および 90° の単純支持されたサンドイッチ球殻について無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の収束状況を示す。 $\phi_0=30^\circ$ の場合、境界条件および厚さ比 H/R にかかわらず、項数10までとると無次元振動数 Ω は有効数字3あるいは4で、

モード損失係数 η は有効数字2~4で収束した値が得られる。 $\phi_0=90^\circ$ の場合、厚さ比 H/R が大きい方が収束性が良好であり、無次元振動数 Ω はモード次数 $s=3$ のいくつかを除き有効数字2~4で、モード損失係数 η はモード次数 $s=2,3$ のいくつかを除き有効数字2~4で収束した解が得られる。このように、境界条件、開き角 ϕ_0 により解の収束状況は異なるが、数値計算では項数10を採用した。

式(4.49)および式(4.50)のマトリックス要素をGauss-Legendreの積分公式により数値積分する際、球殻の極点 ($\phi=0^\circ$) は特異点となるため、解析では極点に小さな穴の存在を仮定した。したがって、この穴の大きさが計算精度に与える影響を調べる必要がある。

表4-5に極点における穴の開き角 ϕ_h による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の収束状況を示す。この表から明らかのように、穴の開き角 ϕ_h が球殻の開き角 ϕ_0 に対して小さくなるにつれて Ω と η は一定の値に収束し、 ϕ_h を ϕ_0 の0.05%の大きさとすれば実用上十分な精度を有する数値が得られる。

表4-6と表4-7に固定された等方性球殻の無次元振動数 Ω について、本解析値とTesslerら⁽⁵⁶⁾、Gauthamら⁽⁶³⁾およびSinghら⁽⁵⁴⁾⁽⁵⁵⁾の有限要素法による解析結果、Kumarら⁽⁶²⁾のリッツ法による解析結果との比較を示す。

表4-8と表4-9に単純支持された等方性球殻の無次元振動数 Ω について、本解析値とChaoら⁽⁶⁰⁾とKraus⁽⁴⁰²⁾のガラーキン法による解析結果およびSinghら⁽⁵⁴⁾の有限要素法による解析結果との比較を示す。

表4-10に固定された積層球殻の基本無次元振動数について本解析値とGauthamら⁽⁶³⁾の有限要素法による解析結果との比較を示す。数値計算では、表面材に対する心材の厚さおよび剛性を 10^{-3} とし、心材の存在を無視できるようにした。

表4-11に固定された等方性サンドイッチ球殻の無次元振動数について、本解析値とSinghら⁽⁶⁹⁾の有限要素法による解析結果との比較を示す。

以上の収束状況と比較から、リッツ法による本解析値は等方性、異方性にかかわらず実用上十分な精度と妥当性を有するものとする。

表4-1 無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η の収束状況
(固定, $\phi_0=30^\circ$)

【 $t_c/R=t_1/R=t_2/R=H/3R$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$, $G_{23}/E_2=0.37$,
 $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$, $\delta_1=0.001$,
 $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, ($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$), $N=2$ 】

H/R	Num.of terms	$s=1$	$s=2$	$s=3$
0.01	8	0.4687 ^a (0.07095) ^b	0.5255 (0.1463)	0.7422 (0.2058)
	9	0.4685 (0.07086)	0.5252 (0.1460)	0.7401 (0.2070)
	10	0.4685 (0.07081)	0.5250 (0.1459)	0.7397 (0.2067)
	11	0.4685 (0.07076)	0.5250 (0.1459)	0.7397 (0.2066)
0.02	8	0.4955 (0.09468)	0.5913 (0.1938)	0.8530 (0.2096)
	9	0.4955 (0.09461)	0.5912 (0.1938)	0.8509 (0.2111)
	10	0.4955 (0.09460)	0.5912 (0.1938)	0.8506 (0.2111)
	11	0.4954 (0.09460)	0.5912 (0.1938)	0.8506 (0.2112)
0.1	8	0.6550 (0.06359)	1.114 (0.06041)	1.800 (0.04287)
	9	0.6550 (0.06360)	1.114 (0.06042)	1.798 (0.04298)
	10	0.6550 (0.06360)	1.114 (0.06042)	1.798 (0.04301)
	11	0.6550 (0.06361)	1.114 (0.06042)	1.798 (0.04301)

^a Dimensionless frequency Ω

^b Modal loss factor η

表4-2 無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η の収束状況
(固定, $\phi_0=90^\circ$)

【 $t_c/R=t_1/R=t_2/R=H/3R$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$, $G_{23}/E_2=0.37$,
 $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$, $\delta_1=0.001$,
 $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, ($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$), $N=2$ 】

H/R	Num.of terms	$s=1$	$s=2$	$s=3$
0.01	8	0.2891 ^a (0.02290) ^b	0.3325 (0.03022)	0.4288 (0.04070)
	9	0.2888 (0.02324)	0.3303 (0.03185)	0.4199 (0.04535)
	10	0.2888 (0.02330)	0.3298 (0.03330)	0.4151 (0.05099)
	11	0.2888 (0.02333)	0.3295 (0.03363)	0.4142 (0.05350)
0.02	8	0.2976 (0.03877)	0.3461 (0.04838)	0.4519 (0.05738)
	9	0.2974 (0.03912)	0.3443 (0.05149)	0.4435 (0.07072)
	10	0.2974 (0.03919)	0.3439 (0.05238)	0.4402 (0.07688)
	11	0.2974 (0.03919)	0.3437 (0.05250)	0.4398 (0.07807)
0.1	8	0.3253 (0.06031)	0.3842 (0.05710)	0.5049 (0.06160)
	9	0.3252 (0.06047)	0.3838 (0.05748)	0.5022 (0.06335)
	10	0.3252 (0.06050)	0.3837 (0.05758)	0.5017 (0.06381)
	11	0.3252 (0.06049)	0.3837 (0.05759)	0.5016 (0.06394)

^a Dimensionless frequency Ω

^b Modal loss factor η

表4-3 無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η の収束状況
(単純支持, $\phi_0=30^\circ$)

【 $t_c/R=t_1/R=t_2/R=H/3R$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$, $G_{23}/E_2=0.37$,
 $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$, $\delta_1=0.001$,
 $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, ($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$), $N=2$ 】

H/R	Num.of terms	$s=1$	$s=2$	$s=3$
0.01	8	0.4547 ^a (0.05379) ^b	0.5174 (0.1249)	0.7247 (0.1945)
	9	0.4546 (0.05373)	0.5173 (0.1251)	0.7237 (0.1958)
	10	0.4545 (0.05365)	0.5173 (0.1251)	0.7236 (0.1960)
	11	0.4545 (0.05367)	0.5173 (0.1251)	0.7236 (0.1959)
0.02	8	0.4841 (0.07505)	0.5753 (0.1907)	0.8214 (0.2148)
	9	0.4840 (0.07503)	0.5752 (0.1908)	0.8203 (0.2160)
	10	0.4840 (0.07501)	0.5752 (0.1908)	0.8202 (0.2161)
	11	0.4840 (0.07503)	0.5752 (0.1908)	0.8201 (0.2161)
0.1	8	0.5897 (0.07639)	1.000 (0.07943)	1.387 (0.1395)
	9	0.5897 (0.07640)	1.000 (0.07944)	1.387 (0.1396)
	10	0.5896 (0.07641)	1.000 (0.07944)	1.387 (0.1396)
	11	0.5896 (0.07641)	1.000 (0.07944)	1.386 (0.1397)

^a Dimensionless frequency Ω

^b Modal loss factor η

表4-4 無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η の収束状況
(単純支持, $\phi_0=90^\circ$)

【 $t_c/R=t_1/R=t_2/R=H/3R$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$, $G_{23}/E_2=0.37$,
 $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$, $\delta_1=0.001$,
 $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, ($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$), $N=2$ 】

H/R	Num.of terms	$s=1$	$s=2$	$s=3$
0.01	8	0.2880 ^a (0.02183) ^b	0.3304 (0.02794)	0.4258 (0.03841)
	9	0.2878 (0.02208)	0.3287 (0.02968)	0.4173 (0.04226)
	10	0.2878 (0.02210)	0.3282 (0.03088)	0.4132 (0.04792)
	11	0.2878 (0.02213)	0.3281 (0.03117)	0.4122 (0.04910)
0.02	8	0.2956 (0.03406)	0.3439 (0.04535)	0.4489 (0.05447)
	9	0.2955 (0.03439)	0.3426 (0.04844)	0.4410 (0.06741)
	10	0.2955 (0.03442)	0.3423 (0.04936)	0.4382 (0.07313)
	11	0.2955 (0.03447)	0.3422 (0.04948)	0.4377 (0.07436)
0.1	8	0.3203 (0.05923)	0.3788 (0.05873)	0.4964 (0.06126)
	9	0.3202 (0.05939)	0.3784 (0.05911)	0.4941 (0.06287)
	10	0.3202 (0.05943)	0.3784 (0.09520)	0.4936 (0.06330)
	11	0.3202 (0.05942)	0.3784 (0.05922)	0.4936 (0.06342)

^a Dimensionless frequency Ω

^b Modal loss factor η

表4-5 極点における穴の開き角による無次元振動数 Ω および
モード損失係数 η の収束状況（境界条件：固定）
【 $H/R=0.02, t_c/R=t_1/R=t_2/R=1/150, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5,$
 $G_{23}/E_2=0.37, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5, (0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ), s=1$ 】

ϕ_o	N	ϕ_h/ϕ_o [%]				
		5.0	3.0	1.0	0.1	0.05
30°	0	0.7441 ^a	0.7436	0.7438	0.7441	0.7442
		(3.430) ^b	(3.410)	(3.421)	(3.445)	(3.447)
	3	0.5475	0.5549	0.5607	0.5625	0.5626
		(11.58)	(11.79)	(12.03)	(12.12)	(12.13)
	6	0.7359	0.7361	0.7362	0.7362	0.7362
		(15.39)	(15.39)	(15.39)	(15.39)	(15.39)
60°	0	0.6654	0.6649	0.6646	0.6646	0.6646
		(0.9019)	(0.8991)	(0.8990)	(0.9001)	(0.9002)
	3	0.3804	0.3811	0.3816	0.3817	0.3817
		(10.08)	(9.965)	(9.892)	(9.871)	(9.870)
	6	0.4635	0.4636	0.4636	0.4636	0.4636
		(15.44)	(15.44)	(15.43)	(15.43)	(15.43)
90°	0	0.5744	0.5736	0.5732	0.5732	0.5732
		(0.7513)	(0.7470)	(0.7423)	(0.7401)	(0.7404)
	3	0.3241	0.3250	0.3256	0.3257	0.3257
		(4.731)	(4.777)	(4.812)	(4.817)	(4.817)
	6	0.3824	0.3824	0.3826	0.3826	0.3826
		(10.29)	(10.28)	(10.26)	(10.25)	(10.25)

^a Dimensionless Frequency Ω

^b Modal loss factor $\eta \times 10^2$

表4-6 固定された等方性球殻の軸対称無次元振動数 Ω の比較
 【 $H/R=0.1$, $\phi_o=90^\circ$, $t_c/R=t_1/R=t_2/R=1/30$, $E_1/E_2=1$, $E_c/E_1=1$,
 $\nu_{12}=\nu_{23}=\nu_c=0.3$, $\rho_1/\rho_2=\rho_c/\rho_1=1$ 】

	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$
Present	0.8482	1.232	1.590	1.937
Tessler et al. ⁽⁵⁶⁾	0.848	1.233	1.590	1.944
Gautham et al. ⁽⁶³⁾	0.844	1.232	1.581	1.927

表4-7 固定された等方性球殻の非軸対称無次元振動数 Ω の比較
 【 $H/R=0.05$, $\phi_o=60^\circ$, $t_c/R=t_1/R=t_2/R=1/60$, $E_1/E_2=1$, $E_c/E_1=1$,
 $\nu_{12}=\nu_{23}=\nu_c=0.3$, $\rho_1/\rho_2=\rho_c/\rho_1=1$ 】

s	N	Present	Singh et al. ⁽⁵⁴⁾	Singh ⁽⁵⁵⁾	Kumar et al. ⁽⁶²⁾	Gautham et al. ⁽⁶³⁾
1	1	0.8988	0.8990	0.8990	0.8988	0.8941
	2	1.079	1.079	1.079	1.079	1.075
	3	1.213	1.214	1.214	1.214	—
	4	1.391	1.393	1.393	1.393	—
	10	3.437	3.472	—	—	—
2	1	1.208	1.209	1.209	1.209	1.200
	2	1.472	1.476	1.476	1.476	1.465
	3	1.759	1.766	1.767	1.767	—
	4	2.092	2.103	2.105	2.105	—
	10	4.841	4.907	—	—	—
3	1	1.752	1.759	1.761	—	—
	2	2.172	2.184	2.194	—	—
	3	2.596	2.614	2.627	—	—
	4	3.053	3.076	3.092	—	—
	10	6.402	6.420	—	—	—

表4-8 単純支持された等方性球殻の軸対称無次元振動数 Ω の比較
 【 $H/R=0.1$, $\phi_o=90^\circ$, $t_c/R=t_1/R=t_2/R=1/30$, $E_1/E_2=1$, $E_c/E_1=1$,
 $\nu_{12}=\nu_{23}=\nu_c=0.3$, $\rho_1/\rho_2=\rho_c/\rho_1=1$ 】

	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$
Present	0.8033	1.178	1.589	1.799	2.465
Chao et al. ⁽⁶⁰⁾	0.8035	1.180	1.591	1.805	2.477
Kraus ⁽¹⁰²⁾	0.8034	1.180	1.591	1.804	2.477

表4-9 単純支持された等方性球殻の非軸対称無次元振動数 Ω の比較
 【 $H/R=0.05$, $t_c/R=t_1/R=t_2/R=1/60$, $E_1/E_2=1$, $E_c/E_1=1$,
 $\nu_{12}=\nu_{23}=\nu_c=0.3$, $\rho_1/\rho_2=\rho_c/\rho_1=1$ 】

s	N	$\phi_o=30^\circ$		$\phi_o=60^\circ$		$\phi_o=90^\circ$	
		Present	Singh et al. ⁽⁵⁴⁾	Present	Singh et al. ⁽⁵⁴⁾	Present	Singh et al. ⁽⁵⁴⁾
1	1	1.271	1.270	0.8735	0.8734	0.5683	0.5683
	2	1.710	1.705	1.057	1.056	0.9190	0.9189
	3	2.327	2.316	1.167	1.167	1.003	1.003
	6	4.898	4.874	1.779	1.774	1.277	1.276
	10	9.198	9.199	3.267	3.261	2.099	2.099
2	1	2.618	2.627	1.127	1.128	0.9212	0.9212
	2	3.589	3.603	1.355	1.355	1.045	1.045
	3	4.641	4.662	1.614	1.614	1.155	1.155
	6	8.135	8.188	2.690	2.691	1.621	1.620
	10	13.20	13.33	4.633	4.643	2.699	2.701
3	1	4.022	4.023	1.620	1.623	1.104	1.105
	2	6.076	6.103	1.989	1.993	1.248	1.249
	3	7.479	7.553	2.392	2.398	1.418	1.419
	6	11.53	11.68	3.820	3.832	2.101	2.101
	10	17.24	17.30	6.176	6.123	3.441	3.402

表4-10 固定された積層球殻の基本無次元振動数の比較
 【 $t_1/R = t_c/R \times 10^3$, $\phi_o = 11.42^\circ$, $E_1/E_2 = 12.3$, $G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = 0.566$,
 $G_{23}/E_2 = 0.373$, $E_c/E_1 = 10^{-3}$, $\nu_{12} = \nu_c = 0.28$, $\rho_1/\rho_2 = 1$, $\rho_c/\rho_1 = 10^{-3}$ 】

	Laminations			
	0°	90°	$(0^\circ/90^\circ)$	$(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)_s$
$H/R = 1.98 \times 10^{-3}$				
Present	0.6015(0) ^a	0.4136(0)	0.5807(2)	0.6349(2)
Gautham et al. ⁽⁶³⁾	0.6055	0.4136	0.5893	0.6419
$H/R = 1.98 \times 10^{-2}$				
Present	1.317(0)	0.8202(0)	1.446(0)	1.359(0)
Gautham et al. ⁽⁶³⁾	1.371	0.8216	1.454	1.363
$H/R = 3.96 \times 10^{-2}$				
Present	1.810(0)	1.225(0)	1.856(0)	1.792(0)
Gautham et al. ⁽⁶³⁾	1.879	1.238	1.885	1.818

^a Circumferential wave number

表4-11 固定された等方性サンドイッチ球殻の無次元振動数 Ω の比較
 【 $H/R = 0.035$, $\phi_o = 30^\circ$, $t_1/R = t_2/R = 7.5 \times 10^{-3}$, $t_c/R = 0.02$, $E_1/E_2 = 1$,
 $E_c/E_1 = 2.5 \times 10^{-3}$, $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_c = 0.3$, $\rho_1/\rho_2 = 1$, $\rho_c/\rho_1 = 2.5 \times 10^{-3}$, $N=1$ 】

	$s=1$	$s=2$
Present	1.095	1.286
Singh et al. ⁽⁶⁹⁾	1.087	1.284

4.3.2 固有振動数，モード損失係数および振動モード

本節では，周方向波数，表面材の積層形態，開き角および各種形状寸法比による無次元振動数 Ω ，モード損失係数 η および振動モードの変化について調べる．

図4-3と図4-4にそれぞれ固定および単純支持されたサンドイッチ球殻について，周方向波数 N による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化を示す．形状寸法比を $H/R=0.02$ とし，積層形態は二種類のクロスプライ積層，L1(実線): $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ およびL2(破線): $(90^\circ/0^\circ/C/0^\circ/90^\circ)$ とした．また，球殻の開き角を $\phi_0=30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の3通りとし，各周方向波数 N に対して1~3次モード ($s=1, 2, 3$) について調べた．

境界条件や積層形態にかかわらず，基本振動数は周方向波数 $N=1$ において生じ， $N=1$ 以上になると固有振動数は単調に増加する傾向がみられる．さらに，殻の開き角 ϕ_0 が大きくなる(殻が深くなる)につれて固有振動数は低下する．

一方，モード損失係数 η は周方向波数 N と同様に積層形態にも依存し，とくに，開き角 ϕ_0 が小さい(殻が浅い)場合には積層形態の影響を受けやすい．開き角 $\phi_0=30^\circ$ および 60° では，積層形態やモード次数 s にかかわらず，周方向波数 N が大きくなるにつれモード損失係数 η は全体的に増加する傾向がみられ，周方向の曲率が大きくなるほど減衰効果が大きく現れることがわかる．また，無次元振動数 Ω と同様に境界条件による影響はあまり大きくない．

図4-5と図4-6にそれぞれ固定および単純支持されたサンドイッチ球殻の振動モードを示す．各振動モードは， \bar{u} ， \bar{v} または \bar{w} の実部の最大値を1として正規化した．

軸対称振動($N=0$)では， $\phi_0=60^\circ$ ($s=1$)と $\phi_0=90^\circ$ ($s=1, 3$)において，周方向の変位 \bar{v} が卓越するねじりモードが生じ，その固有振動数は固定と単純支持の両者において一致している．

また，いずれの境界条件においても，ねじりモードを除いてモード次数 s が大きいほど，また，開き角が小さいほど \bar{u} ， \bar{v} および \bar{w} の連成が弱まり，面外変位 \bar{w} の卓越した振動モードとなる．

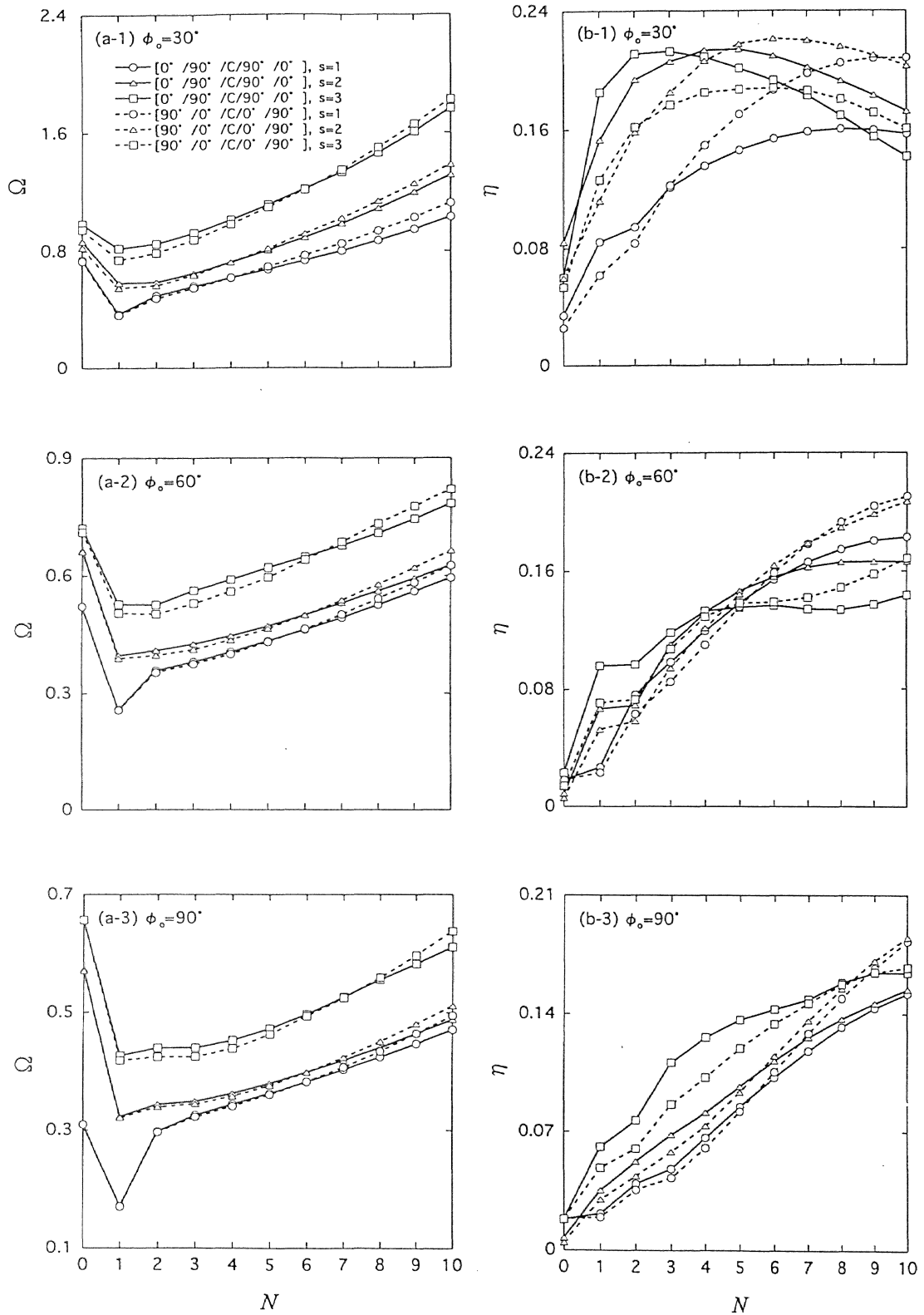


図4-3 周方向波数による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(固定)

【 $H/R=0.02$, $t_c/R=t_1/R=t_2/R=1/150$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$ 】

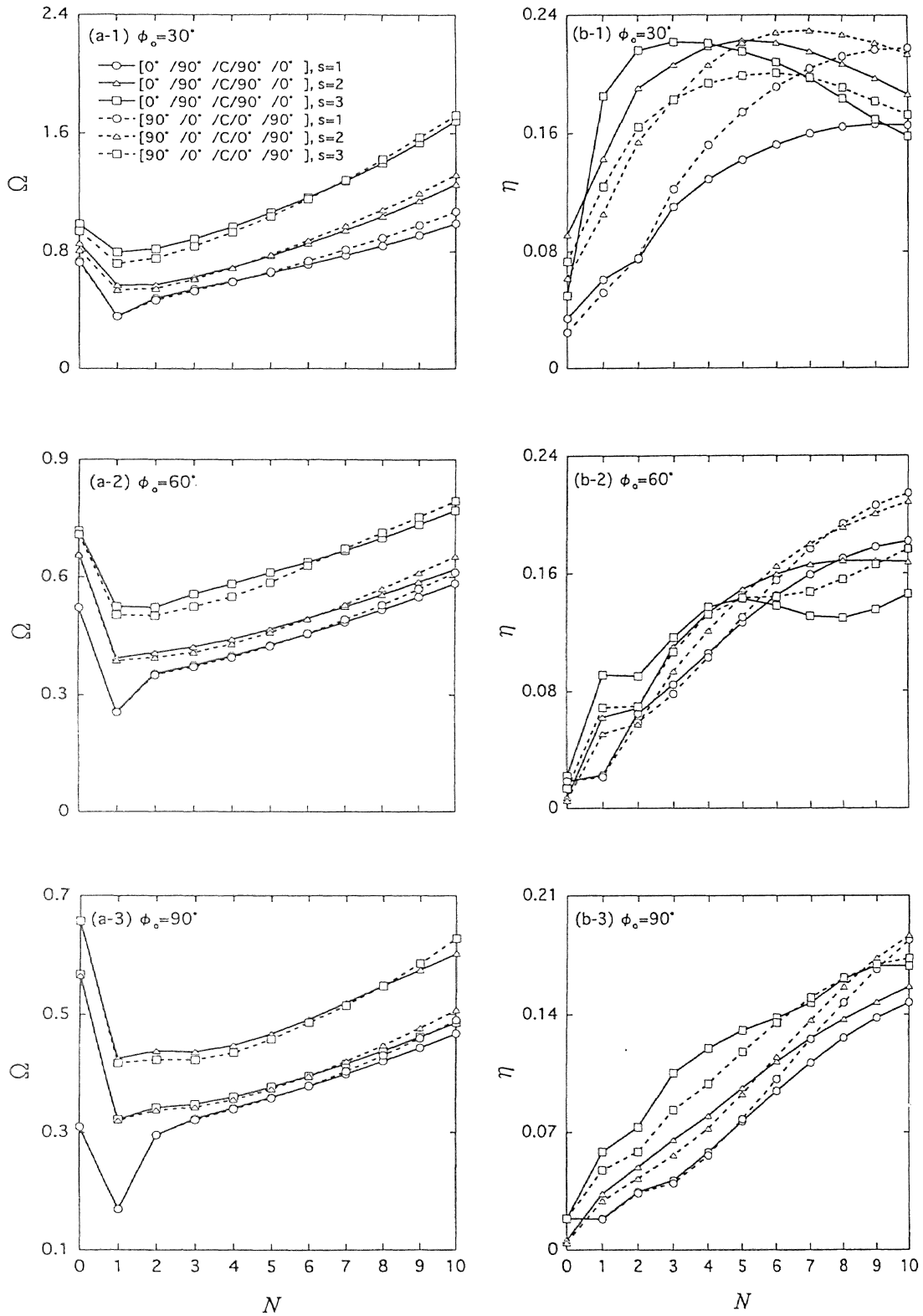


図4-4 周方向波数による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(単純支持)

