

複合材料から成る積層平板と偏平シェル  
の最適設計に関する研究

1998年3月

北海道工業大学大学院

趙 希禄

# 目 次

第1章 緒 論	1
1.1 本研究の目的と意義	1
1.2 従来の研究の概要	3
1.3 各章の概要	4
第2章 積層板の最適設計モデルと最適化手法	8
2.1 まえがき	8
2.2 最適化問題の基本概念	9
2.3 積層板の重量最小化設計モデル	12
2.4 積層板の静変形剛性の最大化設計モデル	14
2.5 積層板の基本振動数の最大化設計モデル	15
2.6 積層板の座屈荷重の最大化設計モデル	16
2.7 非線形数理計画問題の Kuhn-Tucker 条件	17
2.8 直接探索法のコンプレックス法	21
2.9 本章のまとめ	30
第3章 積層板の力学的解析の定式化	31
3.1 まえがき	31
3.2 積層板の形状と座標系	32
3.3 積層材料の構成方程式	33
3.4 積層板の剛性	39
3.5 積層板の運動方程式	40
3.6 積層板の弾性ひずみエネルギー	40
3.7 外力系の仕事	42
3.8 運動エネルギー	45
3.9 無次元量の導入	47

3. 10 本章のまとめ	56
第4章 一般的な積層長方形板の基本振動数の最大化設計	58
4. 1 まえがき	58
4. 2 解析モデルの設定	59
4. 3 振動解析法	60
4. 4 最適化アルゴリズム	65
4. 5 数値計算例	70
4. 6 本章のまとめ	92
第5章 支持点と繊維配向角を組合せた積層長方形板の基本振動数の最大化設計	93
5. 1 まえがき	93
5. 2 点支持を有する積層板の振動解析法	95
5. 3 最適化アルゴリズム	100
5. 4 数値計算例	107
5. 5 本章のまとめ	134
第6章 一般的な積層長方形板の座屈荷重の最大化設計	135
6. 1 まえがき	135
6. 2 座屈解析モデルの設定	136
6. 3 積層板の座屈解析法	137
6. 4 最適化アルゴリズム	140
6. 5 数値計算例	140
6. 6 本章のまとめ	152
第7章 一般的な積層長方形板の静変形剛性の最大化設計	153
7. 1 まえがき	153
7. 2 静変形解析モデルの設定	154
7. 3 積層板の静変形解析法	155
7. 4 最適化アルゴリズム	158
7. 5 数値計算例	158
7. 6 本章のまとめ	163

第8章 2レベル最適化法による振動数制約付き積層長方形板の最小重量設計	165
8.1 まえがき	165
8.2 最適化問題の設定	166
8.3 最適化アルゴリズム	168
8.4 数値計算例	172
8.5 本章のまとめ	177
第9章 積層偏平シェルの振動特性の最適設計	179
9.1 まえがき	179
9.2 積層偏平シェルの振動解析	180
9.3 最適化のモデル設定	187
9.4 感度解析と最適化アルゴリズム	188
9.5 数値計算例	192
9.6 本章のまとめ	198
第10章 結論	200
付録1. Graphite/Epoxy 材料8層正方形板の最適振動モード図	204
付録2. E-Glass/Epoxy 材料8層正方形板の最適振動モード図	211
付録3. 1点支持の3層 Graphite/Epoxy 正方形板の最適振動モード図	218
付録4. 2点支持の3層 Graphite/Epoxy 正方形板の最適振動モード図	225
参考文献	232
謝辞	239
著者の業績リスト	240

# 第1章 緒 論

## 1. 1 本研究の目的と意義

近年、数多くの社会的な要求に対応する機械の性能向上には目覚ましいものがあり、宇宙・航空機から自動車、ロボットや電子機器などに至る広い産業分野で、高速度化や高性能化などが急速に進められている。一方、省資源、省エネルギーあるいは生産コスト低減のための機械構造の軽量化も行なわれているが、その結果、機械構造の剛性低下による従来考えられなかった種々の問題が発生している。例えば、振動と騒音の問題、座屈問題や剛性不足による静変形の問題などがあり、これらの問題を解決するため多くの努力が払われている。その中でも、新しい構造材料の開発に多くの関心が寄せられている。このような機械構造の高性能化や軽量化を実現するために開発された材料が、現在、さまざま産業分野に使用されている複合材料 (Composite Materials) である。

この複合材料の中で、もっとも代表的なものはGFRPやCFRPなどの繊維強化プラスチック (Fiber Reinforced Plastics 以下FRPと称する) である。その中で、本研究で対象とするFRPは、ガラスやカーボンなどの長い繊維を強化材料として配列し、そのまわりをエポキシなどのプラスチック系樹脂を母材として固めたものである。

このFRPは、強化繊維に起因する強い異方性を持つ材料であるために、それらを用いた機械構造、とくにFRP積層構造の力学特性は、従来の等方性の金属材料を用いた場合と大きく異なる。そのゆえ、FRP積層構造物の固有振動数、座屈荷重値や静変形剛性などの力学特性を、設計開発段階から正確に把握することが重要となっている。さらに、機械構造の高性能化と軽量化の要求に対応し、複