[$H/R = 0.02$, $t_c/R = t_1/R = t_2/R = 1/150$, $E_1/E_2 = 20$, $G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = 0.5$,
 $G_{23}/E_2 = 0.37$, $E_c/E_1 = 10^{-3}$, $\nu_{12} = 0.28$, $\nu_c = 0.4$, $\rho_1/\rho_2 = 1$, $\rho_c/\rho_1 = 0.1$,
 $\delta_1 = 0.001$, $\delta_2 = 0.01$, $\delta_{12} = 0.015$, $\delta_c = 0.5$]

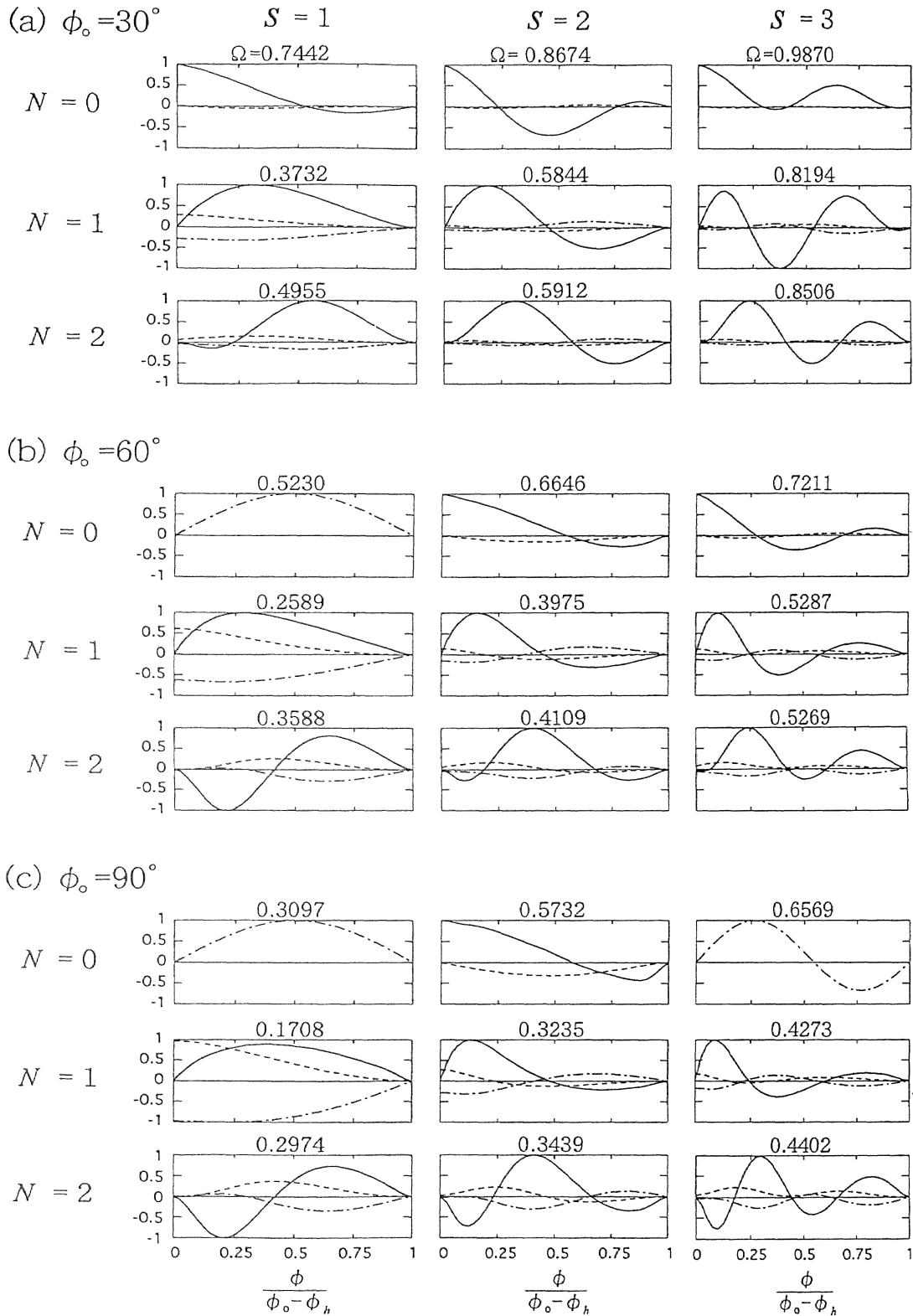


図4-5 複合材サンドイッチ球殻の振動モード（固定）

[$H/R = 0.02$, $t_c/R = t_1/R = t_2/R = 1/150$, $E_1/E_2 = 20$, $G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = 0.5$,
 $G_{23}/E_2 = 0.37$, $E_c/E_1 = 10^{-3}$, $\nu_{12} = 0.28$, $\nu_c = 0.4$, $\rho_1/\rho_2 = 1$, $\rho_c/\rho_1 = 0.1$,
 $\delta_1 = 0.001$, $\delta_2 = 0.01$, $\delta_{12} = 0.015$, $\delta_c = 0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$,

----- \bar{u} , - - - - - \bar{v} , ——— \bar{w}]

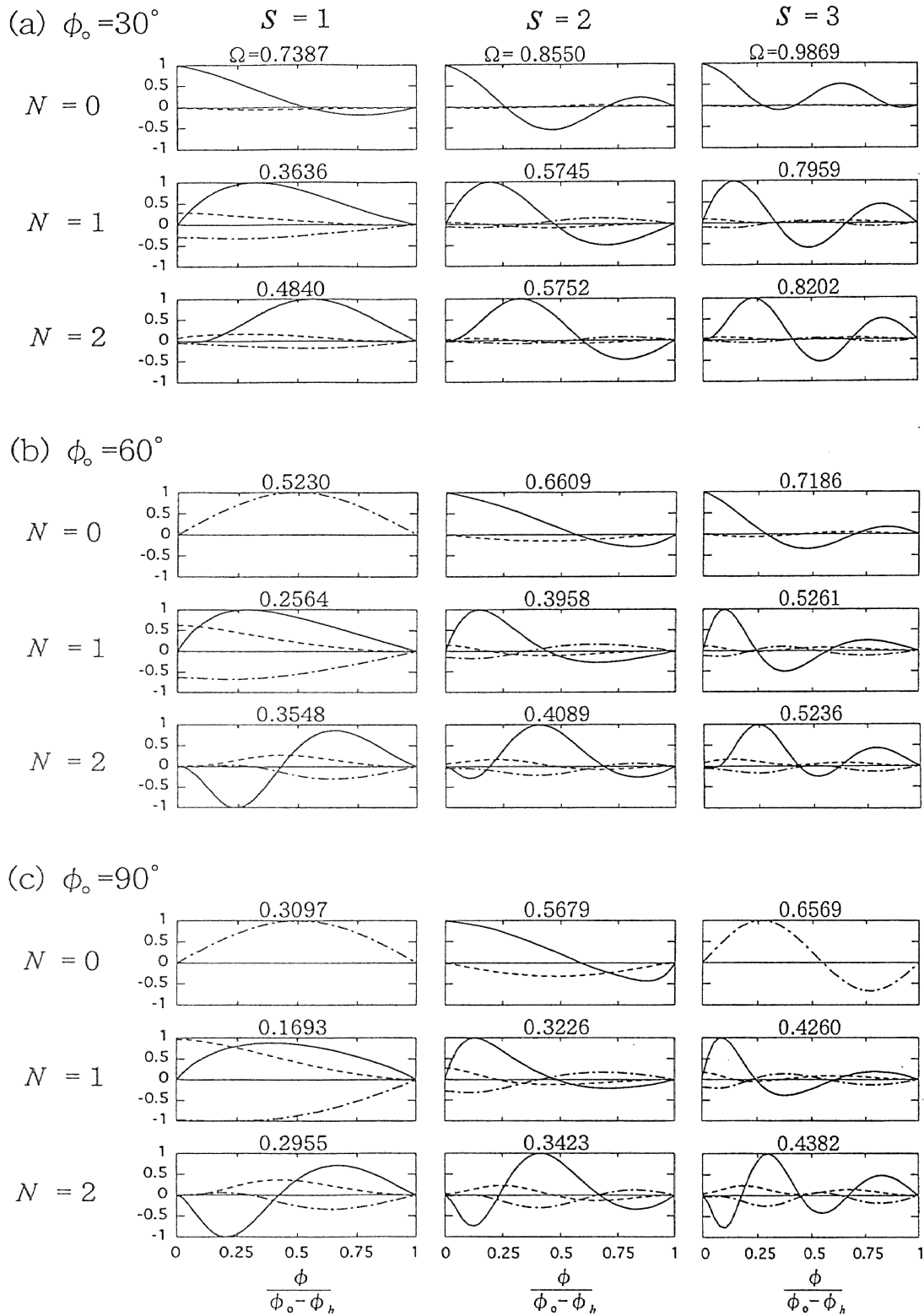


図4-6 複合材サンドイッチ球殻の振動モード（単純支持）
 [$H/R = 0.02$, $t_c/R = t_1/R = t_2/R = 1/150$, $E_1/E_2 = 20$, $G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = 0.5$,
 $G_{23}/E_2 = 0.37$, $E_c/E_1 = 10^{-3}$, $\nu_{12} = 0.28$, $\nu_c = 0.4$, $\rho_1/\rho_2 = 1$, $\rho_c/\rho_1 = 0.1$,
 $\delta_1 = 0.001$, $\delta_2 = 0.01$, $\delta_{12} = 0.015$, $\delta_c = 0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$,
 ----- \bar{u} , ----- \bar{v} , ——— \bar{w}]

表4-12と表4-13にそれぞれ固定および単純支持されたサンドイッチ球殻について、無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η における積層形態の影響を示す。形状寸法比は $H/R = 0.02$, $t_1/R = t_2/R = t_c/R = 1/150$ とし、開き角 $\phi = 30^\circ$, 60° および 90° の3通りについて調べた。また、表面材1,2の積層数を各二層(表面材1と2の合計で四層)とした場合に考えられる12種類すべての積層形態について検討し、モード次数は $s=1\sim 3$ について調べた。

これらの表から、積層形態が $(0^\circ/90^\circ/C/0^\circ/90^\circ)$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ あるいは $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ)$ の場合に最も高い基本振動数が与えられ、そのときの周方向波数はすべて $N=1$ となることがわかる。また、いずれの境界条件および開き角においても、積層形態が $(0^\circ/0^\circ/C/0^\circ/0^\circ)$ の場合に最も低い基本振動数を与えている。したがって、表面材の積層形態については、一方向積層よりもクロスプライ積層の方が球殻の動的剛性の向上に効果があると考えられる。さらに、開き角 $\phi_0 = 30^\circ$ と 60° の積層形態 $(90^\circ/90^\circ/C/90^\circ/90^\circ)$ の場合を除いて、基本振動数は周方向波数 $N=1$ で与えられ、基本振動数を与える周方向波数は境界条件に依存しない。さらに、開き角 $\phi_0 = 30^\circ$ と 60° の場合ではみられないねじりモード($N=0$)が、開き角 $\phi_0 = 90^\circ$ のモード次数 $s=3$ において生じる。これらのねじりモードでは、積層形態および境界条件にかかわらずモード損失係数はすべて有効数字4桁で同じ値($\eta = 1.844$)となる。

また、固有振動数が高いほどモード損失係数が高くなるわけではなく、モード損失係数は積層形態、境界条件、開き角および周方向波数に依存する。全体的な傾向として、表面材を一方向積層するよりもクロスプライ積層した方がモード損失係数が高く、減衰効果があるといえる。

表4-12 無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η における
積層形態の影響(固定)

[$H/R=0.02$, $t_c/R=t_1/R=t_2/R=1/150$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$]

Laminations	1st		2nd		3rd	
	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$
(a) Opening angle : $\phi_o = 30^\circ$						
($0^\circ / 0^\circ / C / 0^\circ / 0^\circ$)	30.19(1) ^a	9.289	42.70(0)	13.19	50.72(2)	7.725
($90^\circ / 0^\circ / C / 0^\circ / 0^\circ$)	32.26(1)	6.435	47.78(2)	7.916	51.69(1)	11.35
($90^\circ / 90^\circ / C / 90^\circ / 90^\circ$)	32.37(0)	4.983	33.54(1)	5.555	34.76(2)	10.42
($90^\circ / 90^\circ / C / 0^\circ / 0^\circ$)	32.38(1)	4.178	45.49(2)	6.045	52.23(0)	2.935
($90^\circ / 90^\circ / C / 90^\circ / 0^\circ$)	35.52(1)	4.682	44.32(2)	8.119	50.97(3)	11.52
($90^\circ / 0^\circ / C / 90^\circ / 0^\circ$)	35.87(1)	7.874	47.69(2)	9.959	54.68(1)	14.34
($0^\circ / 90^\circ / C / 90^\circ / 90^\circ$)	36.25(1)	5.954	41.88(2)	7.256	47.82(3)	10.25
($0^\circ / 0^\circ / C / 90^\circ / 90^\circ$)	36.33(1)	7.757	45.17(2)	5.630	53.67(3)	6.600
($90^\circ / 0^\circ / C / 0^\circ / 90^\circ$)	36.36(1)	6.205	47.87(2)	8.358	54.94(3)	12.27
($0^\circ / 0^\circ / C / 0^\circ / 90^\circ$)	37.11(1)	7.744	50.71(2)	6.407	56.93(1)	12.20
($0^\circ / 90^\circ / C / 90^\circ / 0^\circ$)	37.32(1)	8.453	49.55(2)	9.460	56.26(3)	12.13
($0^\circ / 90^\circ / C / 0^\circ / 90^\circ$)	37.48(1)	6.906	48.61(2)	8.348	55.53(3)	11.66
(b) Opening angle : $\phi_o = 60^\circ$						
($0^\circ / 0^\circ / C / 0^\circ / 0^\circ$)	21.13(1)	3.330	27.07(1)	8.513	27.41(0)	6.937
($90^\circ / 0^\circ / C / 0^\circ / 0^\circ$)	24.44(1)	2.612	32.17(2)	6.209	34.37(1)	5.302
($90^\circ / 90^\circ / C / 0^\circ / 0^\circ$)	24.84(1)	2.425	32.97(2)	3.676	35.17(3)	5.097
($90^\circ / 90^\circ / C / 90^\circ / 90^\circ$)	25.36(2)	4.102	25.51(1)	2.392	26.62(3)	6.258
($0^\circ / 0^\circ / C / 0^\circ / 90^\circ$)	25.60(1)	2.805	35.85(2)	7.161	38.25(1)	5.901
($90^\circ / 0^\circ / C / 90^\circ / 0^\circ$)	25.67(1)	2.575	35.10(2)	7.258	37.49(3)	9.397
($90^\circ / 90^\circ / C / 90^\circ / 0^\circ$)	25.70(1)	2.088	34.47(2)	3.679	37.17(3)	6.154
($90^\circ / 0^\circ / C / 0^\circ / 90^\circ$)	25.73(1)	2.340	35.37(2)	6.331	37.54(3)	8.513
($0^\circ / 0^\circ / C / 90^\circ / 90^\circ$)	25.74(1)	2.787	35.05(2)	5.319	36.54(3)	6.034
($0^\circ / 90^\circ / C / 90^\circ / 90^\circ$)	25.79(1)	2.356	34.13(2)	4.094	35.34(3)	6.438
($0^\circ / 90^\circ / C / 90^\circ / 0^\circ$)	25.89(1)	2.713	35.88(2)	7.643	38.17(3)	9.870
($0^\circ / 90^\circ / C / 0^\circ / 90^\circ$)	25.91(1)	2.466	35.94(2)	6.832	37.99(3)	9.196
(c) Opening angle : $\phi_o = 90^\circ$						
($0^\circ / 0^\circ / C / 0^\circ / 0^\circ$)	14.74(1)	2.718	22.02(0)	4.617	22.59(1)	4.218
($90^\circ / 90^\circ / C / 90^\circ / 90^\circ$)	16.52(1)	1.857	22.08(2)	2.504	23.30(3)	3.607
($90^\circ / 0^\circ / C / 0^\circ / 0^\circ$)	16.73(1)	2.103	27.64(2)	3.274	29.18(1)	3.409
($0^\circ / 0^\circ / C / 0^\circ / 90^\circ$)	16.87(1)	2.103	29.74(2)	3.779	30.97(0)	1.844
($90^\circ / 90^\circ / C / 0^\circ / 0^\circ$)	16.96(1)	1.988	28.18(2)	2.539	29.85(1)	3.052
($0^\circ / 90^\circ / C / 90^\circ / 90^\circ$)	16.98(1)	1.916	28.99(2)	3.131	30.66(3)	3.627
($0^\circ / 0^\circ / C / 90^\circ / 90^\circ$)	16.99(1)	1.967	29.38(2)	3.268	30.97(0)	1.844
($90^\circ / 0^\circ / C / 0^\circ / 90^\circ$)	17.01(1)	1.959	29.62(2)	3.565	30.97(0)	1.844
($90^\circ / 0^\circ / C / 90^\circ / 0^\circ$)	17.04(1)	2.058	29.49(2)	3.860	30.97(0)	1.844
($0^\circ / 90^\circ / C / 0^\circ / 90^\circ$)	17.04(1)	2.056	29.87(2)	3.673	30.97(0)	1.844
($90^\circ / 90^\circ / C / 90^\circ / 0^\circ$)	17.08(1)	1.940	29.27(2)	2.821	30.97(0)	1.844
($0^\circ / 90^\circ / C / 90^\circ / 0^\circ$)	17.08(1)	2.169	29.74(2)	3.919	30.97(0)	1.844

^a Circumferential wave number.

表4-13 無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η における
積層形態の影響 (単純支持)

【 $H/R=0.02$, $t_c/R=t_1/R=t_2/R=1/150$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$ 】

Laminations	1st		2nd		3rd	
	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$	$\Omega \times 10^2$	$\eta \times 10^2$
(a) Opening angle : $\phi_o = 30^\circ$						
(0°/ 0°/C/ 0°/ 0°)	27.60(1) ^a	6.036	38.62(0)	13.77	45.35(1)	16.54
(90°/ 0°/C/ 0°/ 0°)	31.15(1)	4.787	45.96(2)	8.749	48.95(1)	11.15
(90°/90°/C/ 0°/ 0°)	31.97(1)	3.846	44.19(2)	7.591	49.91(0)	5.135
(90°/90°/C/90°/90°)	32.35(0)	4.952	33.32(1)	5.165	33.95(2)	9.116
(0°/90°/C/90°/90°)	35.10(1)	5.122	37.91(2)	5.752	41.42(3)	9.043
(0°/ 0°/C/90°/90°)	35.11(1)	6.833	40.23(2)	5.048	45.00(3)	6.452
(90°/90°/C/90°/ 0°)	35.39(1)	4.235	44.20(2)	8.579	50.54(3)	12.77
(90°/ 0°/C/90°/ 0°)	35.41(1)	6.198	47.26(2)	8.653	54.00(1)	13.43
(90°/ 0°/C/ 0°/90°)	36.09(1)	5.199	47.13(2)	7.572	53.36(3)	12.22
(0°/90°/C/90°/ 0°)	36.36(1)	6.082	48.40(2)	7.501	54.77(3)	11.04
(0°/ 0°/C/ 0°/90°)	36.39(1)	5.981	48.50(2)	5.563	54.21(1)	12.24
(0°/90°/C/ 0°/90°)	36.82(1)	5.212	46.92(2)	7.017	52.36(3)	11.67
(b) Opening angle : $\phi_o = 60^\circ$						
(0°/ 0°/C/ 0°/ 0°)	20.53(1)	2.193	26.20(1)	7.721	26.29(0)	6.131
(90°/ 0°/C/ 0°/ 0°)	24.21(1)	2.413	31.88(2)	5.510	33.95(3)	6.868
(90°/90°/C/ 0°/ 0°)	24.70(1)	2.324	32.83(2)	3.669	34.85(3)	5.125
(90°/90°/C/90°/90°)	25.28(2)	3.982	25.47(1)	2.343	26.45(3)	5.954
(0°/ 0°/C/ 0°/90°)	25.41(1)	2.403	35.38(2)	6.243	37.58(3)	7.389
(90°/ 0°/C/90°/ 0°)	25.48(1)	2.245	34.88(2)	6.518	37.24(3)	8.456
(90°/90°/C/90°/ 0°)	25.58(1)	1.951	34.45(2)	3.788	37.13(3)	6.312
(90°/ 0°/C/ 0°/90°)	25.61(1)	2.124	35.18(2)	5.843	37.26(3)	7.831
(0°/ 0°/C/90°/90°)	25.64(1)	2.747	34.10(2)	5.114	34.88(3)	5.445
(0°/90°/C/90°/ 0°)	25.64(1)	2.254	35.48(2)	6.478	37.69(3)	8.457
(0°/90°/C/90°/90°)	25.72(1)	2.300	33.15(2)	4.041	33.70(3)	5.362
(0°/90°/C/ 0°/90°)	25.74(1)	2.138	35.56(2)	5.950	37.43(3)	8.040
(c) Opening angle : $\phi_o = 90^\circ$						
(0°/ 0°/C/ 0°/ 0°)	14.32(1)	2.040	21.27(0)	3.670	22.18(1)	3.645
(90°/90°/C/90°/90°)	16.46(1)	1.805	22.05(2)	2.470	23.25(3)	3.528
(90°/90°/C/ 0°/ 0°)	16.68(1)	1.960	28.15(2)	2.561	29.71(1)	3.013
(90°/ 0°/C/ 0°/ 0°)	16.52(1)	1.872	27.56(2)	3.030	29.07(1)	3.254
(0°/ 0°/C/ 0°/90°)	16.76(1)	1.887	29.55(2)	3.411	30.97(0)	1.844
(90°/90°/C/90°/ 0°)	16.81(1)	1.866	29.26(2)	2.836	30.97(0)	1.844
(90°/ 0°/C/90°/ 0°)	16.87(1)	1.836	29.38(2)	3.544	30.97(0)	1.844
(90°/ 0°/C/ 0°/90°)	16.91(1)	1.807	29.60(2)	3.352	30.97(0)	1.844
(0°/ 0°/C/90°/90°)	16.93(1)	2.081	29.09(2)	3.316	30.84(3)	3.502
(0°/90°/C/90°/ 0°)	16.93(1)	1.828	29.55(2)	3.442	30.97(0)	1.844
(0°/90°/C/ 0°/90°)	16.95(1)	1.811	29.71(2)	3.322	30.97(0)	1.844
(0°/90°/C/90°/90°)	16.96(1)	1.968	28.69(2)	3.143	30.14(3)	3.567

^a Circumferential wave number.

図4-7と図4-8にそれぞれ固定および単純支持されたサンドイッチ球殻の無次元振動数 Ω とモード損失係数 η における開き角の影響を示す。ここでは、積層形態を $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ とし、厚さ比 $H/R=0.01, 0.02$ および 0.05 とした。また、開き角を $\phi_0=30^\circ\sim 90^\circ$ (半球殻)と変化させ、周方向波数 N に対して最低次の振動モード($s=1$)について調べる。

境界条件および厚さ比 H/R にかかわらず、開き角 ϕ_0 が増加するにつれて固有振動数は低下する傾向がみられ、この傾向は周方向波数 N および厚さ比 H/R が大きい、すなわち殻が肉厚になるほどより顕著になる。

また、いずれの境界条件、厚さ比 H/R および開き角に関しても、基本振動数は周方向波数 $N=1$ において生じることがわかる。さらに、軸対称振動($N=0$)では、開き角 $\phi_0=50^\circ$ 付近において、曲げモードからねじりモードに変わるため非軸対称振動($N\neq 0$)とは振動数曲線の傾向が異なる。

一方、モード損失係数は固有振動数のように開き角 ϕ_0 に対して比較的単調に変化せず、周方向波数 $N=2$ 以上では、ある開き角 ϕ_0 で最大となる場合もある。また、その最大のモード損失係数を与える開き角 ϕ_0 は厚さ比 H/R が増加するにつれて大きくなる傾向がみられる。さらに、軸対称振動($N=0$)では開き角 $\phi_0=50^\circ$ 付近において、曲げモードからねじりモードに変わるため、いずれの境界条件および厚さ比 H/R に対しても開き角 $\phi_0=50^\circ$ 以上ではモード損失係数はほぼ一定値を示す。

図4-9と図4-10にそれぞれ固定および単純支持されたサンドイッチ球殻の無次元振動数 Ω とモード損失係数 η における殻の厚さ比 H/R の影響を示す。ここでは、積層形態を $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ とし、開き角 $\phi_0=30^\circ, 60^\circ$ および 90° とした。また、 $H/R=0.01\sim 0.05$ と変化させ、周方向波数 N に対して最低次の振動モード($s=1$)について調べる。

境界条件にかかわらず、開き角 $\phi_0=60^\circ$ および 90° における軸対称振動($N=0$)を除き、厚さ比 H/R が増加する(殻が肉厚になる)につれて固有振動数は増加する傾向がみられ、この傾向は周方向波数 N が大きく、開き角 ϕ_0 が小さい(殻が浅い)ほどより顕著になる。

また、いずれの境界条件、厚さ比 H/R および開き角に対しても、基本振動数は周方向波数 $N=1$ において生じることがわかる。さらに、開き角 $\phi_0=60^\circ$ および 90° におけるねじりモード($N=0$)の固有振動数はほぼ一定な値

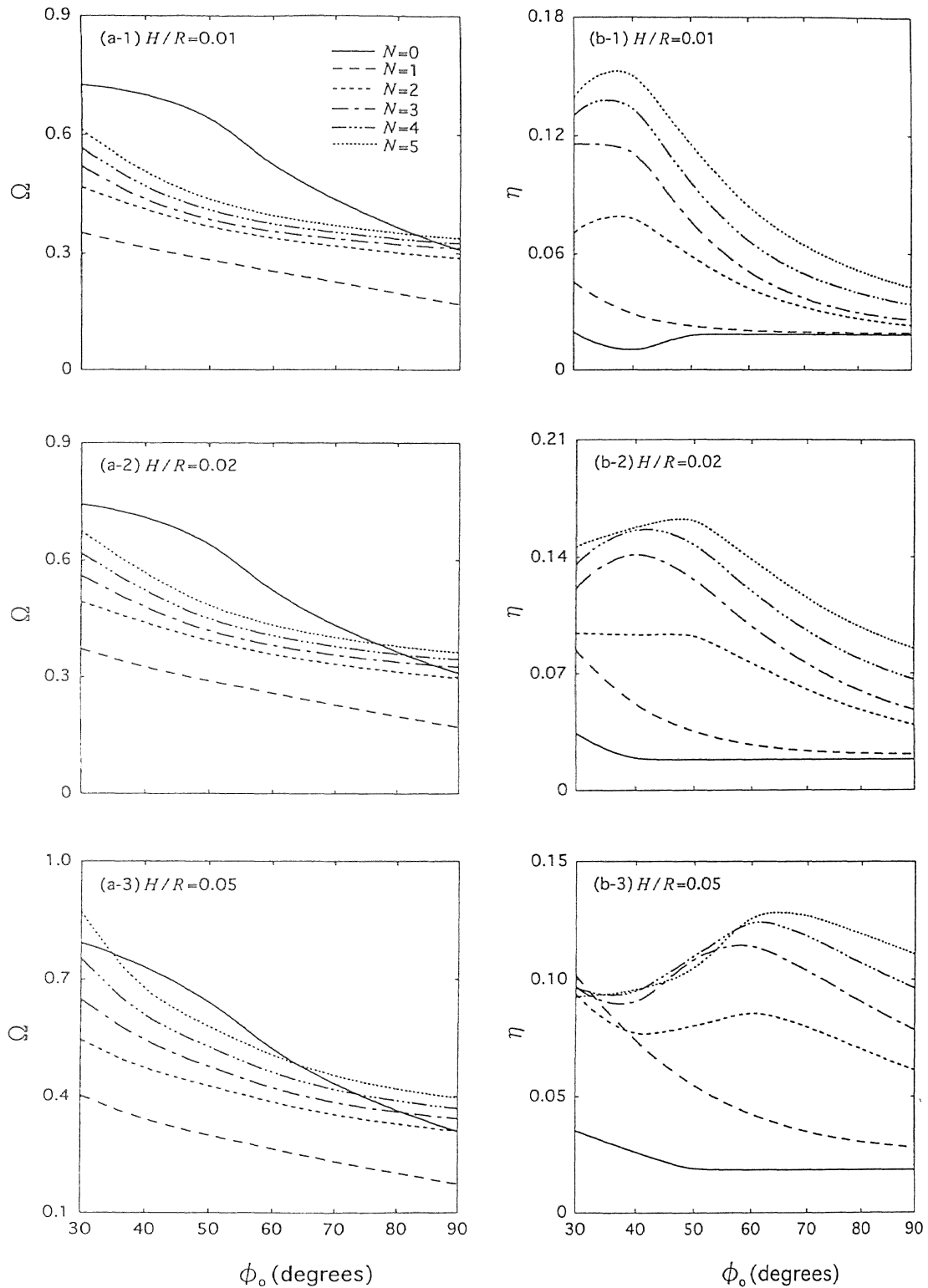


図4-7 開き角による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(固定)

【 $t_c/R=t_1/R=t_2/R=H/3R$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ 】

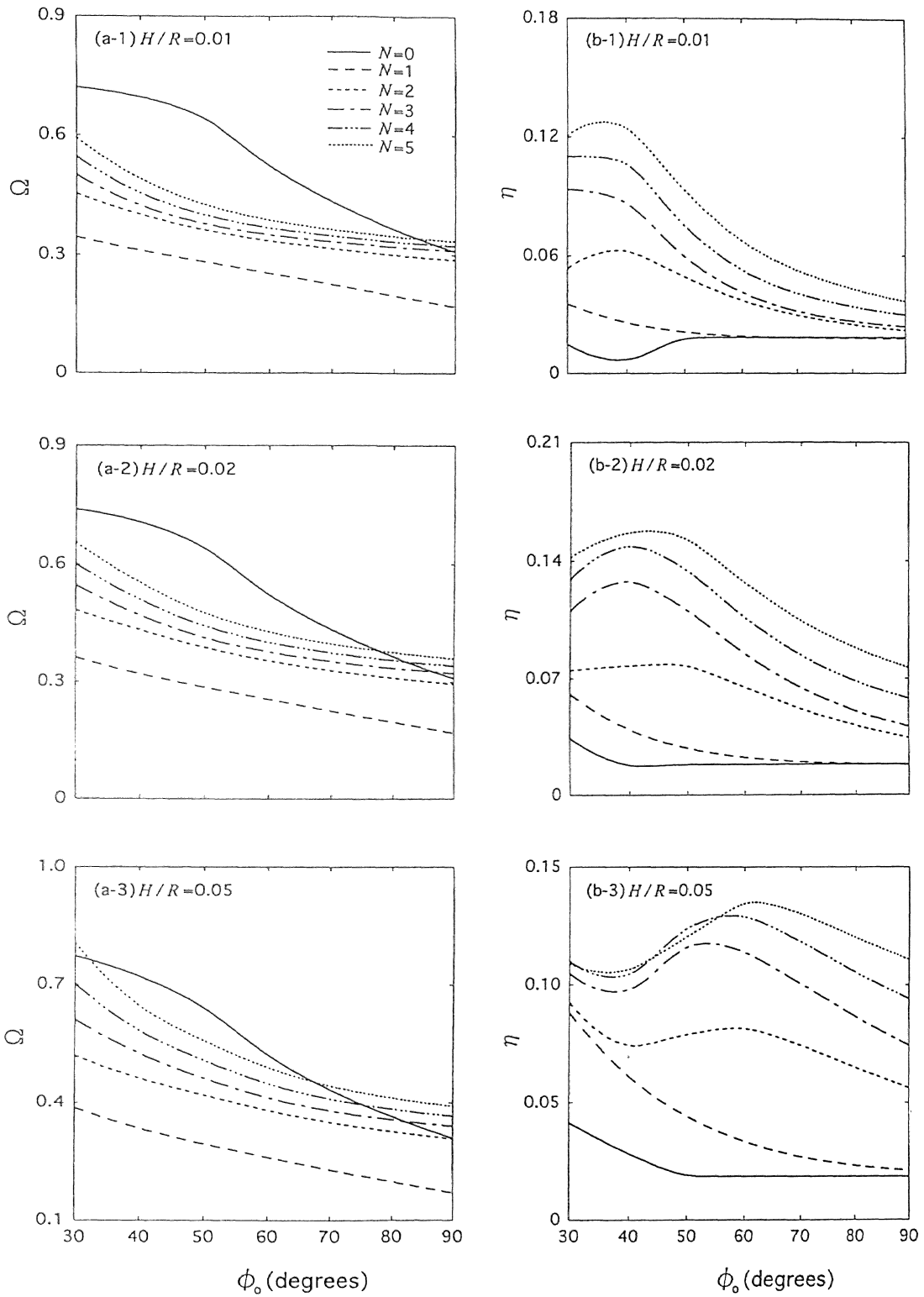


図4-8 開き角による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(単純支持)

【 $t_c/R=t_1/R=t_2/R=H/3R$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$,
 $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ 】

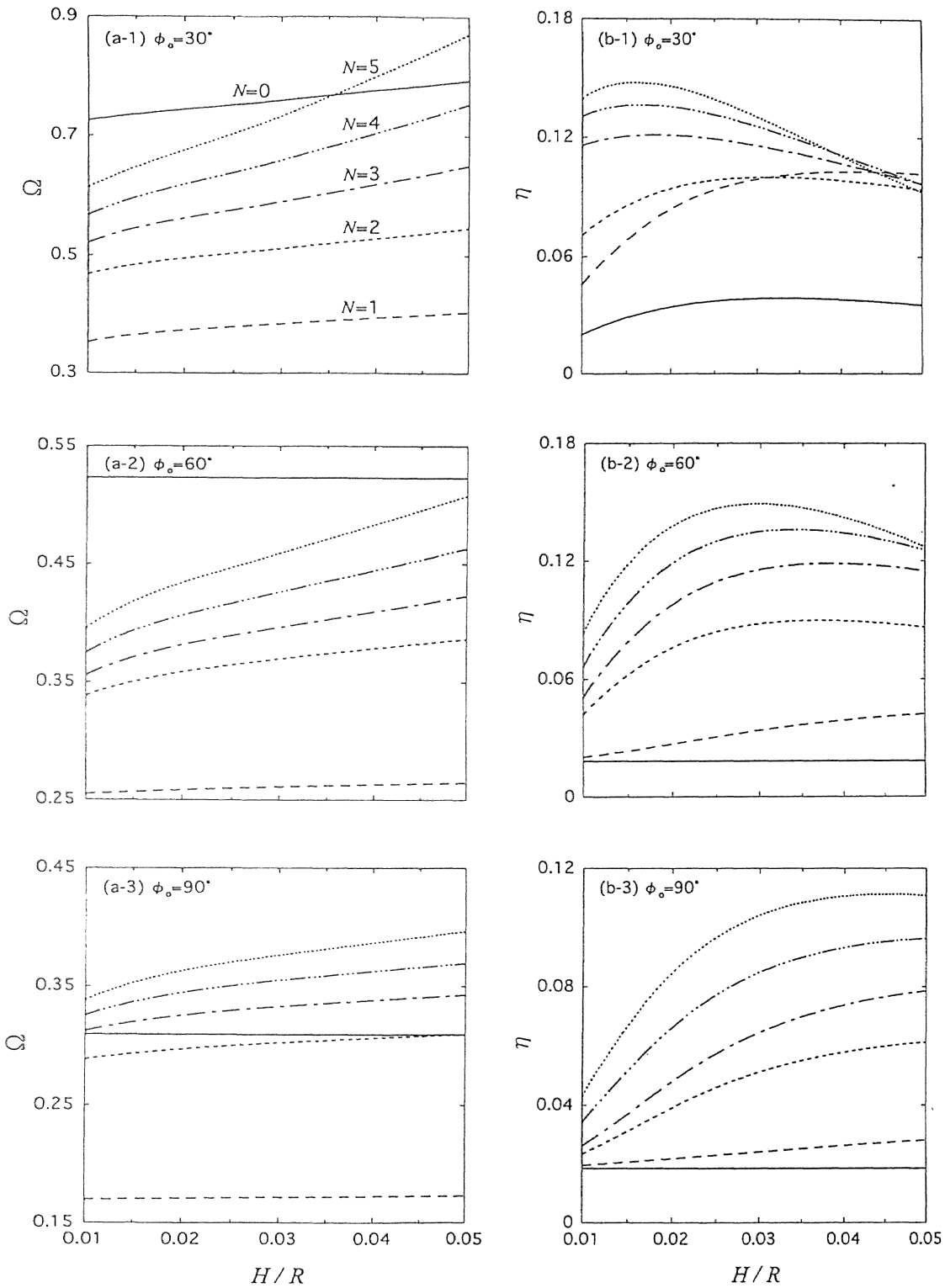


図4-9 厚さ比 H/R による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(固定)

【 $t_c/R = t_1/R = t_2/R = H/3R$, $E_1/E_2 = 20$, $G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = 0.5$,
 $G_{23}/E_2 = 0.37$, $E_c/E_1 = 10^{-3}$, $\nu_{12} = 0.28$, $\nu_c = 0.4$, $\rho_1/\rho_2 = 1$, $\rho_c/\rho_1 = 0.1$,
 $\delta_1 = 0.001$, $\delta_2 = 0.01$, $\delta_{12} = 0.015$, $\delta_c = 0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ 】

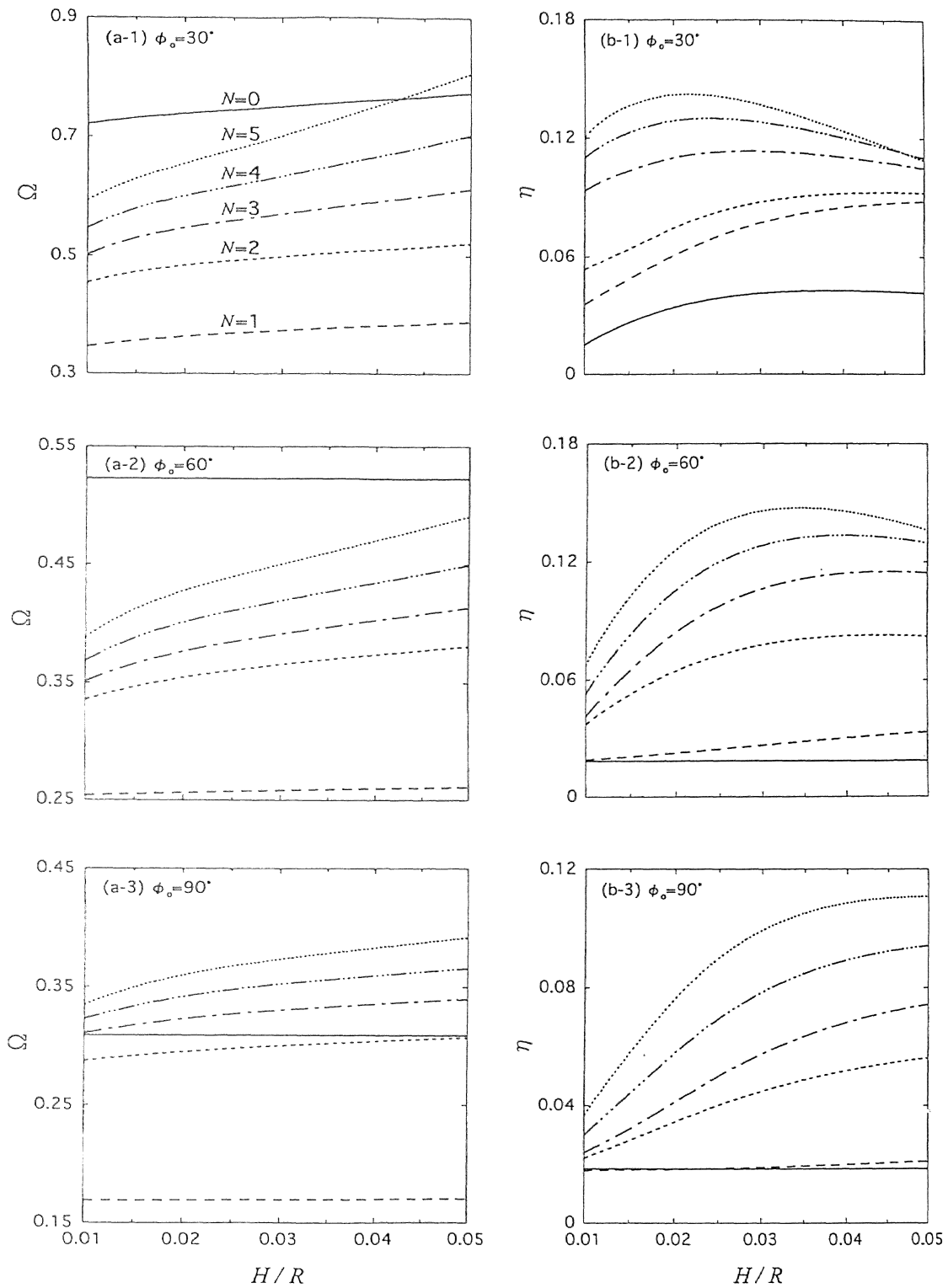


図4-10 厚さ比 H/R による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(単純支持)

【 $t_c/R = t_1/R = t_2/R = H/3R$, $E_1/E_2 = 20$, $G_{12}/E_2 = G_{31}/E_2 = 0.5$,
 $G_{23}/E_2 = 0.37$, $E_c/E_1 = 10^{-3}$, $\nu_{12} = 0.28$, $\nu_c = 0.4$, $\rho_1/\rho_2 = 1$, $\rho_c/\rho_1 = 0.1$,
 $\delta_1 = 0.001$, $\delta_2 = 0.01$, $\delta_{12} = 0.015$, $\delta_c = 0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$. 】

を示し、厚さ比 H/R による影響は小さい。

一方、モード損失係数は非軸対称振動($N \neq 0$)の場合、ある厚さ比 H/R において最大値をとる。開き角 ϕ_0 が増加するにつれて、その最大のモード損失係数を与える厚さ比 H/R は大きくなる傾向がみられる。つまり、高次の周方向波数をもつ振動モードでは、殻が比較的浅い場合、薄肉の方が振動減衰能が高く、反対に球殻が比較的深い場合には、厚肉の方が高い減衰効果が得られる。さらに、開き角 $\phi_0 = 60^\circ$ および 90° におけるねじりモード($N=0$)のモード損失係数はほぼ一定な値を示し、厚さ比 H/R にほとんど影響を受けない。

図4-11と図4-12にそれぞれ固定および単純支持されたサンドイッチ球殻について、無次元振動数 Ω とモード損失係数 η における心材と殻の厚さ比 t_c/H の影響を示す。ここでは、積層形態を $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ とし、開き角 $\phi_0 = 30^\circ, 60^\circ$ および 90° とした。また、 $t_c/H = 0.1 \sim 0.9$ と変化させ、周方向波数 N に対して最低次の振動モード($s=1$)について調べる。

境界条件にかかわらず、 $\phi_0 = 30^\circ$ (浅い球殻)の場合、厚さ比 t_c/H が増加するにつれて、周方向波数 $N=2$ 以下では固有振動数は減少するが、周方向波数 $N=3$ 以上では剛性の低下により一旦減少し、ある t_c/H において最小となった後、質量効果により増加する。 $\phi_0 = 60^\circ$ の場合にも、周方向波数 $N=4, 5$ では、ある t_c/H において最小となるが、 $\phi_0 = 90^\circ$ (深い球殻)では、いずれの周方向波数においても心厚さ比 t_c/H が増加するにつれて固有振動数は減少する。このことから、殻が浅く、周方向波数において高次の振動モードほど質量効果の影響を受けやすいといえる。

一方、モード損失係数 η に関しては、 $\phi_0 = 30^\circ$ (浅い球殻)と $\phi_0 = 90^\circ$ (深い球殻)の場合、いずれの周方向波数に関しても、心厚さ比 t_c/H が大きくなるにつれてモード損失係数は増加する傾向がみられる。しかし $\phi_0 = 60^\circ$ の場合、周方向波数 $N=2 \sim 5$ では $t_c/H = 0.8$ 付近でモード損失係数は最大値をとる。この場合、周方向波数において高次の振動モードでは、モード損失係数を最大にする心材厚さ比 t_c/H が存在する。

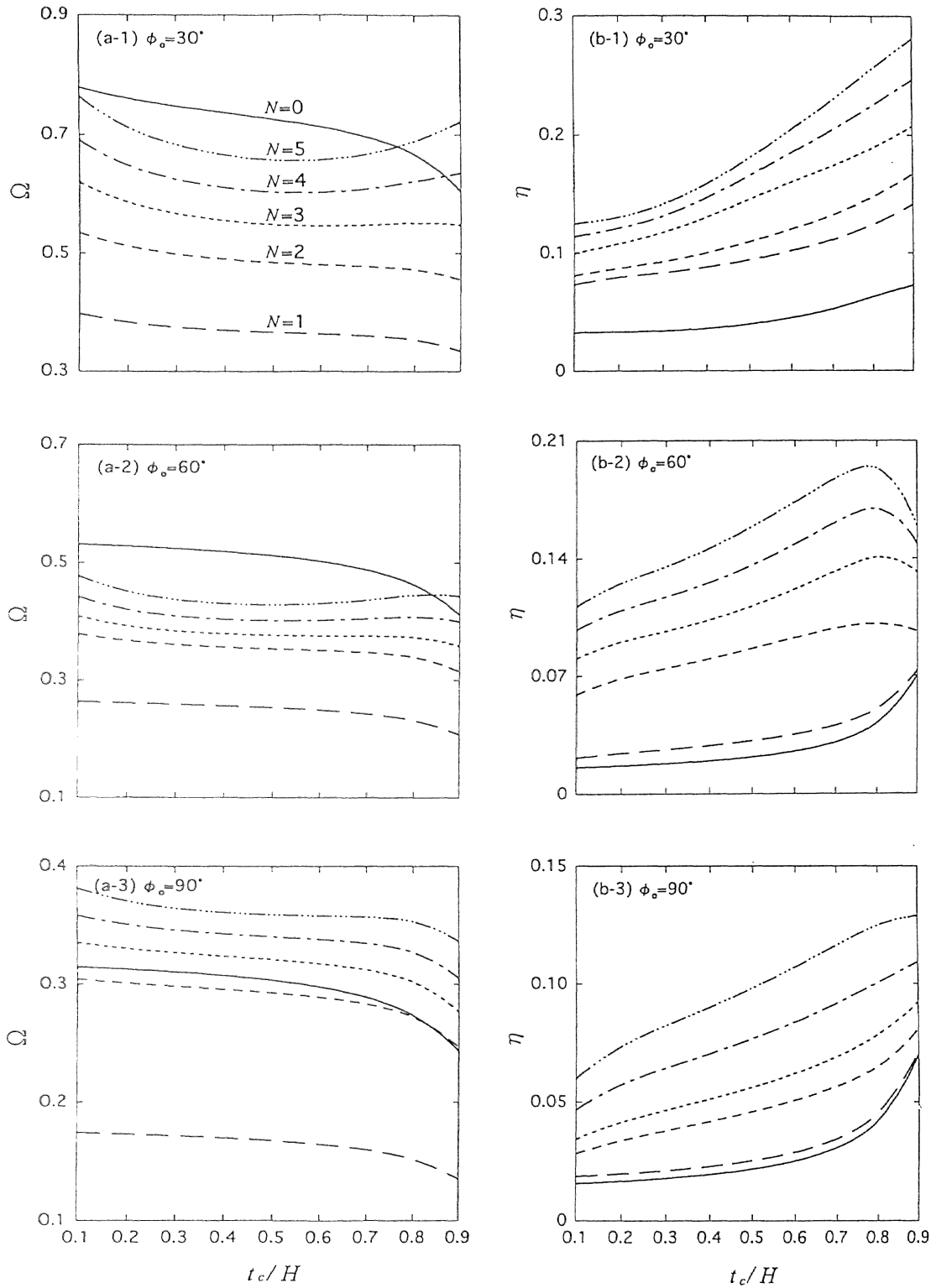


図4-11 心材厚さ比 t_c/H による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化 (固定) 【 $H/R=0.02$, $t_1/R=t_2/R=(0.02-t_c/R)/2$, $t_c/R=t_c/50H$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$, $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$, $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, ($0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ$)】

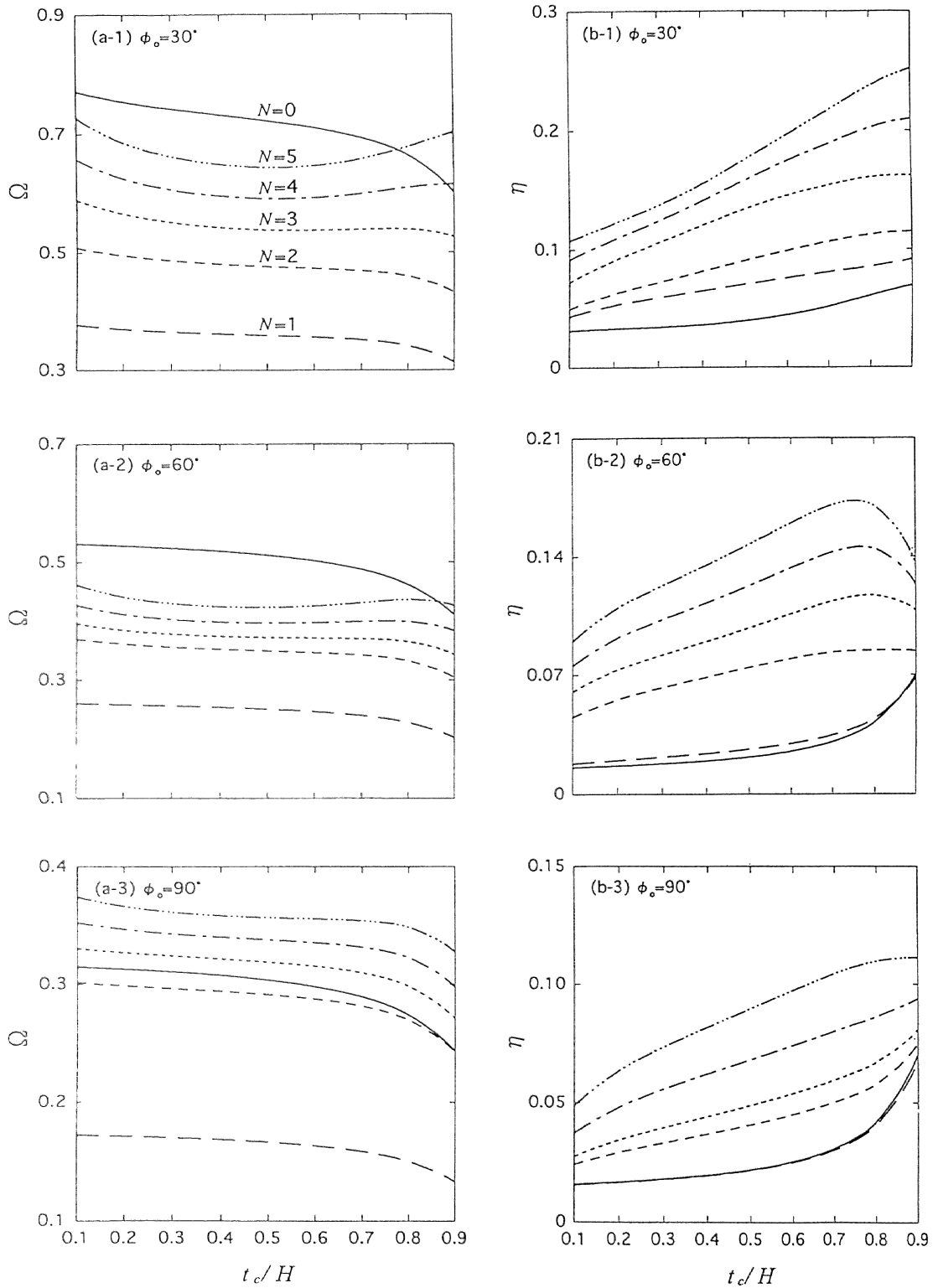


図4-12 心材厚さ比 t_c/H による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化 (単純支持) 【 $H/R=0.02$, $t_1/R=t_2/R=(0.02-t_c/R)/2$, $t_c/R=t_c/50H$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=G_{31}/E_2=0.5$, $G_{23}/E_2=0.37$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$, $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(0^\circ/90^\circ/C/90^\circ/0^\circ)$ 】

4.4 結 言

本章では、FRP積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ球殻の振動減衰特性をリッツ法により解析した。

微小変形理論および積層理論に基づいて球殻の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価し、球殻のラグランジュ関数を極小化することにより、球殻の振動数方程式を導出した。

数値計算では、まず、解の収束性を調べ、他の著者らによる解析結果との比較を行い、本解析結果の精度と妥当性を検討した。つぎに、周方向波数、表面材の積層形態、開き角および各種形状寸法比が固有振動数、モード損失係数および振動モードに及ぼす影響を調べ、複合材サンドイッチ球殻の振動減衰特性を検討した。その結果を要約すると以下のようなになる。

(1) 変位関数の項数による固有振動数とモード損失係数の収束状況を調べ、項数を適切に取ることによって実用上十分な精度を有する解が得られることを示した。また、他の著者らによる解析結果との比較を行い、本解析結果が十分な精度と妥当性を有することを確かめた。

(2) 表面材をクロスプライ積層した場合、基本振動数は周方向波数 $N=1$ において生じ、 $N=1$ 以上では固有振動数は単調に増加する。また、周方向波数 N が大きくなるにつれ、モード損失係数 η は全体的に増加する傾向がみられ、周方向の曲率が大きくなるほど減衰効果が大きく現れる。

(3) 軸対称振動の場合、周方向の変位が卓越するねじりモードが生じ、その固有振動数は境界条件に依存しない。また、ねじりモードを除いて高次モードほど、また、開き角が小さいほど各変位の連成が弱まり、面外変位の卓越した振動モードとなる。

(4) 表面材の積層形態は一方向積層よりも、クロスプライ積層の方が球殻の剛性および減衰能の向上に効果がある。

(5) 固有振動数は開き角が増加するにつれて低下し、その変化割合は周方向波数および厚さ比 H/R が大きいほどより顕著である。また、モード損失係数は開き角に対して単調に変化せず、非軸対称振動ではある開き角で最大となる場合もある。

(6) 厚さ比 H/R が増加するにつれて固有振動数は増加するが、周方向波数が大きく、開き角が小さいほど変化割合が大きい。また、高次の周方向波数をもつ振動モードでは、殻が浅い場合、薄肉の方が減衰効果が高く、殻が深い場合には、厚肉の方が高い減衰効果が得られる。

(7) 心材と殻の厚さ比 t_c/H を変化させた場合、殻が浅く、高次の周方向波数をもつ振動モードほど質量効果の影響を大きく受ける。また、心材厚さ比 t_c/H が大きくなるにつれて、一般にモード損失係数は増加するが、 $t_c/H = 0.8$ 付近で最大となる場合もある。

第5章 複合材サンドイッチ偏平殻の振動減衰特性

5.1 緒言

偏平殻は航空宇宙機器などの基本構造部材をはじめとし、さまざまな工業分野に広く用いられている。構造設計上これらの振動特性を把握することは重要であり、Leissaら⁽⁷²⁾⁽⁷³⁾による等方性偏平殻の自由振動をはじめ、これまで数多くの研究報告がなされている。

また、航空宇宙分野における構造物の軽量化を目的として、FRP積層材を使用した積層偏平殻の振動に関する研究^{(76)~(83)}が多く見受けられるようになった。また、サンドイッチ構造から成る偏平殻に関しては、Ahmed⁽⁸⁴⁾の有限要素法による自由振動と静たわみ解析をはじめ、定式化について示したいくつもの研究⁽⁸⁵⁾が報告されているにすぎない。

一方、粘弾性心材の内部減衰を考慮したサンドイッチ偏平殻の振動減衰特性に関しては、XiaとLukasiewicz⁽⁸⁷⁾が幾何学的非線形性を考慮して、サンドイッチ円筒偏平殻の散逸エネルギーを調べている。

このように、これまでの偏平殻の振動に関する研究は、減衰を考慮しない等方性およびFRP積層偏平殻の自由振動に関するものが多い。また、サンドイッチ構造から成る偏平殻の振動減衰特性に関しては、等方性表面材を使用した場合が多く、積層表面材を有するサンドイッチ偏平殻の振動減衰特性に関する研究はほとんど見受けられない。また、これらの研究は厳密解や、有限要素法による近似解を扱ったものが多い。

このような背景を踏まえ、本章ではFRP積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ偏平殻の振動減衰特性をリッツ法により解析する。はじめに、偏平殻の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価し、偏平殻のラグランジュ関数を極小化することにより、偏平殻の振動数方程式を導く。数値計算では、はじめに解の収束性を調べ、他の著者らによる解析結果との比較から本解析結果の精度と妥当性を検討する。つぎに、積層表面材の繊維角度および曲率比が固有振動数、モード損失係数

および振動モードに及ぼす影響を検討し、複合材サンドイッチ偏平殻の振動減衰特性を考究する。

5.2 理論解析

解析において、以下の仮定を用いる。

(1) 表面材と心材は完全に接着されており、それらの界面において、はく離やすべりは生じない。

(2) 表面材の厚さは辺長に比べて小さく、面外方向の垂直応力は他の応力に比べて微小となるため無視できる。また、変位、回転およびひずみは微小であるため線形弾性体としての扱いが可能である。

(3) 心材の変形に関しては面内伸縮および面外せん断変形を考慮し、解析において、これに関する応力とひずみを考慮する。

以上の仮定により、変位を面外方向に連続な関数を用いて表すことができ、複合材サンドイッチ偏平殻を、積層表面材を有する均質な連続体と考えて異方性弾性論の適用が可能となる。

5.2.1 形状と座標系

図5-1と図5-2にそれぞれ複合材サンドイッチ偏平殻の形状と座標系、および中央面の形状を示す。偏平殻は心材とそれを挟む上下の積層表面材から構成されている。座標系の原点 O を偏平殻の中央にとり、図のように座標 (x, y, z) をとる。また、偏平殻の任意点における x, y, z 方向の各変位を u_l, v_l, w_l ($l=1$; 表面材1, 2; 表面材2, c ; 心材) とする。 a および b は、それぞれ x および y 方向の辺長であり、 t_1, t_2 および t_c は、それぞれ表面材1, 表面材2 および心材の厚さを表す。さらに、表面材1が N_1 層、表面材2が N_2 層からなるサンドイッチ偏平殻を考え、長方形板の場合(図2-1(b))と同様に表面材 n ($n=1, 2$)の第 m 層上面への中央面からの距離を $h_m^{(n)}$ とする。また、材料主軸1(ラミナの繊維方向)と x 軸がなす角度を繊維角度 $\theta_m^{(n)}$ とする。

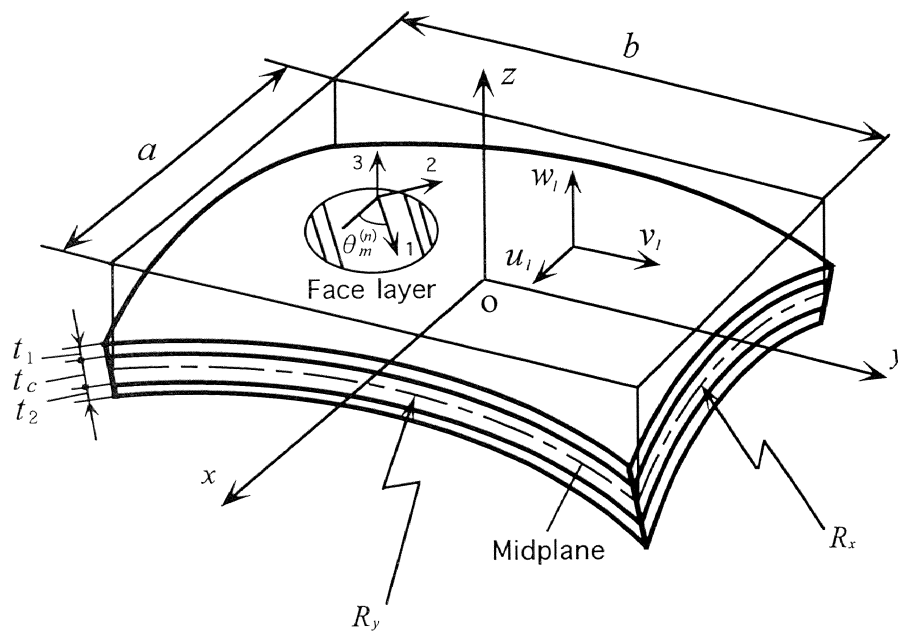
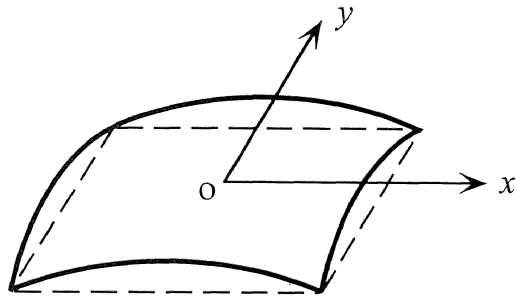
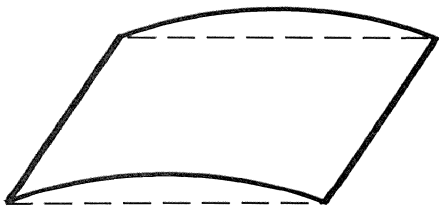


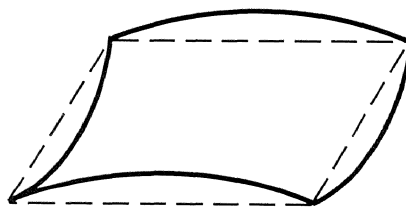
図5-1 複合材サンドイッチ偏平殻の形状と座標系



(a) Spherical shell
 $(R_x / R_y = 1)$



(b) Circular cylindrical shell
 $(R_x / R_y = 0)$



(c) Hyperbolic paraboloidal shell
 $(R_x / R_y = -1)$

図5-2 複合材サンドイッチ偏平殻の形状 (中央面)

5.2.2 変位場の仮定とひずみ

サンドイッチ偏平殻の変位場は、表面材の面外せん断変形を無視した長方形板の変位場と基本的な考え方は同様(図2-2)である。偏平殻の厚さは辺長に比べて小さいため、表面材および心材の変形を中央面における変位量 u_0, v_0 および w_0 を用いて記述することを考えると、 x, y, z 方向の各変位 u_l, v_l, w_l ($l=1,2,c$)は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_0 - z\phi_x + \frac{t_c}{2}(\phi_x - \psi_x) \\
 v_1 &= v_0 - z\phi_y + \frac{t_c}{2}(\phi_y - \psi_y) \\
 u_2 &= u_0 - z\phi_x - \frac{t_c}{2}(\phi_x - \psi_x) \\
 v_2 &= v_0 - z\phi_y - \frac{t_c}{2}(\phi_y - \psi_y) \\
 u_c &= u_0 - z\psi_x \\
 v_c &= v_0 - z\psi_y \\
 w_1 &= w_2 = w_c = w_0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

ここで、 ϕ_x および ψ_x は、それぞれ表面材および心材の $x-z$ 面における z 軸からの回転であり、 ϕ_y および ψ_y は $y-z$ 面における z 軸からの回転を表す。また、表面材の変形に対し、“中央面に垂直な直線上の点は、変形後も変形した中央面の法線上にある”とするキルヒホッフの仮定を適用すると、回転角 ϕ_x および ϕ_y は

$$\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{5.2}$$

と書ける。さらに、微小変形理論に基づくと、表面材 n ($n=1,2$)と心材 c のひずみ-変位関係式は

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^{(n)} &= \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{w_n}{R_x}, \quad \varepsilon_y^{(n)} = \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{w_n}{R_y}, \quad \gamma_{xy}^{(n)} = \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \\
 \varepsilon_x^{(c)} &= \frac{\partial u_c}{\partial x} + \frac{w_c}{R_x}, \quad \varepsilon_y^{(c)} = \frac{\partial v_c}{\partial y} + \frac{w_c}{R_y}, \quad \gamma_{xy}^{(c)} = \frac{\partial u_c}{\partial y} + \frac{\partial v_c}{\partial x} \\
 \gamma_{xz}^{(c)} &= \frac{\partial u_c}{\partial z} + \frac{\partial w_c}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^{(c)} = \frac{\partial v_c}{\partial z} + \frac{\partial w_c}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

となる。

式(5.1)を式(5.3)に代入すると表面材 n の各ひずみは

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(n)} &= \varepsilon_{x0} + z\kappa_x + (-1)^n \frac{t_c}{2} \gamma_x \\ \varepsilon_y^{(n)} &= \varepsilon_{y0} + z\kappa_y + (-1)^n \frac{t_c}{2} \gamma_y \\ \gamma_{xy}^{(n)} &= \gamma_{xy0} + z\kappa_{xy} + (-1)^n \frac{t_c}{2} \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (5.4)$$

となる。また、心材の各ひずみは

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(c)} &= \varepsilon_{x0} + z\kappa_x^c, \quad \varepsilon_y^{(c)} = \varepsilon_{y0} + z\kappa_y^c, \quad \gamma_{xy}^{(c)} = \gamma_{xy0} + z\kappa_{xy}^c \\ \gamma_{zx}^{(c)} &= -\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^{(c)} = -\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\end{aligned}\quad (5.5)$$

となる。ただし、式(5.4)と式(5.5)において

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w_0}{R_x}, \quad \varepsilon_{y0} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w_0}{R_y}, \quad \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \gamma_x &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ \kappa_x^c &= -\frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \kappa_y^c = -\frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \kappa_{xy}^c = -\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x}\end{aligned}\quad (5.6)$$

である。上式において、 ε_{x0} と ε_{y0} は式(2.50)と異なり、曲率の項が付加される。

5.2.3 応力-ひずみ関係式

表面材における各ラミナは1, 2, 3軸のいずれの軸に対しても対称面をもつ直交異方性材料である。したがって、異方性弾性論における一般化されたフックの法則により表面材 $n(n=1, 2)$ の第 m 層目のラミナにおける応力-ひずみ関係式は式(2.7)で与えられる。式(2.7)中の剛性係数 Q_{ij} は第 m 層目のラミナの内部減衰を考慮した複素弾性係数 E_1^* , E_2^* , G_{12}^* およびポアソ

ン比 ν_{12}, ν_{21} を用いて

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1^*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2^*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{E_1^*\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2^*\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}^* \end{aligned} \quad (5.7)$$

で与えられる。ただし

$$E_1^* = E_1(1 + j\delta_1), \quad E_2^* = E_2(1 + j\delta_2), \quad G_{12}^* = G_{12}(1 + j\delta_{12}), \quad j = \sqrt{-1} \quad (5.8)$$

である。また、座標 (x, y, z) 上に変換されたラミナの応力-ひずみ関係式は式(2.51)と同様である。

一方、粘弾性心材は等方性であるため、応力-ひずみ関係式は材料損失係数 δ_c を考慮した複素縦弾性係数 E_c^* およびポアソン比 ν_c を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(c)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(c)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(c)} \quad (5.9)$$

ここで

$$Q_{11}^{(c)} = Q_{22}^{(c)} = \frac{E_c^*}{1 - \nu_c^2}, \quad Q_{12}^{(c)} = \frac{E_c^*\nu_c}{1 - \nu_c^2}, \quad Q_{44}^{(c)} = Q_{55}^{(c)} = Q_{66}^{(c)} = \frac{E_c^*}{2(1 + \nu_c)} \quad (5.10)$$

であり、複素縦弾性係数 E_c^* は E_c を実部として

$$E_c^* = E_c(1 + j\delta_c), \quad j = \sqrt{-1} \quad (5.11)$$

と書ける。

5.2.4 エネルギー評価

サンドイッチ偏平殻の自由振動に対して角振動数 ω の調和振動を考えると、偏平殻の各変位は

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= U_0(x, y) \sin \omega t \\
 v_0(x, y, t) &= V_0(x, y) \sin \omega t \\
 w_0(x, y, t) &= W_0(x, y) \sin \omega t \\
 \psi_x(x, y, t) &= \bar{\psi}_x(x, y) \sin \omega t \\
 \psi_y(x, y, t) &= \bar{\psi}_y(x, y) \sin \omega t
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

と表すことができる。つぎに、式(5.12)を用いて偏平殻の最大ひずみエネルギーと最大運動エネルギーを導く。

偏平殻の最大ひずみエネルギーは式(2.53)と同様な形で

$$\begin{aligned}
 U_f = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [\{\varepsilon^*\}^T [A^{(m)}] \{\varepsilon^*\} + 2\{\varepsilon^*\}^T [B] \{\kappa\} + 2\{\varepsilon^*\}^T [C] \{\gamma\} \\
 + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} + (t_c^2/4) \{\gamma\}^T [A^{(m)}] \{\gamma\} + 2\{\gamma\}^T [E] \{\kappa\}] dx dy
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

と与えられるが、式(5.6)で示したように ε_{x0} と ε_{y0} に曲率の項が付加されるため、式(5.13)において

$$\{\varepsilon^*\} = \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{W_0}{R_x}, \quad \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{W_0}{R_y}, \quad \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right\}^T \tag{5.14}$$

となる。

一方、心材の最大ひずみエネルギー U_c は

$$\begin{aligned}
 U_c = \frac{1}{2} \int_{-t_c/2}^{t_c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [Q_{11} \varepsilon_x^2 + Q_{22} \varepsilon_y^2 + Q_{66} \gamma_{xy}^2 \\
 + 2Q_{12} \varepsilon_x \varepsilon_y + Q_{44} \gamma_{yz}^2 + Q_{55} \gamma_{zx}^2]^{(c)} dx dy dz \\
 = \frac{1}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [\{\varepsilon_c\}^T [A^{(c)}] \{\varepsilon_c\} + \{\kappa_c\}^T [D^{(c)}] \{\kappa_c\}] dx dy
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

となる。ただし、上式において各マトリックスは

$$[A^{(c)}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_c A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_c A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}^{(c)}, \quad [D^{(c)}] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}^{(c)} \quad (5.16)$$

であり, k_c は心材のせん断補正係数である. また, 上式のマトリックスの各要素は

$$A_{ij}^{(c)} = \int_{-t_c/2}^{t_c/2} Q_{ij}^{(c)} dz = t_c Q_{ij}^{(c)}, \quad D_{ij}^{(c)} = \int_{-t_c/2}^{t_c/2} z^2 Q_{ij}^{(c)} dz = \frac{t_c^3}{12} Q_{ij}^{(c)} \quad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6) \quad (5.17)$$

である. また, 各ひずみベクトルは

$$\{\varepsilon_c\} = \left\{ \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{W_0}{R_x}, \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{W_0}{R_y}, -\psi_y + \frac{\partial W_0}{\partial y}, -\psi_x + \frac{\partial W_0}{\partial x}, \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right\}^T$$

$$\{\kappa_c\} = \left\{ -\frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial x}, -\frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial y}, -\frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial x} \right\}^T \quad (5.18)$$

となる. つぎに, 式(2.34)で与えられる無次元量と

$$\bar{\alpha} = \frac{a}{R_x} \quad (\text{代表曲率比}) \quad \bar{\beta} = \frac{R_x}{R_y} \quad (\text{2方向曲率比}) \quad (5.19)$$

$$\Lambda = \omega a \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} \times 10^2 \quad (\text{無次元振動数})$$

を扁平殻の最大ひずみエネルギー $U = U_f + U_c$ に代入すると

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{S_0}{\alpha \beta^2} \right) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\{\bar{\varepsilon}^*\}^T [\bar{A}^{(m)}] \{\bar{\varepsilon}^*\} + 2\beta \{\bar{\varepsilon}^*\}^T [\bar{B}] \{\bar{\kappa}\} + 2\beta \{\bar{\varepsilon}^*\}^T [\bar{C}] \{\bar{\gamma}\} + \beta^2 \{\bar{\kappa}\}^T [\bar{D}] \{\bar{\kappa}\} + (\lambda^2/4) \{\bar{\gamma}\}^T [\bar{A}^{(m)}] \{\bar{\gamma}\} + 2\beta^2 \{\bar{\gamma}\}^T [\bar{E}] \{\bar{\kappa}\} + \{\bar{\varepsilon}_c^*\}^T [\bar{A}^{(c)}] \{\bar{\varepsilon}_c^*\} + \beta^2 \{\bar{\kappa}^{(c)}\}^T [\bar{D}^{(c)}] \{\bar{\kappa}^{(c)}\}] d\xi d\eta \quad (5.20)$$

が得られる. ただし, 上式において

$$\begin{aligned}
\{\bar{\varepsilon}^*\} &= \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\bar{\alpha}}{2} \bar{w}, \alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\bar{\alpha} \bar{\beta}}{2} \bar{w}, \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right\}^T \\
\{\bar{\varepsilon}_c^*\} &= \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\bar{\alpha}}{2} \bar{w}, \alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\bar{\alpha} \bar{\beta}}{2} \bar{w}, 2 \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} - \bar{\psi}_y, \frac{2}{\beta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} - \bar{\psi}_x, \alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} \right\}^T \\
\{\bar{\kappa}^{(c)}\} &= \left\{ \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \xi}, \alpha \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \eta}, \alpha \frac{\partial \bar{\psi}_x}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\psi}_y}{\partial \xi} \right\}^T
\end{aligned} \tag{5.21}$$

であり、各マトリックスは

$$\begin{aligned}
[\bar{A}^{(c)}] &= \frac{a^2}{S_0} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_c A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_c A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}^{(c)} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_c \bar{A}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_c \bar{A}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{A}_{66} \end{bmatrix}^{(c)} \\
[\bar{D}^{(c)}] &= \frac{1}{S_0} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}^{(c)} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & 0 \\ \bar{D}_{12} & \bar{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix}^{(c)}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

である。その他の剛性マトリックスおよびひずみベクトルは式(2.22)と式(2.56)で与えられる。

一方、無次元量を導入した偏平殻の最大運動エネルギー T は無次元振動数 Λ を除いて長方形板の式(2.58)と同様である。

5.2.5 振動数方程式

サンドイッチ偏平殻の最大ひずみエネルギー U と最大運動エネルギー T に、式(2.59)で与えられる変位関数を代入した後、ラグランジュ関数 $L=T-U$ に関する停留条件を用いると、次の振動数方程式が得られる。

$$\left[[K_{ij}^{(mn)}] - \Lambda^2 [M_{ij}^{(mn)}] \right] \begin{Bmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \\ W_{ij} \\ \psi_{xij} \\ \psi_{yij} \end{Bmatrix} = 0 \tag{5.23}$$

($i, m=1, 2, \dots, I$; $j, n=1, 2, \dots, J$)

減衰を考慮した複素数で各弾性係数を扱う場合， $[K_{ij}^{(mn)}]$ は複素剛性マトリックスとなるため，式(5.23)は複素固有値問題となる．この複素固有値問題の複素固有値として Λ^2 が得られ， Λ^2 が

$$\Lambda^2 = \text{Re}(\Lambda^2) + j \text{Im}(\Lambda^2) = \text{Re}(\Lambda^2) \left[1 + j \frac{\text{Im}(\Lambda^2)}{\text{Re}(\Lambda^2)} \right], \quad j = \sqrt{-1} \quad (5.24)$$

の形で表されるとき，無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η を次のように再定義する．

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{\text{Re}(\Lambda^2)} \\ \eta &= \frac{\text{Im}(\Lambda^2)}{\text{Re}(\Lambda^2)} \end{aligned} \quad (5.25)$$

ただし， $\text{Re}(\Lambda^2)$ と $\text{Im}(\Lambda^2)$ はそれぞれ Λ^2 の実部と虚部を表す．また，各固有値に対応する固有ベクトルとして，未定係数によるベクトル $\{U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, \psi_{xij}, \psi_{yij}\}^T$ が得られ，未定係数を変位の式(2.59)に代入することにより固有振動モードが求められる．

ここで，式(5.23)中の係数マトリックス $[M_{ij}^{(mn)}]$ は式(2.67)と同様に与えられ，そのマトリックス要素は式(2.69)で与えられる．

一方， $[K_{ij}^{(mn)}]$ は式(2.66)と同様に与えられ，マトリックスの各要素は次のようになる．

$$\begin{aligned} Kaa_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\bar{A}_{11} + \bar{A}_{11}^{(c)}) X'_{1i} X'_{1m} Y_{1j} Y_{1n} + \alpha \bar{A}_{16} X_{1i} X'_{1m} Y'_{1j} Y_{1n} \\ &\quad + \alpha \bar{A}_{16} X'_{1i} X_{1m} Y_{1j} Y'_{1n} + \alpha^2 (\bar{A}_{66} + \bar{A}_{66}^{(c)}) X_{1i} X_{1m} Y_{1j} Y'_{1n}] d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Kab_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{12}^{(c)}) X_{2i} X'_{1m} Y'_{2j} Y_{1n} + \bar{A}_{16} X'_{2i} X'_{1m} Y_{2j} Y_{1n} \\ &\quad + \alpha^2 \bar{A}_{26} X_{2i} X_{1m} Y'_{2j} Y'_{1n} + \alpha (\bar{A}_{66} + \bar{A}_{66}^{(c)}) X'_{2i} X_{1m} Y_{2j} Y'_{1n}] d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Kac_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2(\bar{C}_{11} - \bar{B}_{11}) X''_{1i} X'_{1m} Y_{1j} Y_{1n} \\ &\quad + 4\alpha^2 (\bar{C}_{66} - \bar{B}_{66}) X_{1i} X'_{1m} Y'_{1j} Y'_{1n} \\ &\quad + 2\alpha^2 (\bar{C}_{12} - \bar{B}_{12}) X_{1i} X'_{1m} Y''_{1j} Y_{1n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \alpha (\bar{C}_{16} - \bar{B}_{16}) X'_{1i} X'_{1m} Y'_{1j} Y_{1n} \\
& + 2 \alpha (\bar{C}_{16} - \bar{B}_{16}) X''_{1i} X_{1m} Y_{1j} Y'_{1n} \\
& + 2 \alpha^3 (\bar{C}_{26} - \bar{B}_{26}) X_{1i} X_{1m} Y''_{1j} Y'_{1n} \\
& + (\bar{\alpha} / 2) (\bar{A}_{11} + \bar{\beta} \bar{A}_{12} + \bar{A}_{11}^{(c)} + \bar{\beta} \bar{A}_{12}^{(c)}) X_{1i} X'_{1m} Y_{1j} Y_{1n} \\
& + (\alpha \bar{\alpha} / 2) (\bar{A}_{16} + \bar{\beta} \bar{A}_{26}) X_{1i} X_{1m} Y_{1j} Y'_{1n}] d\xi d\eta \\
Kad_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\beta \bar{C}_{11} X'_{4i} X'_{1m} Y_{4j} Y_{1n} - \alpha \beta \bar{C}_{16} X_{4i} X'_{1m} Y'_{4j} Y_{1n} \\
& - \alpha \beta \bar{C}_{16} X'_{4i} X_{1m} Y_{4j} Y'_{1n} - \alpha^2 \beta \bar{C}_{66} X_{4i} X_{1m} Y'_{4j} Y'_{1n}] d\xi d\eta \\
Kae_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\alpha \beta \bar{C}_{12} X_{5i} X'_{1m} Y'_{5j} Y_{1n} - \beta \bar{C}_{16} X'_{5i} X'_{1m} Y_{5j} Y_{1n} \\
& - \alpha^2 \beta \bar{C}_{26} X_{5i} X_{1m} Y'_{5j} Y'_{1n} - \alpha \beta \bar{C}_{66} X'_{5i} X_{1m} Y_{5j} Y'_{1n}] d\xi d\eta \\
Kbb_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha^2 (\bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^{(c)}) X_{2i} X_{2m} Y'_{2j} Y'_{2n} + \alpha \bar{A}_{26} X_{2i} X'_{2m} Y'_{2j} Y_{2n} \\
& + \alpha \bar{A}_{26} X'_{2i} X_{2m} Y_{2j} Y'_{2n} + (\bar{A}_{66} + \bar{A}_{66}^{(c)}) X'_{2i} X'_{2m} Y_{2j} Y_{2n}] d\xi d\eta \\
Kbc_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [2\alpha^3 (\bar{C}_{22} - \bar{B}_{22}) X_{3i} X_{2m} Y''_{3j} Y'_{2n} \\
& + 4\alpha (\bar{C}_{66} - \bar{B}_{66}) X'_{3i} X'_{2m} Y'_{3j} Y_{2n} \\
& + 2\alpha (\bar{C}_{12} - \bar{B}_{12}) X''_{3i} X_{2m} Y_{3j} Y'_{2n} \\
& + 2 (\bar{C}_{16} - \bar{B}_{16}) X''_{3i} X'_{2m} Y_{3j} Y_{2n} \\
& + 4\alpha^2 (\bar{C}_{26} - \bar{B}_{26}) X'_{3i} X_{2m} Y'_{3j} Y'_{2n} \\
& + 2\alpha^2 (\bar{C}_{26} - \bar{B}_{26}) X_{3i} X'_{2m} Y''_{3j} Y_{2n} \\
& + (\alpha \bar{\alpha} / 2) (\bar{A}_{12} + \bar{\beta} \bar{A}_{22} + \bar{A}_{12}^{(c)} + \bar{\beta} \bar{A}_{22}^{(c)}) X_{3i} X_{2m} Y_{3j} Y'_{2n} \\
& + (\bar{\alpha} / 2) (\bar{A}_{16} + \bar{\beta} \bar{A}_{26}) X_{3i} X'_{2m} Y_{3j} Y_{2n}] d\xi d\eta \\
Kbd_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\alpha \beta \bar{C}_{12} X'_{4i} X_{2m} Y_{4j} Y'_{2n} - \beta \bar{C}_{16} X'_{4i} X'_{2m} Y_{4j} Y_{2n} \\
& - \alpha^2 \beta \bar{C}_{26} X_{4i} X_{2m} Y'_{4j} Y'_{2n} - \alpha \beta \bar{C}_{66} X_{4i} X'_{2m} Y'_{4j} Y_{2n}] d\xi d\eta \\
Kbe_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [-\alpha^2 \beta \bar{C}_{22} X_{5i} X_{2m} Y'_{5j} Y'_{2n} - \alpha \beta \bar{C}_{26} X_{5i} X'_{2m} Y'_{5j} Y_{2n} \\
& - \alpha \beta \bar{C}_{26} X'_{5i} X_{2m} Y_{5j} Y'_{2n} - \beta \bar{C}_{66} X'_{5i} X'_{2m} Y_{5j} Y_{2n}] d\xi d\eta \\
Kcc_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [4 \{ \bar{D}_{11} + (\lambda^2 / 4\beta^2) \bar{A}_{11} - 2 \bar{E}_{11} \} X''_{3i} X''_{3m} Y_{3j} Y_{3n} \\
& + 4\alpha^4 \{ \bar{D}_{22} + (\lambda^2 / 4\beta^2) \bar{A}_{22} - 2 \bar{E}_{22} \} X_{3i} X_{3m} Y''_{3j} Y''_{3n} \\
& + 16\alpha^2 \{ \bar{D}_{66} + (\lambda^2 / 4\beta^2) \bar{A}_{66} - 2 \bar{E}_{66} \} X'_{3i} X'_{3m} Y'_{3j} Y'_{3n} \\
& + 4\alpha^2 \{ \bar{D}_{12} + (\lambda^2 / 4\beta^2) \bar{A}_{12} - 2 \bar{E}_{12} \} X''_{3i} X_{3m} Y_{3j} Y''_{3n} \\
& + 4\alpha^2 \{ \bar{D}_{12} + (\lambda^2 / 4\beta^2) \bar{A}_{12} - 2 \bar{E}_{12} \} X_{3i} X''_{3m} Y'_{3j} Y_{3n} \\
& + 8\alpha \{ \bar{D}_{16} + (\lambda^2 / 4\beta^2) \bar{A}_{16} - 2 \bar{E}_{16} \} X''_{3i} X'_{3m} Y_{3j} Y'_{3n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8\alpha \{ \bar{D}_{16} + (\lambda^2/4\beta^2) \bar{A}_{16} - 2 \bar{E}_{16} \} X'_{3i} X''_{3m} Y'_{3j} Y_{3n} \\
& + 8\alpha^3 \{ \bar{D}_{26} + (\lambda^2/4\beta^2) \bar{A}_{26} - 2 \bar{E}_{26} \} X_{3i} X'_{3m} Y''_{3j} Y'_{3n} \\
& + 8\alpha^3 \{ \bar{D}_{26} + (\lambda^2/4\beta^2) \bar{A}_{26} - 2 \bar{E}_{26} \} X'_{3i} X_{3m} Y'_{3j} Y''_{3n} \\
& + (\bar{\alpha}^2/4) (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{11}^{(c)} + 2\bar{\beta} \bar{A}_{12} + 2\bar{\beta} \bar{A}_{12}^{(c)} \\
& \quad + \bar{\beta}^2 \bar{A}_{22} + \bar{\beta}^2 \bar{A}_{22}^{(c)}) X_{3i} X_{3m} Y_{3j} Y_{3n} \\
& + \bar{\alpha} (\bar{C}_{11} + \bar{\beta} \bar{C}_{12} - \bar{B}_{11} - \bar{\beta} \bar{B}_{12}) X_{3i} X''_{3m} Y_{3j} Y_{3n} \\
& + \bar{\alpha} (\bar{C}_{11} + \bar{\beta} \bar{C}_{12} - \bar{B}_{11} - \bar{\beta} \bar{B}_{12}) X''_{3i} X_{3m} Y_{3j} Y_{3n} \\
& + \alpha^2 \bar{\alpha} (\bar{C}_{12} + \bar{\beta} \bar{C}_{22} - \bar{B}_{12} - \bar{\beta} \bar{B}_{22}) X_{3i} X_{3m} Y_{3j} Y''_{3n} \\
& + \alpha^2 \bar{\alpha} (\bar{C}_{12} + \bar{\beta} \bar{C}_{22} - \bar{B}_{12} - \bar{\beta} \bar{B}_{22}) X_{3i} X_{3m} Y'_{3j} Y''_{3n} \\
& + 2\alpha \bar{\alpha} (\bar{C}_{16} + \bar{\beta} \bar{C}_{26} - \bar{B}_{16} - \bar{\beta} \bar{B}_{26}) X_{3i} X'_{3m} Y_{3j} Y'_{3n} \\
& + 2\alpha \bar{\alpha} (\bar{C}_{16} + \bar{\beta} \bar{C}_{26} - \bar{B}_{16} - \bar{\beta} \bar{B}_{26}) X'_{3i} X_{3m} Y'_{3j} Y_{3n} \\
& + k_c \alpha^2 \bar{A}_{44}^{(c)} X_{3i} X_{3m} Y'_{3j} Y'_{3n} + k_c \bar{A}_{55}^{(c)} X'_{3i} X'_{3m} Y_{3j} Y_{3n}] d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K c d_{ij}^{(mn)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [& 2\{\beta \bar{E}_{11} - (\lambda^2/4\beta) \bar{A}_{11}\} X'_{4i} X''_{3m} Y_{4j} Y_{3n} \\
& + 4\alpha^2 \{\beta \bar{E}_{66} - (\lambda^2/4\beta) \bar{A}_{66}\} X_{4i} X'_{3m} Y'_{4j} Y'_{3n} \\
& + 2\alpha^2 \{\beta \bar{E}_{12} - (\lambda^2/4\beta) \bar{A}_{12}\} X'_{4i} X_{3m} Y_{4j} Y''_{3n} \\
& + 4\alpha \{\beta \bar{E}_{16} - (\lambda^2/4\beta) \bar{A}_{16}\} X'_{4i} X'_{3m} Y_{4j} Y'_{3n} \\
& + 2\alpha \{\beta \bar{E}_{16} - (\lambda^2/4\beta) \bar{A}_{16}\} X_{4i} X''_{3m} Y'_{4j} Y_{3n} \\
& + 2\alpha^3 \{\beta \bar{E}_{26} - (\lambda^2/4\beta) \bar{A}_{26}\} X_{4i} X_{3m} Y'_{4j} Y''_{3n} \\
& - (\bar{\alpha}\beta/2) (\bar{C}_{11} + \bar{\beta} \bar{C}_{12}) X'_{4i} X_{3m} Y_{4j} Y_{3n} \\
& - (\alpha\bar{\alpha}\beta/2) (\bar{C}_{16} + \bar{\beta} \bar{C}_{26}) X_{4i} X_{3m} Y'_{4j} Y_{3n} \\
& - k_c (\beta/2) \bar{A}_{55}^{(c)} X_{4i} X'_{3m} Y_{4j} Y_{3n}] d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K c e_{ij}^{(mn)} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [& 2\alpha^3 \{\beta \bar{E}_{22} - (\lambda^2/4\beta) \bar{A}_{22}\} X_{5i} X_{3m} Y'_{5j} Y'_{3n} \\
& + 4\alpha \{\beta \bar{E}_{66} - (\lambda^2/4\beta) \bar{A}_{66}\} X'_{5i} X'_{3m} Y_{5j} Y'_{3n} \\
& + 2\alpha \{\beta \bar{E}_{12} - (\lambda^2/4\beta) \bar{A}_{12}\} X_{5i} X''_{3m} Y'_{5j} Y_{3n} \\
& + 2\{\beta \bar{E}_{16} - (\lambda^2/4\beta) \bar{A}_{16}\} X'_{5i} X''_{3m} Y_{5j} Y_{3n} \\
& + 4\alpha^2 \{\beta \bar{E}_{26} - (\lambda^2/4\beta) \bar{A}_{26}\} X_{5i} X'_{3m} Y'_{5j} Y'_{3n} \\
& + 2\alpha^2 \{\beta \bar{E}_{26} - (\lambda^2/4\beta) \bar{A}_{26}\} X'_{5i} X_{3m} Y_{5j} Y''_{3n} \\
& - (\alpha\bar{\alpha}\beta/2) (\bar{C}_{12} + \bar{\beta} \bar{C}_{22}) X_{5i} X_{3m} Y'_{5j} Y_{3n} \\
& - (\bar{\alpha}\beta/2) (\bar{C}_{16} + \bar{\beta} \bar{C}_{26}) X'_{5i} X_{3m} Y_{5j} Y_{3n} \\
& - k_c (\alpha\beta/2) \bar{A}_{44}^{(c)} X_{5i} X_{3m} Y_{5j} Y'_{3n}] d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Kdd_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\{(\lambda^2/4)\bar{A}_{11} + \beta^2 \bar{D}_{11}^{(c)}\} X'_{4i} X'_{4m} Y_{4j} Y_{4n} \\
&\quad + (\lambda^2/4)\alpha \bar{A}_{16} X_{4i} X'_{4m} Y'_{4j} Y_{4n} \\
&\quad + (\lambda^2/4)\alpha \bar{A}_{16} X'_{4i} X_{4m} Y_{4j} Y'_{4n} \\
&\quad + \alpha^2 \{(\lambda^2/4)\bar{A}_{66} + \beta^2 \bar{D}_{66}^{(c)}\} X_{4i} X_{4m} Y'_{4j} Y'_{4n} \\
&\quad + k_c \bar{A}_{55}^{(c)} X_{4i} X_{4m} Y_{4j} Y_{4n}] d\xi d\eta \\
Kde_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\{(\lambda^2/4)\alpha \bar{A}_{12} + \alpha \beta^2 \bar{D}_{12}^{(c)}\} X_{5i} X'_{4m} Y'_{5j} Y_{4n} \\
&\quad + (\lambda^2/4)\bar{A}_{16} X'_{5i} X'_{4m} Y_{5j} Y_{4n} \\
&\quad + (\lambda^2/4)\alpha^2 \bar{A}_{26} X_{5i} X_{4m} Y'_{5j} Y'_{4n} \\
&\quad + \{(\lambda^2/4)\alpha \bar{A}_{66} + \alpha \beta^2 \bar{D}_{66}^{(c)}\} X'_{5i} X_{4m} Y_{5j} Y'_{4n}] d\xi d\eta \\
Kee_{ij}^{(mn)} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\alpha^2 \{(\lambda^2/4)\bar{A}_{22} + \beta^2 \bar{D}_{22}^{(c)}\} X_{5i} X_{5m} Y'_{5j} Y'_{5n} \\
&\quad + \alpha (\lambda^2/4) \bar{A}_{26} X_{5i} X'_{5m} Y'_{5j} Y_{5n} \\
&\quad + \alpha (\lambda^2/4) \bar{A}_{26} X'_{5i} X_{5m} Y_{5j} Y'_{5n} \\
&\quad + \{(\lambda^2/4)\bar{A}_{66} + \beta^2 \bar{D}_{66}^{(c)}\} X'_{5i} X'_{5m} Y_{5j} Y_{5n} \\
&\quad + k_c (\beta^2/4) \bar{A}_{44}^{(c)} X_{5i} X_{5m} Y_{5j} Y_{5n}] d\xi d\eta \tag{5.26}
\end{aligned}$$

式(5.26)において(')および('')は

$$X'_{pq} = \frac{\partial X_{pq}}{\partial \xi}, \quad X''_{pq} = \frac{\partial^2 X_{pq}}{\partial \xi^2}, \quad Y'_{pq} = \frac{\partial Y_{pq}}{\partial \eta}, \quad Y''_{pq} = \frac{\partial^2 Y_{pq}}{\partial \eta^2} \tag{5.27}$$

を表す。

5.3 数値計算と考察

積層表面材1および2のラミナはともに一般的なGraphite/Epoxyとし、各材料定数を

$$\begin{aligned} E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=0.5, E_c/E_1=10^{-3}, \\ \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1 \end{aligned} \quad (5.28)$$

とした。ラミナと心材のせん断補正係数 k_f および k_c は $5/6^{(92)}$ を使用した。ラミナの材料損失係数 $^{(95)} \delta_1, \delta_2, \delta_{12}$ および粘弾性心材の材料損失係数 $^{(21)} \delta_c$ は振動数依存性や温度依存性の影響が小さいとし

$$\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5 \quad (5.29)$$

なる定数を使用した。

扁平殻の積層形態は(表面材2/心材C/表面材1)とし、 $(\theta_1^{(2)}/\dots/\theta_m^{(2)}/\dots/\theta_{N_2}^{(2)}/C/\theta_1^{(1)}/\dots/\theta_m^{(1)}/\dots/\theta_{N_1}^{(1)})$ のように表す。ただし、 $\theta_m^{(n)}$ は表面材 n ($n=1,2$)の第 m 層目のラミナの繊維角度を表す。

5.3.1 数値計算精度の検討

本解析では、リッツ法を用いているため、解の精度は変位関数の項数に依存する。ここでは、周辺単純支持、周辺固定および片持ちのサンドイッチ扁平殻の無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の収束状況を調べる。積層形態を $(30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$ 、代表曲率比 $a/R_x=0.5$ とし、2方向曲率比 $R_x/R_y=1$ (球形)、 $R_x/R_y=0$ (円筒形)および $R_x/R_y=-1$ (鞍形)について検討する。

表5-1、5-2および表5-3にそれぞれ周辺単純支持、周辺固定および片持ちの扁平殻について、変位関数の項数 $I \times J$ による Ω と η の収束状況を示す。境界条件、厚さ比 a/H および2方向曲率比 R_x/R_y により収束状況は異なるが、項数 10×10 までとると、いくつかの場合を除いて無次元振動数 Ω およびモード損失係数 η は有効数字2~4で収束した解が得られる。したがって、数値計算では項数 10×10 を採用した。

表5-1 無次元振動数 Ω およびモード損失係数 $\eta \times 10^2$ の収束状況
(周辺単純支持)

【 $a/b=1, a/R_x=0.5, t_c/a=t_1/a=t_2/a=H/3a, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=0.5,$
 $E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5, (30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$ 】

a/H	R_x/R_y	$I \times J$	Mode No.					
			1	2	3	4	5	
100	1	9×9	18.10 ^a (5.531) ^b	22.45 (14.26)	24.82 (1.223)	27.27 (14.59)	28.56 (4.969)	
		10×10	18.10 (5.524)	22.43 (14.26)	24.82 (1.223)	27.25 (14.61)	28.56 (4.960)	
		11×11	18.10 (5.522)	22.43 (14.25)	24.82 (1.222)	27.24 (14.62)	28.55 (4.956)	
		9×9	10.69 (12.98)	12.91 (1.586)	17.73 (15.01)	19.23 (15.69)	21.59 (21.40)	
		10×10	10.68 (12.96)	12.91 (1.584)	17.72 (15.04)	19.22 (15.66)	21.57 (21.42)	
		11×11	10.68 (12.96)	12.90 (1.581)	17.72 (15.03)	19.22 (15.65)	21.57 (21.41)	
	-1	9×9	3.996 (6.686)	13.617 (8.631)	13.618 (17.10)	21.06 (16.29)	21.20 (16.40)	
		10×10	3.994 (6.676)	13.609 (8.619)	13.614 (17.07)	21.05 (16.29)	21.19 (16.40)	
		11×11	3.990 (6.653)	13.606 (8.615)	13.612 (17.06)	21.05 (16.28)	21.19 (16.40)	
	20	1	9×9	25.38 (19.82)	26.55 (5.287)	35.78 (15.77)	37.34 (19.95)	38.85 (6.073)
			10×10	25.38 (19.82)	26.55 (5.285)	35.77 (15.81)	37.32 (19.94)	38.85 (6.071)
			11×11	25.38 (19.82)	26.55 (5.284)	35.77 (15.80)	37.32 (19.94)	38.85 (6.071)
9×9			16.01 (12.69)	20.79 (28.71)	29.32 (20.93)	32.97 (8.418)	34.44 (25.05)	
10×10			16.01 (12.68)	20.79 (28.71)	29.32 (20.93)	32.97 (8.416)	34.42 (25.07)	
11×11			16.01 (12.68)	20.79 (28.71)	29.32 (20.93)	32.97 (8.415)	34.42 (25.07)	
-1		9×9	10.29 (29.19)	22.43 (24.31)	26.69 (25.44)	27.25 (12.55)	35.85 (22.87)	
		10×10	10.29 (29.18)	22.43 (24.31)	26.69 (25.44)	27.25 (12.55)	35.84 (22.89)	
		11×11	10.29 (29.18)	22.43 (24.31)	26.69 (25.44)	27.25 (12.55)	35.84 (22.89)	

^a Dimensionless frequency Ω , ^b Modal loss factor $\eta \times 10^2$

表5-2 無次元振動数 Ω およびモード損失係数 $\eta \times 10^2$ の収束状況
(周辺固定)

【 $a/b=1, a/R_x=0.5, t_c/a=t_1/a=t_2/a=H/3a, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=0.5,$
 $E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5, (30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$ 】

a/H	R_x/R_y	$I \times J$	Mode No.					
			1	2	3	4	5	
100	1	9×9	24.39 ^a (15.36) ^b	24.85 (8.404)	31.57 (13.83)	32.92 (14.50)	34.28 (20.40)	
		10×10	24.37 (15.33)	24.84 (8.413)	31.56 (13.83)	32.91 (14.51)	34.27 (20.39)	
		11×11	24.36 (15.32)	24.84 (8.419)	31.55 (13.83)	32.89 (14.52)	34.25 (20.35)	
		9×9	18.54 (11.12)	19.83 (20.51)	25.59 (17.67)	26.68 (13.43)	30.87 (25.03)	
		10×10	18.53 (11.13)	19.81 (20.46)	25.58 (17.65)	26.67 (13.44)	30.86 (25.03)	
		11×11	18.53 (11.13)	19.80 (20.45)	25.57 (17.65)	26.66 (13.46)	30.84 (25.00)	
	-1	9×9	18.73 (10.41)	20.94 (13.21)	23.94 (11.41)	24.09 (14.14)	28.30 (9.136)	
		10×10	18.73 (10.41)	20.92 (13.18)	23.93 (11.41)	24.07 (14.13)	28.29 (9.126)	
		11×11	18.73 (10.40)	20.92 (13.18)	23.93 (11.41)	24.07 (14.13)	28.29 (9.128)	
		1	9×9	32.60 (14.39)	37.41 (12.67)	41.73 (8.360)	43.87 (12.56)	44.74 (12.00)
			10×10	32.60 (14.39)	37.41 (12.67)	41.73 (8.360)	43.87 (12.56)	44.74 (12.00)
			11×11	32.60 (14.39)	37.41 (12.67)	41.73 (8.360)	43.87 (12.56)	44.74 (12.00)
20	0	9×9	27.73 (19.11)	31.49 (10.39)	35.90 (10.49)	38.31 (14.82)	41.35 (14.97)	
		10×10	27.73 (19.11)	31.49 (10.39)	35.90 (10.49)	38.31 (14.82)	41.35 (14.96)	
		11×11	27.73 (19.11)	31.49 (10.39)	35.90 (10.49)	38.31 (14.82)	41.35 (14.96)	
	-1	9×9	27.35 (8.672)	27.75 (18.65)	32.29 (12.83)	35.48 (16.71)	39.93 (16.25)	
		10×10	27.35 (8.672)	27.75 (18.65)	32.29 (12.83)	35.48 (16.71)	39.93 (16.25)	
		11×11	27.35 (8.672)	27.75 (18.65)	32.29 (12.83)	35.48 (16.71)	39.93 (16.25)	

^a Dimensionless frequency Ω , ^b Modal loss factor $\eta \times 10^2$

表5-3 無次元振動数 Ω およびモード損失係数 $\eta \times 10^2$ の収束状況
(片持ち)

【 $a/b=1, a/R_x=0.5, t_c/a=t_1/a=t_2/a=H/3a, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=0.5,$
 $E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5, (30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ) \text{】}$

a/H	R_x/R_y	$I \times J$	Mode No.					
			1	2	3	4	5	
100	1	9×9	1.010 ^a (6.121) ^b	1.719 (4.523)	4.037 (5.478)	5.283 (7.236)	7.394 (8.098)	
		10×10	1.008 (6.188)	1.718 (4.540)	4.033 (5.513)	5.278 (7.260)	7.388 (8.114)	
		11×11	1.007 (6.215)	1.717 (4.556)	4.030 (5.529)	5.275 (7.272)	7.385 (8.125)	
		9×9	1.546 (2.249)	1.739 (4.360)	5.268 (6.337)	6.114 (6.583)	7.249 (7.753)	
		10×10	1.545 (2.263)	1.738 (4.364)	5.266 (6.343)	6.111 (6.583)	7.244 (7.750)	
		11×11	1.543 (2.271)	1.737 (4.372)	5.265 (6.346)	6.109 (6.583)	7.241 (7.749)	
	-1	9×9	1.107 (5.291)	1.729 (4.428)	4.979 (7.529)	6.539 (5.663)	10.11 (9.137)	
		10×10	1.106 (5.301)	1.728 (4.427)	4.975 (7.534)	6.534 (5.669)	10.10 (9.142)	
		11×11	1.105 (5.306)	1.727 (4.433)	4.972 (7.536)	6.531 (5.671)	10.10 (9.147)	
		1	9×9	1.976 (5.379)	5.124 (20.94)	9.167 (14.51)	12.16 (23.48)	16.46 (23.08)
			10×10	1.975 (5.377)	5.124 (20.94)	9.163 (14.51)	12.16 (23.48)	16.46 (23.08)
			11×11	1.974 (5.378)	5.123 (20.94)	9.160 (14.51)	12.16 (23.48)	16.46 (23.08)
20	0	9×9	2.165 (4.552)	5.234 (21.49)	10.86 (10.76)	12.62 (25.89)	16.32 (27.19)	
		10×10	2.164 (4.557)	5.233 (21.49)	10.86 (10.76)	12.62 (25.89)	16.32 (27.19)	
		11×11	2.162 (4.562)	5.233 (21.50)	10.86 (10.77)	12.62 (25.90)	16.32 (27.19)	
	-1	9×9	2.115 (7.367)	5.058 (21.05)	10.93 (16.08)	12.47 (20.11)	17.76 (22.11)	
		10×10	2.113 (7.372)	5.057 (21.05)	10.92 (16.07)	12.46 (20.12)	17.75 (22.11)	
		11×11	2.113 (7.376)	5.057 (21.05)	10.92 (16.06)	12.46 (20.14)	17.75 (22.10)	

^a Dimensionless frequency Ω , ^b Modal loss factor $\eta \times 10^2$

表5-4および表5-5に周辺単純支持および片持ちの等方性偏平殻の無次元振動数 Ω について、本解析値と他の著者らによる値との比較を示す。表において m および n はそれぞれ x および y 方向の半波数を示す。文献(103)では面内慣性を考慮した厳密解を示しており、Leissaら⁽⁷²⁾⁽⁷³⁾は有限要素法およびリッツ法により片持ち等方性偏平殻の固有振動数を求めている。いずれの境界条件および2方向曲率比 R_x/R_y についても、本解析値と他の著者らによる値はよく一致している。

表5-6に周辺単純支持された積層偏平殻の基本無次元振動数について、本解析値と他の著者らによる値の比較を示す。ここでは表面材に対する心材の厚さおよび剛性を 10^{-3} とし、心材の存在を無視できるようにした。Touratier⁽⁷⁷⁾とReddy⁽⁷⁶⁾⁽¹⁰⁴⁾は厳密解を求めており、Chandrashekhara⁽⁸¹⁾とChakravortyら⁽⁸²⁾⁽⁸³⁾は一次せん断変形理論を用いた有限要素法により解を求めているが、本解析値と他の著者らによる値はよく一致している。

表5-7に周辺固定されたクロスプライ積層円筒偏平殻の無次元振動数 Ω について、本解析値と細川ら⁽¹⁰⁵⁾のガラーキン法による値との比較を示すが、両者の値はよく一致している。

表5-8に片持ち積層偏平殻の無次元振動数 Ω について、本解析値とQatu⁽⁷⁹⁾らのリッツ法による値との比較を示すが、両者の値はよく一致している。

これらの比較より、境界条件、曲率比および積層形態にかかわらず、本解析値は他の著者らによる値とよく一致している。したがって、リッツ法による本解析値は等方性、異方性にかかわらず実用上十分な精度と妥当性を有するものと考えられる。

表5-4 周辺単純支持された等方性偏平殻の無次元振動数 Ω の比較

【 $a/b=1, a/H=100, t_1/a=t_2/a=t_c/a=1/300, a/R_x=0.2, E_1/E_2=1,$
 $E_c/E_1=1, \nu_{12}=\nu_c=0.3, \rho_1/\rho_2=\rho_c/\rho_1=1$ 】

R_x/R_y	Source	(m, n)					
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(3,1)
1	Present	20.84	24.93	24.93	31.12	35.89	35.89
	Exact ⁽¹⁰³⁾	20.84	24.94	24.94	31.14	35.92	35.92
0	Present	11.63	21.87	15.44	25.87	34.83	29.89
	Exact ⁽¹⁰³⁾	11.63	21.88	15.45	25.89	34.86	29.93
-1	Present	5.946	19.13	19.13	23.84	33.83	33.83
	Exact ⁽¹⁰³⁾	5.949	19.14	19.14	23.87	33.86	33.86

表5-5 片持ち等方性偏平殻の無次元振動数 Ω の比較

【 $a/b=1, a/H=100, t_1/a=t_2/a=t_c/a=1/300, a/R_x=0.2, E_1/E_2=1,$
 $E_c/E_1=1, \nu_{12}=\nu_c=0.3, \rho_1/\rho_2=\rho_c/\rho_1=1$ 】

R_x/R_y	Source	Mode No.					
		1	2	3	4	5	6
1	Present	1.990	2.676	7.524	9.716	11.76	20.75
	Leissa et al. ⁽⁷³⁾	1.993	2.680	7.533	9.732	11.78	20.82
0	Present	2.531	2.692	8.111	10.05	10.62	17.74
	Leissa et al. ⁽⁷²⁾	2.534	2.696	8.119	10.07	10.64	17.78
-1	Present	1.966	2.660	9.048	9.875	13.95	19.65
	Leissa et al. ⁽⁷³⁾	1.968	2.664	9.058	9.890	13.96	19.67

表5-6 単純支持された積層偏平殻の基本無次元振動数の比較
 【 $a/b=1, a/H=100, a/R_x=0.2, t_1/a=t_c/a \times 10^3, E_1/E_2=25, G_{12}/E_2=0.5,$
 $E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=\nu_c=0.3, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=10^{-3}$ 】

R_x/R_y	Source	Laminations		
		(0°/90°)	(0°/90°/90°/0°)	(45°/-45°/45°/-45°)
1	Present	5.769	6.225	11.82
	Chakravorty et al. ⁽⁸³⁾	5.756	6.210	11.79
	Chandrashekhara ⁽⁸¹⁾	—	6.232	—
	Reddy ⁽⁷⁶⁾ (Exact)	5.765	6.216	—
0	Present	3.342	4.081	—
	Chakravorty et al. ⁽⁸²⁾	3.336	—	—
	Touratier ⁽⁷⁷⁾	3.334	4.072	—
	Reddy et al. ⁽¹⁰⁴⁾	3.338	4.072	—
-1	Present	1.933	3.034	3.899
	Chakravorty et al. ⁽⁸²⁾	1.929	3.024	3.879

表5-7 固定された積層偏平円筒殻の無次元振動数 Ω の比較
 【 $a/b=1, a/H=100, a/R_x=0.1, R_x/R_y=0, t_1/a=t_c/a \times 10^3, E_1/E_2=15.4,$
 $E_c/E_1=10^{-3}, G_{12}/E_2=0.79, \nu_{12}=\nu_c=0.3, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=10^{-3}$ 】

Laminations	Source	Mode No.			
		1	2	3	4
(90°/0°/0°/90°)	Present	9.176	10.46	17.09	18.40
	Hosokawa et al. ⁽¹⁰⁵⁾	9.178	10.46	17.10	18.41
(0°/90°/90°/0°)	Present	9.214	12.04	17.39	18.00
	Hosokawa et al. ⁽¹⁰⁵⁾	9.213	12.04	17.40	18.01

表5-8 片持ち積層偏平殻の無次元振動数 Ω の比較
 【 $a/b=1, a/H=100, a/R_x=0.5, t_1/a=t_c/a \times 10^3, E_1/E_2=15.4, G_{12}/E_2=0.79,$
 $E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=\nu_c=0.3, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=10^{-3}, (30°/-30°/-30°/30°)$ 】

R_x/R_y	Source	Mode No.				
		1	2	3	4	5
1	Present	1.158	1.670	4.342	5.446	7.803
	Qatu et al. ⁽⁷⁹⁾	1.161	1.673	4.349	5.456	7.820
0	Present	1.550	2.011	5.037	6.385	7.403
	Qatu et al. ⁽⁷⁹⁾	1.552	2.014	5.041	6.395	7.416
-1	Present	1.036	1.744	4.490	7.008	9.872
	Qatu et al. ⁽⁷⁹⁾	1.038	1.747	4.497	7.019	9.893

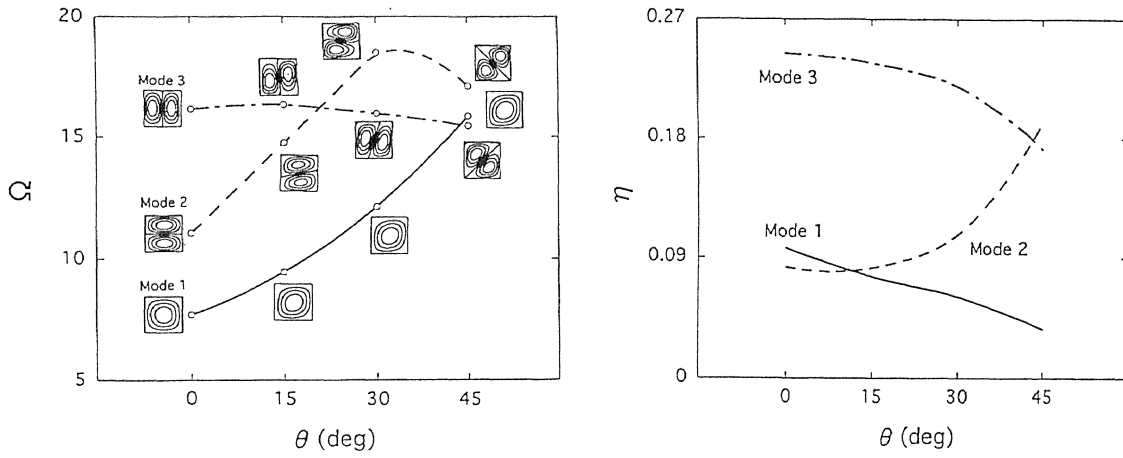
5.3.2 固有振動数，モード損失係数および振動モード

図5-3(a)~(c)にそれぞれ球形($R_x/R_y = 1$)，円筒形($R_x/R_y = 0$)および鞍形($R_x/R_y = -1$)の周辺単純支持された偏平殻について，繊維角度 θ による無次元振動数 Ω ，モード損失係数 η および振動モードの変化を示す．偏平殻の積層形態は $(\theta / -\theta / C / -\theta / \theta)$ とした．また， $R_x/R_y = 1$ (球形)および $R_x/R_y = -1$ (鞍形)については，振動数曲線およびモード損失係数曲線が $\theta = 45^\circ$ を境に左右対称となるため， $\theta = 0^\circ \sim 45^\circ$ までの結果を示す． $\theta = 0^\circ \sim 45^\circ$ において，球形($R_x/R_y = 1$)と円筒形($R_x/R_y = 0$)では，繊維角度による固有振動数の変化割合が大きい，鞍形($R_x/R_y = -1$)の場合，固有振動数の変化割合が比較的小さい．Mode1では，球形($R_x/R_y = 1$)および円筒形($R_x/R_y = 0$)の場合，モード損失係数は $\theta = 45^\circ$ 付近で最低となるが，鞍形($R_x/R_y = -1$)の場合は $\theta = 45^\circ$ 付近で最大となる．Mode2とMode3では，いずれの形状においても $\theta = 0^\circ \sim 45^\circ$ の範囲においてモード損失係数は同様な傾向を示す．

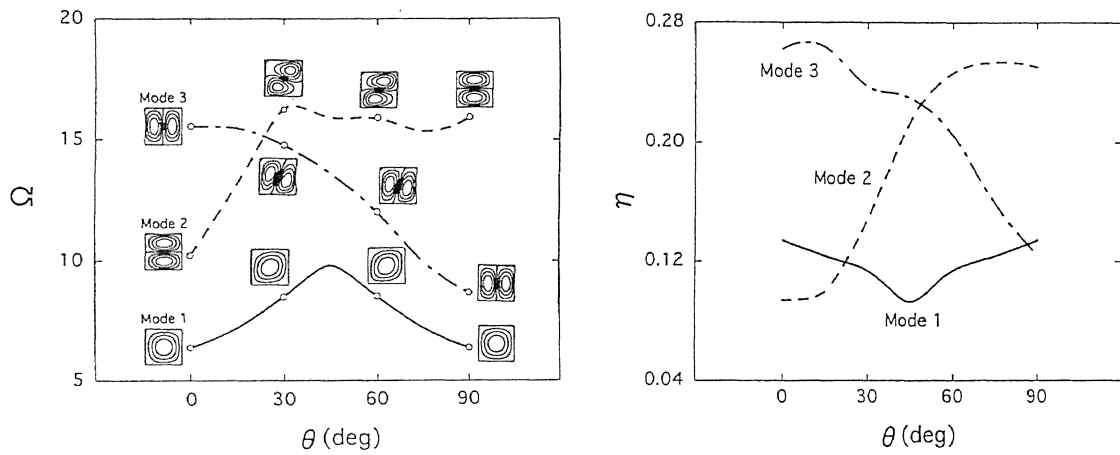
図5-4(a)~(c)に周辺固定された偏平殻について，繊維角度 θ による無次元振動数 Ω ，モード損失係数 η および振動モードの変化を示す． $R_x/R_y = 1$ (球形)および $R_x/R_y = -1$ (鞍形)については，振動数曲線およびモード損失係数曲線が $\theta = 45^\circ$ を境に左右対称となるため， $\theta = 0^\circ \sim 45^\circ$ までの結果を示す．無次元振動数とモード損失係数は，周辺単純支持の場合とは明らかに異なる変化を示す．曲率を持たない長方形板の場合，周辺単純支持板と周辺固定板の繊維角度による振動数曲線(図2-6および図2-8)の傾向は酷似していた．このことから，Chandrashekhara⁽⁸¹⁾が指摘するように，曲率を有する偏平殻では，境界における回転と面内変位の拘束条件が振動減衰特性に大きく影響するといえる．

図5-5(a)~(c)に片持ち偏平殻について，繊維角度 θ による無次元振動数 Ω ，モード損失係数 η および振動モードの変化を示す．周辺単純支持や周辺固定の場合と異なり，固有振動数とモード損失係数はいずれの形状についても同様な傾向および大きさを示し，2方向曲率比 R_x/R_y の影響が小さいことがわかる．

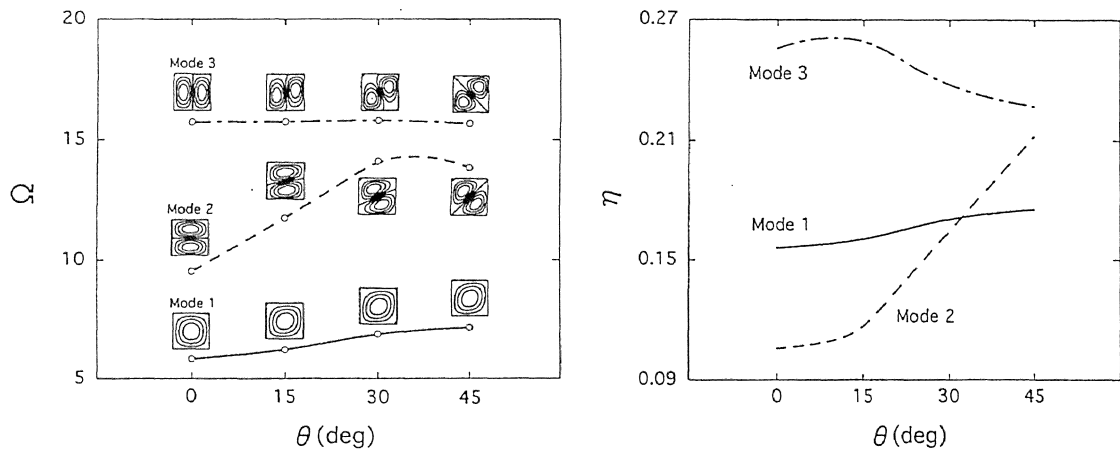
いずれの境界条件および形状に関しても，適切な繊維角度を選択することにより，特定の振動モードに対して高いモード損失係数を与えることができる．



(a) $R_x/R_y = 1$



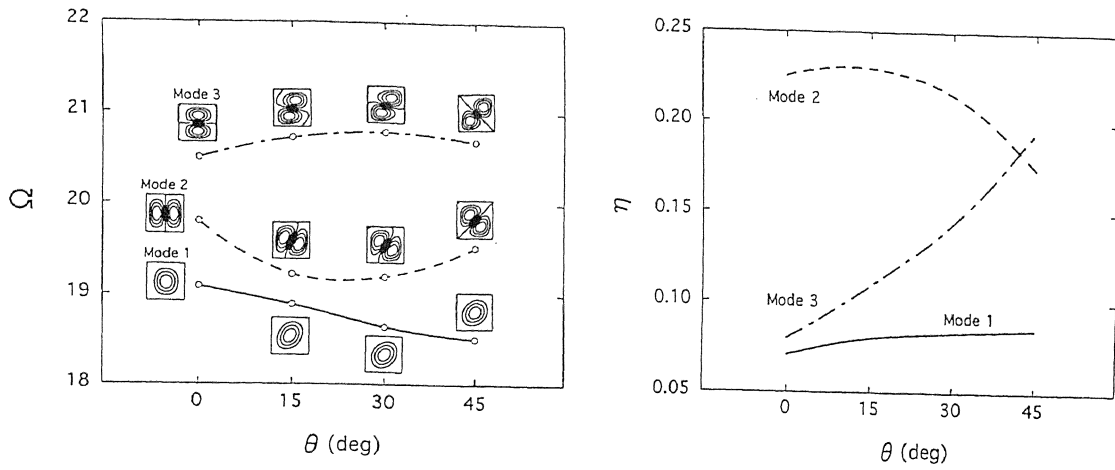
(b) $R_x/R_y = 0$



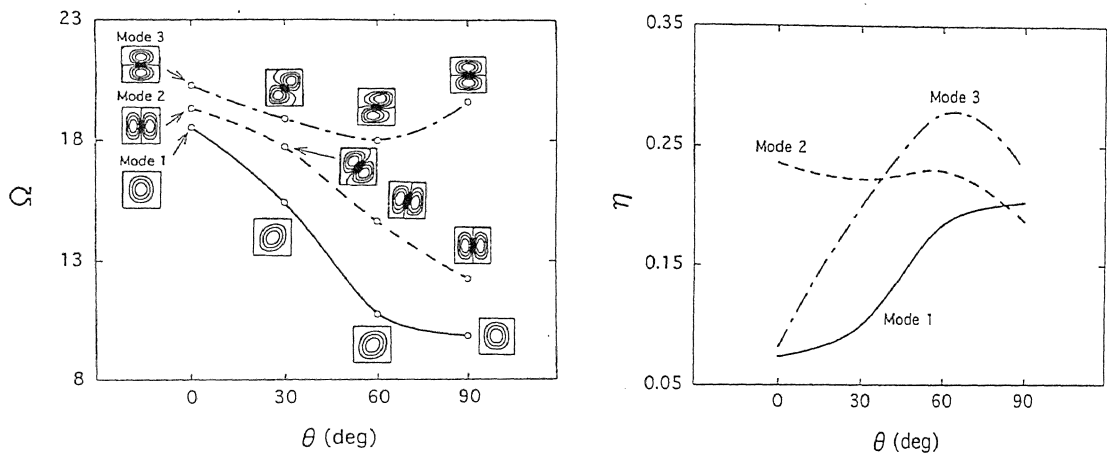
(c) $R_x/R_y = -1$

図5-3 繊維角度 θ による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(周辺単純支持)

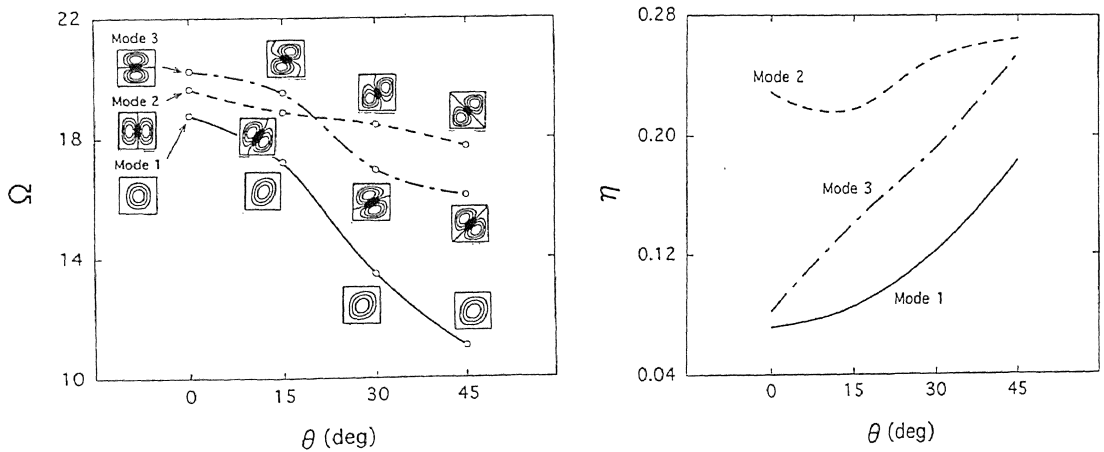
【 $a/b=1, a/H=50, a/R_x=0.2, t_c/a=t_1/a=t_2/a=1/150, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=0.5,$
 $E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5, (\theta/-\theta/C/-\theta/\theta)$ 】



(a) $R_x/R_y = 1$



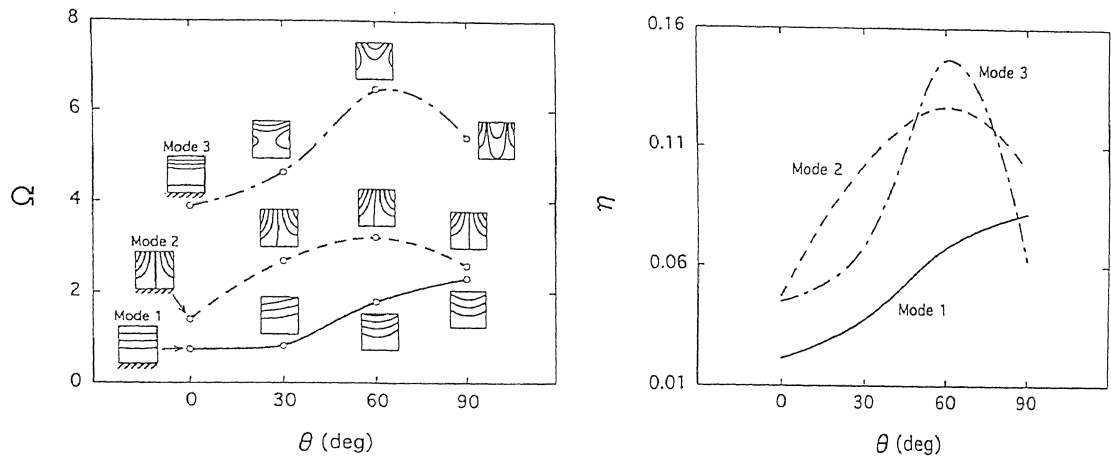
(b) $R_x/R_y = 0$



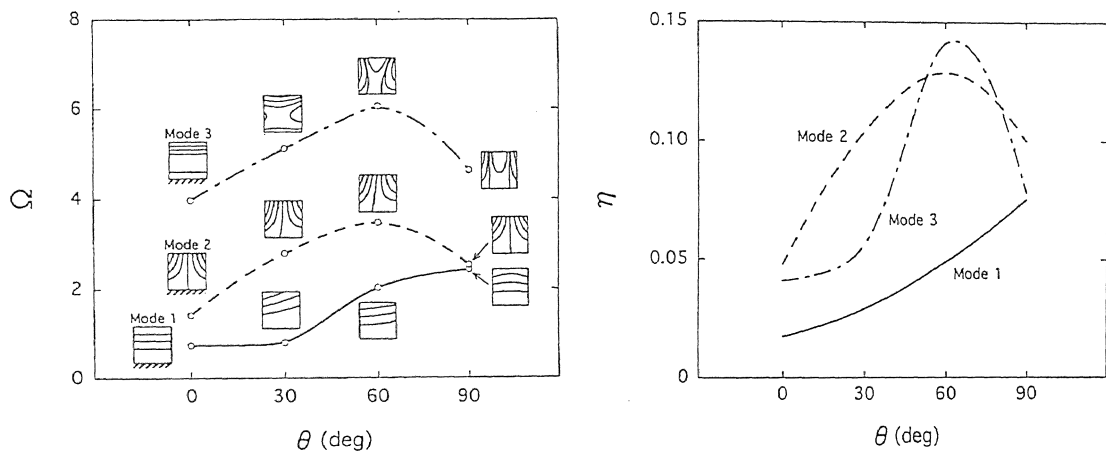
(c) $R_x/R_y = -1$

図5-4 繊維角度 θ による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(周辺固定)

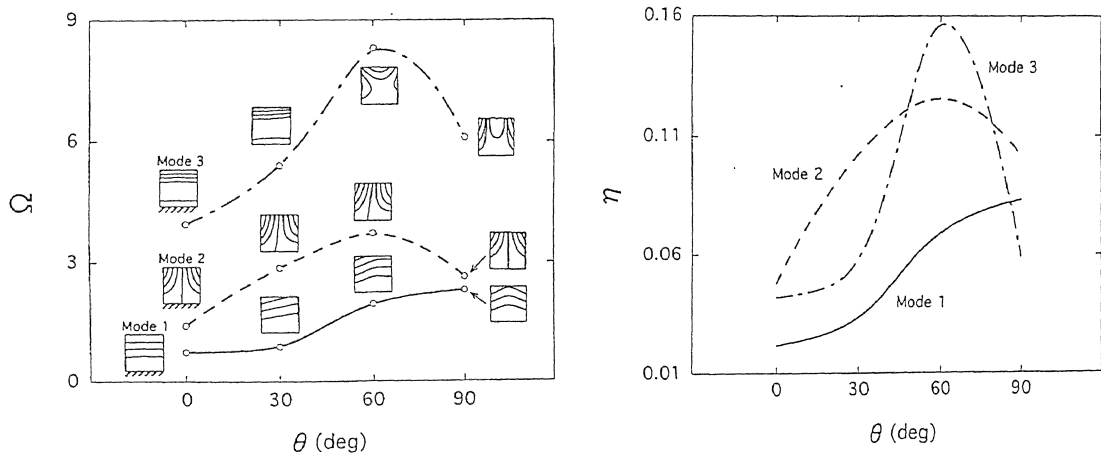
【 $a/b=1$, $a/H=50$, $a/R_x=0.2$, $t_c/a=t_1/a=t_2/a=1/150$, $E_1/E_2=20$,
 $G_{12}/E_2=0.5$, $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(\theta/-\theta/C/-\theta/\theta)$ 】



(a) $R_x/R_y = 1$



(b) $R_x/R_y = 0$



(c) $R_x/R_y = -1$

図5-5 繊維角度 θ による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化 (片持ち)

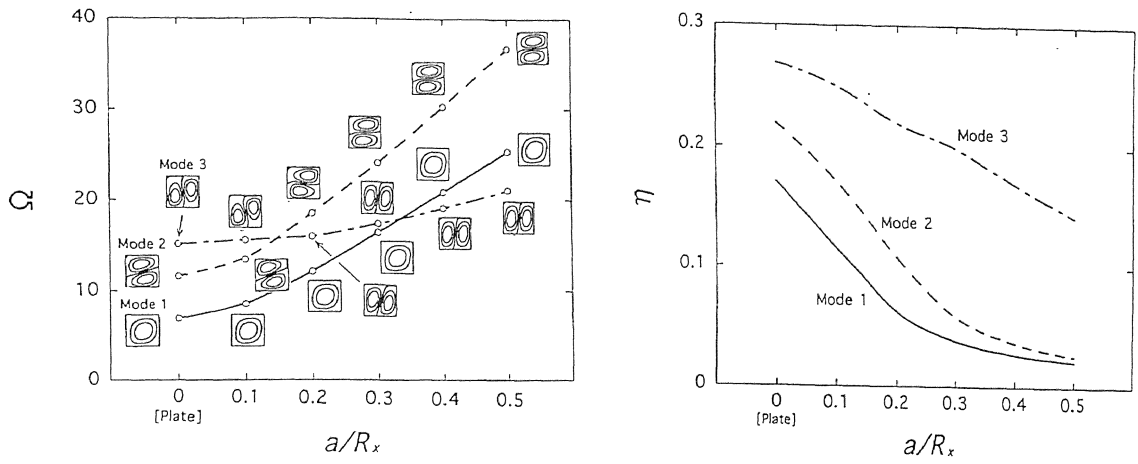
【 $a/b=1, a/H=50, a/R_x=0.2, t_c/a=t_1/a=t_2/a=1/150, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=0.5, E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1, \delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5, (\theta/-\theta/C/-\theta/\theta)$ 】

つぎに、無次元振動数 Ω 、モード損失係数 η および振動モードにおける代表曲率比 a/R_x の影響を検討する。ここでは、積層形態を $(30^\circ / -30^\circ / C / -30^\circ / 30^\circ)$ とし、 $a/R_x = 0$ (板) ~ 0.5 と変化させた。

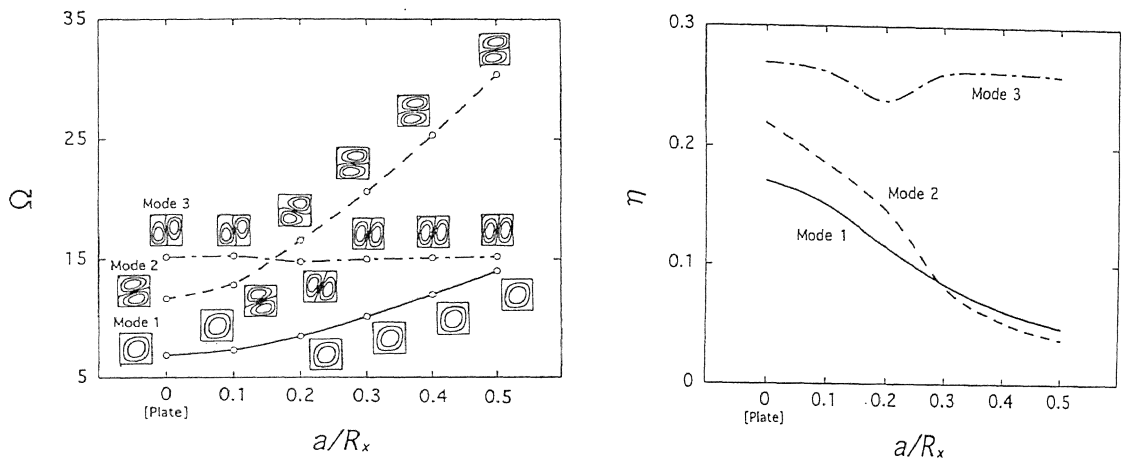
図5-6(a)~(c)にそれぞれ球形($R_x/R_y = 1$)、円筒形($R_x/R_y = 0$)および鞍形($R_x/R_y = -1$)の周辺単純支持された偏平殻について、代表曲率比 a/R_x による無次元振動数 Ω 、モード損失係数 η および振動モードの変化を示す。この図から、 $R_x/R_y = -1$ の Mode1 を除いて、曲率比 a/R_x の増加に伴い、固有振動数は増加する。また、 $R_x/R_y = 1$ (球形) の場合、その増加割合が最も大きく、曲率比 a/R_x の影響を受けやすい。モード損失係数に関しては、 $R_x/R_y = 0$ の Mode3 を除いて、曲率比 a/R_x の増加に伴いモード損失係数は減少する。ただし、 $R_x/R_y = 1$ (球形) の場合、固有振動数と同様に、曲率比 a/R_x によるモード損失係数の変化割合は他の形状に比べて大きい。

図5-7(a)~(c)にそれぞれ球形($R_x/R_y = 1$)、円筒形($R_x/R_y = 0$)および鞍形($R_x/R_y = -1$)の周辺固定された偏平殻について、代表曲率比 a/R_x による無次元振動数 Ω 、モード損失係数 η および振動モードの変化を示す。この図から、曲率比 a/R_x による固有振動数の変化は偏平殻の形状にかかわらず同様な傾向を示すが、 $R_x/R_y = 1$ (球形) の場合、変化割合が最も大きい。モード損失係数は Mode1 と Mode2 の場合、いずれの形状についてもある曲率比 a/R_x において最小となる。これは、明らかに周辺単純支持の場合と異なる傾向であるが、振動モードについても回転と面内変位の拘束の違いから、Mode1 と Mode2 については、周辺単純支持と周辺固定のモード形状にかなりの相違がみられる。また、円筒形($R_x/R_y = 0$) では、 $a/R_x = 0.2$ 付近で Mode2 と Mode3 の間でヴィーリングが生じ、モード損失係数が接近する箇所がみられる。

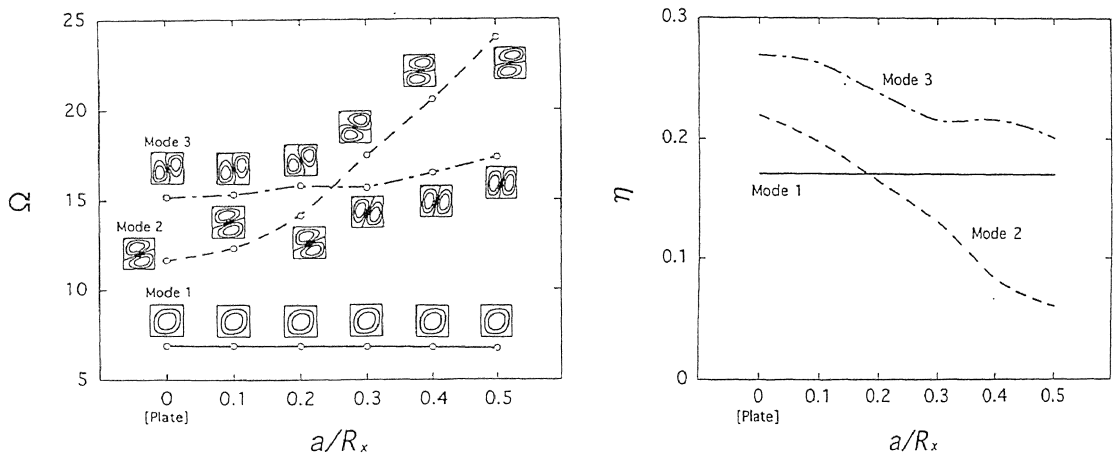
図5-8(a)~(c)にそれぞれ球形($R_x/R_y = 1$)、円筒形($R_x/R_y = 0$)および鞍形($R_x/R_y = -1$)の片持ち偏平殻について、代表曲率比 a/R_x による無次元振動数 Ω 、モード損失係数 η および振動モードの変化を示す。この図から、曲率比 a/R_x による固有振動数の変化はいずれの形状についても同様な傾向を示すことがわかる。一方、モード損失係数は2方向曲率比 R_x/R_y および代表曲率比 a/R_x に依存し、とくに Mode3 が2方向曲率比 R_x/R_y の影響を大きく受け、 $a/R_x = 0.2 \sim 0.3$ 付近において最小となる。



(a) $R_x/R_y = 1$



(b) $R_x/R_y = 0$



(c) $R_x/R_y = -1$

図5-6 曲率比 a/R_x による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(周辺単純支持)

[$a/b=1$, $a/H=50$, $t_c/a=t_1/a=t_2/a=1/150$, $E_1/E_2=20$, $G_{12}/E_2=0.5$,
 $E_c/E_1=10^{-3}$, $\nu_{12}=0.28$, $\nu_c=0.4$, $\rho_1/\rho_2=1$, $\rho_c/\rho_1=0.1$,
 $\delta_1=0.001$, $\delta_2=0.01$, $\delta_{12}=0.015$, $\delta_c=0.5$, $(30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$]

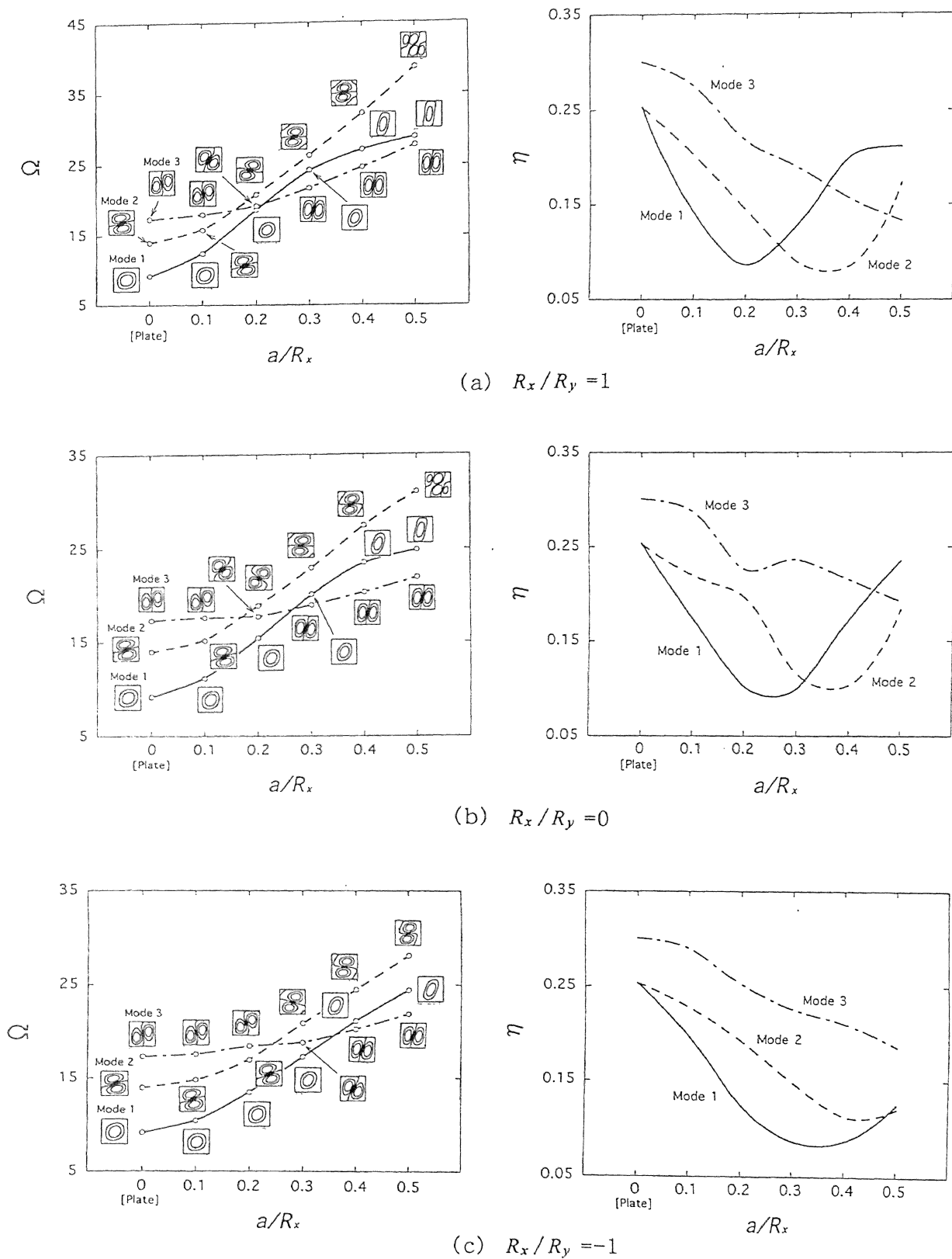
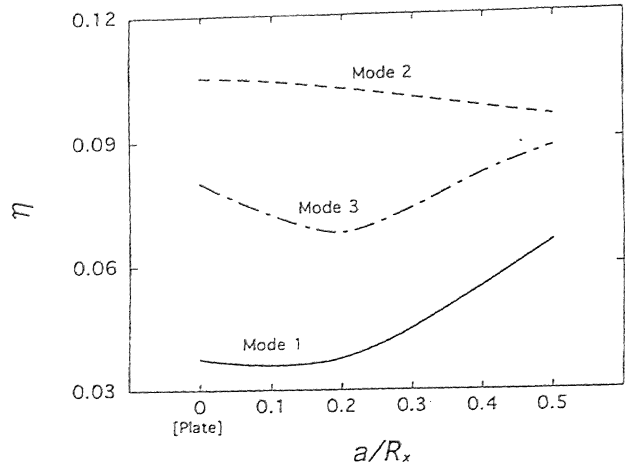
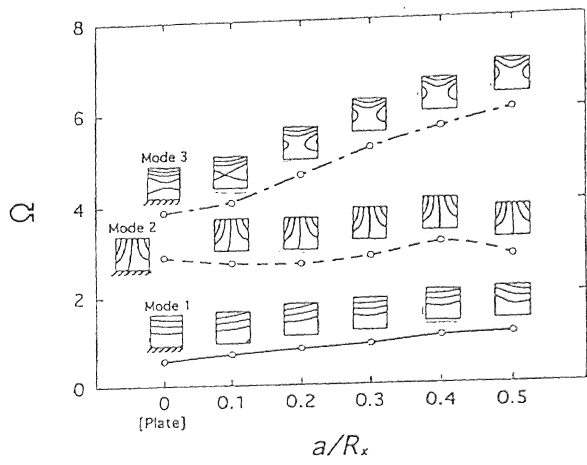
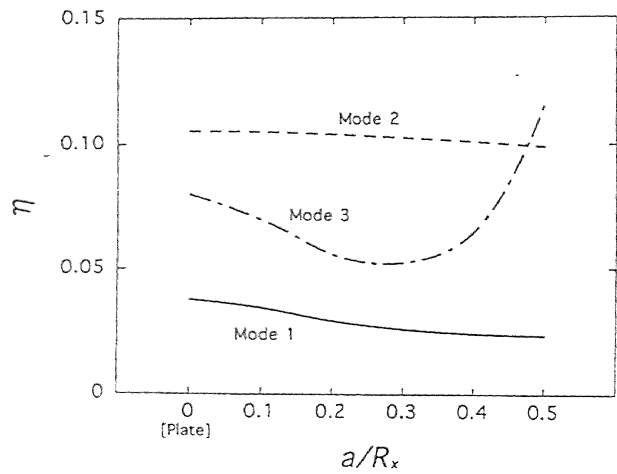
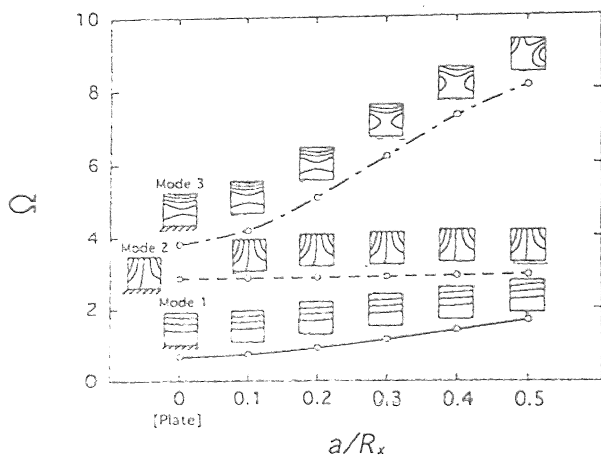


図5-7 曲率比 a/R_x による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化
(周辺固定)

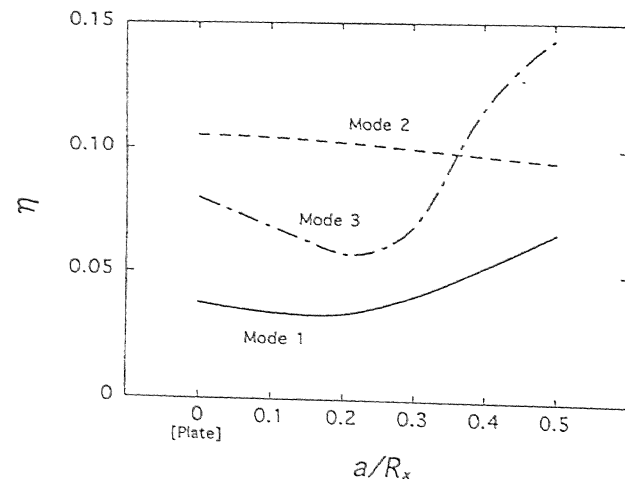
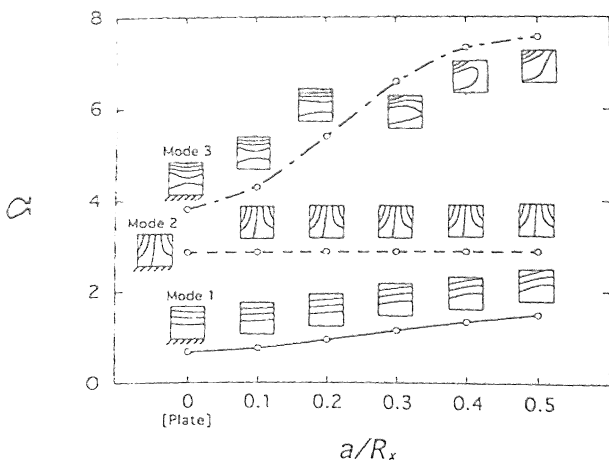
【 $a/b=1, a/H=50, t_c/a=t_1/a=t_2/a=1/150, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=0.5,$
 $E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5, (30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)$ 】



(a) $R_x/R_y = 1$



(b) $R_x/R_y = 0$



(c) $R_x/R_y = -1$

図5-8 曲率比 a/R_x による無次元振動数 Ω とモード損失係数 η の変化 (片持ち)

[$a/b=1, a/H=50, t_c/a=t_1/a=t_2/a=1/150, E_1/E_2=20, G_{12}/E_2=0.5,$
 $E_c/E_1=10^{-3}, \nu_{12}=0.28, \nu_c=0.4, \rho_1/\rho_2=1, \rho_c/\rho_1=0.1,$
 $\delta_1=0.001, \delta_2=0.01, \delta_{12}=0.015, \delta_c=0.5, (30^\circ/-30^\circ/C/-30^\circ/30^\circ)]$

いずれの境界条件および形状に関しても、適切な曲率比 a/R_x を選択することにより、特定の振動モードに対して高いモード損失係数を与えることができる。

5.4 結 言

本章では、FRP積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ偏平殻の振動減衰特性をリッツ法により解析した。はじめに、線形弾性論および積層理論に基づいて偏平殻の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価し、偏平殻のラグランジュ関数を極小化することにより、サンドイッチ偏平殻の振動数方程式を導出した。数値計算では、まず、解の収束性を調べ、他の著者らによる解析結果との比較を行い、本解析結果の精度と妥当性を検討した。ついで、周辺単純支持、周辺固定および片持ちの複合材サンドイッチ偏平殻について、繊維角度および代表曲率比による無次元振動数 Ω 、モード損失係数 η および振動モードの変化を調べ、複合材サンドイッチ偏平殻の振動減衰特性について検討した。その結果を要約すると以下のようなになる。

(1) 変位関数の項数による固有振動数とモード損失係数の収束状況を調べ、項数を適切に取ることによって実用上十分な精度を有する解が得られることを示した。また、他の著者らによる解析結果との比較を行い、本解析結果が十分な精度と妥当性を有することを確かめた。

(2) サンドイッチ偏平殻の固有振動数は表面材の繊維角度に依存し、適切な繊維角度を選択することにより、特定の振動モードに対して高いモード損失係数を与えることができる。

(3) 曲率を有する偏平殻では、境界における回転と面内変位の拘束条件が振動減衰特性に大きく影響する。

(4) 曲率比 a/R_x の増加に伴い、固有振動数は増加するが、周辺単純支持と周辺固定では、球形偏平殻の場合、その増加割合が最も大きく、曲率比 a/R_x の影響を受けやすい。また、適切な曲率比 a/R_x を選択することにより、特定の振動モードに対して高いモード損失係数を与えることができる。

第6章 結 論

本研究では，FRP積層表面材とハニカム心材および粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ平板，円錐殻，球殻および偏平殻の振動減衰特性をリッツ法により解析した．数値計算では，様々な境界条件，積層形態および形状寸法比について固有振動数，モード損失係数および振動モードを求め，複合材サンドイッチ平板と殻の振動減衰特性を定量的に明らかにした．

本研究で行った研究内容と得られた成果を要約すると以下のようなになる．

第1章は緒論であり，本研究の目的と意義について述べると共に，サンドイッチはりおよび平板，円筒および円錐殻，球殻，偏平殻に関する研究動向について述べ，従来の研究概要と本研究の位置づけ，ならびに各章の構成と概要を述べた．

第2章では，FRP積層表面材とハニカム心材および粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ長方形板の振動減衰特性をリッツ法により解析した．表面材の変形において，面外せん断変形を考慮する場合としない場合の二つの変位場による定式化を行い，数値計算を実施して固有振動数，振動モードおよびモード損失係数を求めた．また，ホログラフィー干渉法による実験により片持ちサンドイッチ板の固有振動数を求めた．その結果，変位関数の項数を適切に取ることによって実用上十分な精度を有する解が得られ，他の著者らによる解析結果と比較して，本解析結果が十分な精度と妥当性を有することが確かめられた．また，サンドイッチ長方形板の自由振動解析では，辺長と板全体の厚さの比が10以下の厚い板を扱う場合，表面材の変形において面外せん断変形を考慮した変位場の適用が妥当であることを示した．さらに，積層表面材の繊維角度による固有振動数の変化においては，モード次数の異なる振動数が接近するブリーキングが生じること，心材の厚さによる固有振動数の変化においては，心材と板全体の厚さ比が0.8付近で固有振動数が最大となることがわかった．さらに，サンドイッ

チ板の固有振動数は、質量効果により積層板よりも高い固有振動数を示し、振動モードにおける節線のゆがみが小さいことが明らかとなった。また、片持ちサンドイッチ正方形板について、解析およびホログラフィー干渉法による実験から求めた固有振動数の比較検討を行い、本解析法が十分に妥当な近似解法であることが確かめられた。そして、粘弾性心材の振動数依存性を無視した解析では、評価するモード次数の範囲を限定すれば、心材の振動数依存性を考慮しなくてもモード損失係数と固有振動数の予測が可能であること、適切な繊維角度を選択することにより、特定の振動モードに対して高いモード損失係数を与えることが可能であることを明らかにした。さらに、モード損失係数は心材と板全体の厚さ比が0.6~0.8付近で最大となることがわかった。

第3章では、FRP積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ円錐殻の振動減衰特性をリッツ法により解析した。そのため、微小変形理論および積層理論に基づいて円錐殻の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価した。ついで、円錐殻のラグランジュ関数を極小化することにより振動数方程式を導出し、数値計算を実施して固有振動数、振動モードおよびモード損失係数を求めた。その結果、変位関数の項数を適切に取ることによって実用上十分な精度を有する解が得られ、他の著者らが解析および実験結果によって求めた結果と比較して、本解析結果が十分な精度と妥当性を有することが確かめられた。また、基本振動数を与える周方向波数は半頂角、積層形態および境界条件に依存し、周方向波数が増加するにつれてモード損失係数は全体的に増加することがわかった。そして、表面材の積層形態は一方向積層よりもクロスプライ積層の方が円錐殻の動的剛性および減衰の向上に効果があることが明らかとなった。さらに、固有振動数が最小となる周方向波数の値は境界条件、半頂角、殻の長さとお口半径の比および殻全体の厚さと小口半径の比に依存することがわかった。また、殻全体の厚さに対して心材の厚さが増加すると、周方向波数について低次の振動モードではモード損失係数は増加するが、周方向波数について高次の振動モードではある心材厚さにおいてモード損失係数が最大になることを示した。

第4章では、FRP積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ球殻の振動減衰特性をリッツ法により解析した。そのため、微小変形理論および積層理論に基づいて球殻の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価した。ついで球殻のラグランジュ関数を極小化することにより振動数方程式を導出し、数値計算を実施して固有振動数、振動モードおよびモード損失係数を求めた。その結果、変位関数の項数を適切に取ることによって実用上十分な精度を有する解が得られ、他の著者らによる解析結果と比較して、本解析結果が十分な精度と妥当性を有することが確かめられた。また、表面材をクロスプライ積層した場合、周方向波数1が基本振動モードとなり、周方向波数が1以上になると固有振動数は単調に増加すること、および周方向波数が大きくなるにつれ、モード損失係数は全体的に増加することがわかった。そして、軸対称振動の場合、周方向の変位が卓越するねじりモードが生じ、その固有振動数は境界条件に依存しないこと、および高次モードで開き角が小さいほど面外変位の卓越した振動モードとなることを示した。さらに、表面材の積層形態は一方向積層よりも、クロスプライ積層の方が剛性および減衰の向上に効果があること、および固有振動数は開き角が増加するにつれて低下するが、モード損失係数は単調に変化せず、非軸対称振動ではある開き角で最大となる場合があることを明らかにした。また、殻が厚肉になるにつれ固有振動数は増加するが、周方向波数が大きく、開き角が小さいほど変化割合が大きいことや、心材の厚さと殻全体の厚さの比が増加するにつれて、一般にモード損失係数は増加し、心材の厚さと殻全体の厚さの比が0.8付近で最大となる場合もあることを明らかにした。

第5章では、FRP積層表面材と粘弾性心材から成る複合材サンドイッチ扁平殻の振動減衰特性をリッツ法により解析した。そのため、微小変形理論および積層理論に基づいて扁平殻の最大ひずみエネルギーおよび最大運動エネルギーを評価した。ついで扁平殻のラグランジュ関数を極小化することにより振動数方程式を導出し、数値計算を実施して固有振動数、振動モードおよびモード損失係数を求めた。その結果、変位関数の項数を適切に取ることによって実用上十分な精度を有する解が得られ、他の著者らに

よる解析結果と比較して、本解析結果が十分な精度と妥当性を有することが確かめられた。また、固有振動数とモード損失係数は表面材の繊維角度に依存し、適切な繊維角度を選択することにより、特定の振動モードに対して高いモード損失係数を与えることができることを示した。そして、扁平殻の振動減衰特性は境界における回転と面内変位の拘束条件に大きく影響されることがわかった。さらに、曲率が大きくなるにつれ、固有振動数は増加し、とくに周辺単純支持と周辺固定の球形扁平殻の場合、曲率比の影響を受けやすいこと、および適切な曲率比を選択することにより、特定の振動モードに対して高いモード損失係数を与えることができることを示した。

以上が本研究の概要と成果を要約したものであり、ここで得られた結果が、今後の同種の研究における比較基準を与えると共に、今後、益々応用範囲の拡大が期待される複合材料構造物の構造設計において有益な指針を与えるものと確信する。

謝 辞

本研究の遂行にあたり、終始適切なご指導とご助言を賜ると共に、校閲の労を惜しまれなかった北海道工業大学 丸山 晃市 教授、一ノ宮 修 教授に対し謹んで感謝の意を表します。

また、本論文の作成にあたり、有益なご意見とご検討を頂きました北海道工業大学 成田 吉弘 教授、豊田 国昭 教授、太田 佳樹 助教授に対し厚く感謝の意を表します。

さらに、本研究の実験に協力して頂いた平成8年度卒業研究生 谷 聡雄 君、田畑 淳也 君に対し謝意を表します。

最後に、北海道工業大学 機械システム工学専攻 博士後期課程の開設にご尽力頂きました北海道工業大学 第6代学長 有江 幹男 先生に対し深く感謝の意を表します。

参考文献

- (1) Ibrahim, I.M., Farah, A. and Rizk, M.N.F., “ Dynamic Analysis of Unbalanced Anisotropic Sandwich Plates, ” *Proceeding of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division*, 107-EM2 (1981), 405-418.
- (2) Monforton, G.R. and Ibrahim, I.M., “ Analysis of Sandwich Plates with Unbalanced Cross-Ply Faces, ” *International Journal of Mechanical Sciences*, 17 (1975), 227-238.
- (3) Monforton, G.R. and Ibrahim, I.M., “ Modified Stiffness Formulation of Unbalanced Anisotropic Sandwich Plates, ” *International Journal of Mechanical Sciences*, 19 (1977), 335-343.
- (4) Kanematsu, H.H., Hirano, Y. and Iyama, H., “ Bending and Vibration of CFRP-Faced Rectangular Sandwich Plates, ” *Composite Structures*, 10(1988), 145-163.
- (5) Ha, K.H., “ Finite Element Analysis of Sandwich Plates : An Overview, ” *Computers & Structures*, 37-4(1990), 397-403.
- (6) 加鳥・石原, “ 異方性表板を有するサンドイッチ板の曲げおよび振動解析 ”, 日本航空宇宙学会・日本機械学会共催, 第34回構造強度に関する講演会講演集, (1992), 226-229.
- (7) 宮地・渡辺, “ 異方性表皮を持つサンドイッチ板の剛性及び振動解析 ”, 日本航空宇宙学会・日本機械学会共催, 第34回構造強度に関する講演会講演集, (1992), 230-233.
- (8) 渡辺・大門・宮地, “ 複合材表皮を持つ片持ちサンドイッチ板の振動特性 ”, 日本航空宇宙学会・日本機械学会共催, 第34回構造強度に関する講演会講演集, (1992), 234-237.
- (9) Shiau, L.C., “ Supersonic Flutter of Composite Sandwich Panels, ” *AIAA Journal*, 30-12(1992), 2987-2989.
- (10) Mallikarjuna. and Kant, T., “ A Critical Review and Some Results of Recently Developed Refined Theories of Fiber-Reinforced Laminated Composites and Sandwiches, ” *Composite Structures*, 23(1993), 293-312.
- (11) Hu, J.S. and Hwu, C., “ Free Vibration of Delaminated Composite Sandwich Beams, ” *AIAA Journal*, 33-10(1995), 1911-1918.

- (12) Mead, D.J. and Markus, S., “The Forced Vibration of A Three-Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions,” *Journal of Sound and Vibration*, 10-2(1969), 163-175.
- (13) Rao, D.K., “Frequency and Loss Factors of Sandwich Beams Under Various Boundary Conditions,” *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20-5(1978), 271-282.
- (14) Narayanan, S. and Shanbhag, R.L., “Sound Transmission Through Elastically Supported Sandwich Panels into a Rectangular Enclosure,” *Journal of Sound and Vibration*, 77-2(1981), 251-270.
- (15) Lall, A.K., Asnani, N.T. and Nakra, B.C., “Vibration and Damping Analysis of Rectangular Plate with Partially Covered Constrained Viscoelastic Layer,” *Transactions of the ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 109(1987), 241-247.
- (16) 鹿内・佐藤・福野, “粘弾性長方形サンドイッチ板の減衰効果”, 日本機械学会論文集, 57-533, C(1991), 69-75.
- (17) 宇津野・杉本・井上・田中, “粘弾性三層形制振材料の動特性予測に関する研究”, 日本機械学会論文集, 61-583, C(1995), 217-222.
- (18) Sakiyama, T., Matsuda, H. and Morita, C., “Free Vibration Analysis of Sandwich Beam with Elastic or Viscoelastic Core by Applying the Discrete Green Function,” *Journal of Sound and Vibration*, 191-2(1996), 189-206.
- (19) Sakiyama, T., Matsuda, H. and Morita, C., “Free Vibration Analysis of Continuous Sandwich Beams with Elastic or Viscoelastic Cores by Applying the Discrete Green Function,” *Journal of Sound and Vibration*, 198-4(1996), 439-454.
- (20) Barrett, D.J., “An Anisotropic Laminated Damped Plate Theory,” *Journal of Sound and Vibration*, 154-3(1992), 453-465.
- (21) Cupial, P. and Niziol, J., “Vibration and Damping Analysis of a Three-Layered Composite Plate with a Viscoelastic Mid-Layer,” *Journal of Sound and Vibration*, 183-1(1995), 99-114.
- (22) Soni, M.L. and Bogner, F.K., “Finite Element Vibration Analysis of Damped Structures,” *AIAA Journal*, 20-5(1982), 700-707.
- (23) Johnson, C.D. and Kienholz, D.A., “Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers,” *AIAA Journal*, 20-9(1982), 1284-1290.

- (24) Nabi, S.M. and Ganesan, N., “ Sandwich Triangular Plate Finite Element Based on a Modified Ahmed Approach,” *Journal of Sound and Vibration*, 161-3(1993), 545-547.
- (25) Sun, C.T., Sankar, B.V. and Rao, V.S., “ Damping and Vibration Control of Unidirectional Composite Laminates Using Add-on Viscoelastic Materials ,” *Journal of Sound and Vibration*, 139-2(1990), 277-287.
- (26) Lifshitz, J.M. and Leibowitz, M., “ Optimal Sandwich Beam Design for Maximum Viscoelastic Damping ,” *International Journal of Solids and Structures*, 23-7(1987), 1027-1034.
- (27) Irie, T., Yamada, G. and Kaneko, Y., “ Free Vibration of a Conical Shell with Variable Thickness ,” *Journal of Sound and Vibration*, 82-1(1982), 83-94.
- (28) Irie, T., Yamada, G. and Tanaka, K., “ Natural Frequencies of Truncated Conical Shells ,” *Journal of Sound and Vibration*, 92-3(1984), 447-453.
- (29) Kapania, R.K., “ A Review on the Analysis of Laminated Shells ,” *Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology* , 111(1989), 88-96.
- (30) Soldatos, K.P., “ A Comparison of Some Shell Theories Used for the Dynamic Analysis of Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Panels, ” *Journal of Sound and Vibration*, 97-2(1984), 305-319.
- (31) 小林・長島, “ CFRP積層円筒殻の振動特性 ” , 日本航空宇宙学会誌, 34-389 (1986), 332-339.
- (32) Narita, Y., Ohta, Y., Yamada, G. and Kobayashi, Y., “ Analytical Method for Vibration of Angle-Ply Cylindrical Shells Having Arbitrary Edges,” *AIAA Journal* , 30-3(1992), 790-796.
- (33) Ip, K.H., Chan, W.K., Tse, P.C. and Lai, T.C., “ Vibration Analysis of Orthotropic Thin Cylindrical Shells with Free Ends by the Rayleigh - Ritz Method,” *Journal of Sound and Vibration*, 195-1(1996), 117-135.
- (34) Shu, C., “ Free Vibration Analysis of Composite Laminated Conical Shells by Generalized Differential Quadrature,” *Journal of Sound and Vibration*, 194-4(1996), 587-604.

- (35) Kayran, A. and Vinson, J.R., “ Free Vibration Analysis of Laminated Composite Truncated Circular Conical Shells, ” *AIAA Journal* , 28-7(1990), 1259-1269.
- (36) Tong, L., “ Free Vibration of Composite Laminated Conical Shells, ” *International Journal of Mechanical Science*, 35-1(1993), 47-61.
- (37) Tong, L., “ Free Vibration of Laminated Conical Shells Including Transverse Shear Deformation, ” *International Journal of Solids and Structures*, 31-4(1994), 443-456.
- (38) Sankaranarayanan, N., Chandrasekaran, K. and Ramaiyan, G., “Axisymmetric Vibrations of Laminated Conical Shells of Variable Thickness, ” *Journal of Sound and Vibration*, 118-1(1987), 151-161.
- (39) Sankaranarayanan, N., Chandrasekaran, K. and Ramaiyan, G., “Free Vibrations of Laminated Conical Shells of Variable Thickness, ” *Journal of Sound and Vibration*, 123-2(1988), 357-371.
- (40) Sivadas, K.R. and Ganesan, N., “ Vibration Analysis of Thick Composite Clamped Conical Shells of Varying Thickness, ” *Journal of Sound and Vibration*, 152-1(1992), 27-37.
- (41) Mirza, S., “ Recent Research in Vibration of Layered Shells , ” *Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology* , 113(1991), 321-325.
- (42) Siu, C.C. and Bert, C.W., “ Free Vibrational Analysis of Sandwich Conical Shells with Free Edges, ” *The Journal of the Acoustical Society of America* , 47-3(1970), 943-945.
- (43) Wilkins, D.J., Bert, C.W. and Egle, D.M., “ Free Vibrations of Orthotropic Sandwich Conical Shells with Various Boundary Conditions, ” *Journal of Sound and Vibration*, 13-2(1970), 211-228.
- (44) Kumar, V. and Singh, A.V., “Vibrations of Composite Noncircular Cylindrical Shells, ” *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics* , 117(1995), 470-476.
- (45) Alam, N. and Asnani, N.T., “ Vibration and Damping Analysis of Fiber Reinforced Composite Material Cylindrical Shell , ” *Journal of Composite Materials*, 21(1987), 348-361.
- (46) Khatri, K.N. and Asnani, N.T., “ Vibration and Damping Analysis of Fiber Reinforced Composite Material Conical Shells, ” *Journal of Sound and Vibration*, 193-3(1996), 581-595.

- (47) Khatri, K.N. and Asnani, N.T., “ Vibration and Damping Analysis of Multilayered Conical Shells,” *Composite Structures*, 33(1995), 143-157.
- (48) Ramesh, T.C. and Ganesan, N., “ Vibration and Damping Analysis of Cylindrical Shells with Constrained Damping Treatment -A Comparison of Three Theories,” *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics* , 117(1995), 213-219.
- (49) Ramesh, T.C. and Ganesan, N., “ Finite Element Analysis of Conical Shells with a Constrained Viscoelastic Layer,” *Journal of Sound and Vibration*, 171-5(1994), 577-601.
- (50) Zhou, H. and Rao, M.D., “Damping of Composite Tubes with Embedded Viscoelastic Layers,” *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics* , 118(1996), 384-389.
- (51) Glockner, P.G. and Tawadros, K.Z., “ Experiments on Free Vibration of Shells of Revolution,” *Experimental Mechanics* , 13(1973), 411-421.
- (52) De Souza, V.C.M. and Croll, J.G.A., “ An Energy Analysis of the Free Vibrations of Isotropic Spherical Shells,” *Journal of Sound and Vibration*, 73-3(1980), 379-404.
- (53) Kunieda, H., “ Flexural Axisymmetric Free Vibrations of a Spherical Dome : Exact Results and Approximate Solutions,” *Journal of Sound and Vibration*, 92-1(1984), 1-10.
- (54) Singh, A.V. and Mirza, S., “ Asymmetric Modes and Associated Eigenvalues for Spherical Shells ,” *Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology* , 107(1985), 77-82.
- (55) Singh, A.V., “ On Vibrations of Shells of Revolution Using Bezier Polynomials ,” *Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology* , 113(1991), 579-584.
- (56) Tessler, A. and Spiridigliozzi, L., “ Resolving Membrane and Shear Locking Phenomena in Curved Shear-Deformable Axisymmetric Shell Elements ,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , 26(1988), 1071-1086.
- (57) 福永・植村, “ FW圧力容器の最適設計(第1報)圧力容器の構造解析と破損基準に基づく最適ドーム形状 ” , 日本航空宇宙学会誌, 29-331 (1981), 432-439.

- (58) 植村, “FRP圧力容器の力学と最近の開発動向”, 日本複合材料学会誌, 13-1 (1987), 10-20.
- (59) 青山・勝亦, “ユーザーが複合材料に期待するもの: 容器-I. 圧力容器 (タンク)”, 日本複合材料学会誌, 15-6 (1989), 12-16.
- (60) Chao, C.C., Tung, T.P. and Chern, Y.C., “Axisymmetric Free Vibration of Thick Orthotropic Hemispherical Shells under Various Edge Conditions,” *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 113(1991), 152-159.
- (61) Narasimhan, M.C. and Alwar, R.S., “Free Vibration Analysis of Laminated Orthotropic Spherical Shells,” *Journal of Sound and Vibration*, 154-3(1992), 515-529.
- (62) Kumar, V. and Singh, A.V., “Vibrations of Fiber-Reinforced Laminated Deep Shells,” *Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, 118(1996), 407-414.
- (63) Gautham, B.P. and Ganesan, N., “Free Vibration Characteristics of Isotropic and Laminated Orthotropic Spherical Caps,” *Journal of Sound and Vibration*, 204-1(1997), 17-40.
- (64) Koplik, B. and Yu, Y.Y., “Axisymmetric Vibrations of Homogeneous and Sandwich Spherical Caps,” *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 34(1967), 667-673.
- (65) Culkowski, P.M. and Reismann, H., “The Spherical Sandwich Shell under Axisymmetric Static and Dynamic Loading,” *Journal of Sound and Vibration*, 14-2(1971), 229-240.
- (66) Mirza, S. and Singh, A.V., “Free Vibration of Deep Spherical Sandwich Shells,” *Journal of Engineering Mathematics*, 8-1(1974), 71-79.
- (67) Mirza, S. and Singh, A.V., “On Non-symmetric Vibration of Deep Spherical Sandwich Shells,” *Journal of Engineering Mathematics*, 9-4(1975), 333-341.
- (68) Singh, A.V., Mirza, S. and Gupgupoglu, K., “Dynamic Response of Sandwich Shells of Revolution,” *Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, 112(1990), 98-103.
- (69) Singh, A.V. and Zhu, L., “On Asymmetric Vibrations of Layered Orthotropic Shells of Revolution,” *Journal of Sound and Vibration*, 148-2(1991), 265-277.

- (70) Okazaki, A., Urata, Y. and Tatemichi, A., “ Damping Properties of Three-Layered Shallow Spherical Shells with a Constrained Viscoelastic Layer, ” *JSME International Journal, Series I* , 33-2(1990), 145-151.
- (71) Gautham, B.P. and Ganesan, N., “ Vibration and Damping Characteristics of Spherical Shells with a Viscoelastic Core, ” *Journal of Sound and Vibration*, 170-3(1994), 289-301.
- (72) Leissa, A.W., Lee, J.K. and Wang, A.J., “ Vibrations of Cantilevered Shallow Cylindrical Shells of Rectangular Planform, ” *Journal of Sound and Vibration*, 78-3(1981), 311-328.
- (73) Leissa, A.W., Lee, J.K. and Wang, A.J., “ Vibrations of Cantilevered Doubly-Curved Shallow Shells, ” *International Journal of Solids and Structures*, 19-5(1983), 411-424.
- (74) Narita, Y. and Leissa, A.W., “ Vibrations of Corner Point Supported Shallow Shells of Rectangular Planform, ” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 12(1984), 651-661.
- (75) Leissa, A.W. and Narita, Y., “ Vibrations of Completely Free Shallow Shells of Rectangular Planform, ” *Journal of Sound and Vibration*, 96-2(1984), 207-218.
- (76) Reddy, J.N., “ Exact Solutions of Moderately Thick Laminated Shells, ” *Proceeding of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division*, 110-5 (1984), 794-809.
- (77) Touratier, M., “ A Refined Theory of Laminated Shallow Shells, ” *International Journal of Solids and Structures*, 29-11(1992), 1401-1415.
- (78) Leissa, A.W. and Qatu, M.S., “ Equations of Elastic Deformation of Laminated Composite Shallow Shells , ” *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics* , 58(1991), 181-188.
- (79) Qatu, M.S. and Leissa, A.W., “ Natural Frequencies for Cantilevered Doubly-Curved Laminated Composite Shallow Shells, ” *Composite Structures*, 17(1991), 227-255.
- (80) Qatu, M.S. and Leissa, A.W., “ Free Vibrations of Completely Free Doubly Curved Laminated Composite Shallow Shells, ” *Journal of Sound and Vibration*, 151-1(1991), 9-29.

- (81) Chandrashekhara, K., “ Free Vibrations of Anisotropic Laminated Doubly Curved Shells, ” *Computers & Structures*, 33-2(1989), 435-440.
- (82) Chakravorty, D., Bandyopadhyay, J.N. and Sinha, P.K., “ Finite Element Free Vibration Analysis of Point Supported Laminated Composite Cylindrical Shells, ” *Journal of Sound and Vibration*, 181-1(1995), 43-52.
- (83) Chakravorty, D., Bandyopadhyay, J.N. and Sinha, P.K., “ Finite Element Free Vibration Analysis of Doubly Curved Laminated Composite Shells, ” *Journal of Sound and Vibration*, 191-4(1996), 491-504.
- (84) Ahmed, K.M., “ Static and Dynamic Analysis of Sandwich Structures by the Method of Finite Elements , ” *Journal of Sound and Vibration*, 18-1(1971), 75-91.
- (85) Holt, P.J. and Webber, J.P.H., “ Exact Solutions to Some Honeycomb Sandwich Beam, Plate, and Shell Problems , ” *Journal of Strain Analysis*, 17-1(1982), 1-8.
- (86) Тамуров, Ю.Н., “ Вариант Обобщенной Теории Трехслойных Пологих Оболочек с Учетом Обжатия Физически Нелинейного Заполнителя, ” *Прикл. механика*, 26-12(1990), 39-45, (in Russian).
- (87) Xia, Z.Q. and Lukasiewicz, S., “ Non-Linear Analysis of Damping Properties of Cylindrical Sandwich Panels , ” *Journal of Sound and Vibration*, 186-1(1995), 55-69.
- (88) 関根・一ノ宮・丸山, “ 複合材サンドイッチ長方形板の曲げと振動解析 (表面材の面外せん断変形の影響) ”, 日本機械学会論文集, 62-602, C(1996), 170-176.
- (89) 一ノ宮・丸山・関根, “ 種々の境界条件をもつ複合材サンドイッチ平板の振動解析 ”, 日本機械学会講演論文集, No.96-15(I)(1996), 385-386.
- (90) Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., “ *The behavior of Structures Composed of Composite Materials*, ” (1986), Martinus Nijhoff, Dordrecht ; 福田・野村・武田訳, “ 複合材料の構造力学 ”, (1987), 日刊工業新聞社.
- (91) 内田, “ 先端複合材料の設計と加工 ”, (1988), 109, 工業調査会.

- (92) Whitney, J.M., “*Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*,” (1987), 273, Technomic Publishing Company, Inc.
- (93) 関根・一ノ宮・丸山, “粘弾性心材を有する複合材サンドイッチ長方形板の曲げ振動減衰特性”, 日本機械学会論文集, 63-613, C(1997), 50-56.
- (94) 一ノ宮・丸山・関根, “粘弾性コアを有する複合材サンドイッチ長方形板の振動減衰特性”, 日本機械学会講演論文集, No.97-10(A)(1997), 391-394.
- (95) 藤本・田村・金原・谷本, “CFRPと制振材料から構成される制振複合材料の曲げ振動減衰特性”, 日本複合材料学会誌, 20-4(1994), 144-153.
- (96) Sun, C. T. and Lu, Y. P., “*Vibration Damping of Structural Elements*,” (1995), 291, Prentice Hall PTR.
- (97) 丸山・一ノ宮・関根, “サンドイッチ円錐シェルの振動減衰特性”, 北海道工業大学研究紀要, (1998年3月掲載決定).
- (98) Bert, C.W., Baker, J.L. and Egle, D.M., “Free Vibrations of Multilayer Anisotropic Cylindrical Shells,” *Journal of Composite Materials*, 3(1969), 480-499.
- (99) Weingarten, V.I., “Free Vibrations of Multilayered Cylindrical Shells,” *Experimental Mechanics*, 4(1964), 200-205.
- (100) 関根・一ノ宮・丸山, “クロスプライ積層表面材を有するサンドイッチ球形シェルの軸対称振動”, 日本機械学会論文集, (1998年 掲載決定).
- (101) 一ノ宮・丸山・関根, “複合材サンドイッチ球形シェルの自由振動”, 日本機械学会講演論文集, No.972-1(1997), 13-14.
- (102) Kraus, H., “*Thin Elastic Shells*,” (1967), 349, John Wiley & Sons, Inc.
- (103) 鈴木・山田・成田・斉藤, “シェルの振動入門”, (1996), 54, コロナ社.
- (104) Reddy, J.N. and Liu, C.F., “A Higher-Order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic Shells,” *International Journal of Engineering Science*, 23-3(1985), 319-330.
- (105) 細川・坂田, “周辺固定された積層偏平シェルの自由振動”, 日本機械学会講演論文集, No.97-10(B)(1997), 267-269.

研究業績

< 原著論文 >

- (1) 関根 孝次, “サンドイッチ長方形板の振動解析”, 北海道工業大学
修士論文, (1995).
- (2) 一ノ宮 修, 丸山 晃市, 関根 孝次, “サンドイッチ平板の振動解析”,
北海道工業大学研究紀要, 第24号, (1996).
- (3) 関根 孝次, 一ノ宮 修, 丸山 晃市, “複合材サンドイッチ長方形板
の曲げと振動解析 (表面材の面外せん断変形の影響)”, 日本機械学会
論文集, 62巻 602号, C編 (1996), 170-176.
- (4) Osamu Ichinomiya, Kouji Sekine and Koichi Maruyama, “Vibration
Characteristics of Composite Sandwich Plates”, 北海道工業大学研
究紀要, 第25号, (1997).
- (5) 関根 孝次, 一ノ宮 修, 丸山 晃市, “粘弾性心材を有する複合材
サンドイッチ長方形板の曲げ振動減衰特性”, 日本機械学会論文集,
63巻 613号, C編 (1997), 50-56.
- (6) 丸山 晃市, 一ノ宮 修, 関根 孝次, “サンドイッチ円錐シェルの
振動減衰特性”, 北海道工業大学研究紀要, (1998), (掲載決定).
- (7) 関根 孝次, 一ノ宮 修, 丸山 晃市, “クロスプライ積層表面材
を有するサンドイッチ球形シェルの軸対称振動”, 日本機械学会論
文集, C編(1998), (掲載決定).

< 講演論文 >

- (1) 関根 孝次, 一ノ宮 修, 丸山 晃市, “サンドイッチ平板の振動解析”, 日本機械学会第72期全国大会講演論文集, No.940-30(IV), (1994), 194-196.
- (2) 一ノ宮 修, 丸山 晃市, 関根 孝次, “サンドイッチ長方形板の振動解析”, 日本機械学会機械力学・計測制御講演会(D&D Conference)講演論文集, No.95-8(I-Vol.A), (1995), 56-59.
- (3) Osamu Ichinomiya, Koichi Maruyama and Kouji Sekine, “Vibration Analysis of Rectangular Sandwich Plates Resting on Some Elastic Point Supports”, PVP-Vol.302, ASME/JSME(1995), 21-26.
- (4) 丸山 晃市, 一ノ宮 修, 関根 孝次, “ハニカムサンドイッチ平板における変位場の検討”, 日本機械学会北海道支部第35回講演会講演概要集, No.952-1, (1995), 57-58.
- (5) 一ノ宮 修, 丸山 晃市, 関根 孝次, “種々の境界条件をもつ複合材サンドイッチ平板の振動解析”, 日本機械学会第74期全国大会演論文集, No.96-15 (Vol.1), (1996), 385-386.
- (6) 一ノ宮 修, 丸山 晃市, 関根 孝次, “任意の境界条件を有する複合材サンドイッチ長方形板の定常応答解析”, 日本機械学会北海道支部第36回講演会講演概要集, No.962-1, (1996), 127-128.
- (7) 一ノ宮 修, 丸山 晃市, 関根 孝次, “粘弾性コアを有する複合材サンドイッチ長方形板の振動減衰特性”, 日本機械学会機械力学・計測制御講演会(D&D Conference)講演概要集, No.97-10, (1997), 391-394.
- (8) 関根 孝次, 一ノ宮 修, 丸山 晃市, “複合材サンドイッチ球形シェルの自由振動”, 日本機械学会北海道支部第37回講演会講演概要集, No.972-1, (1997), 13-14.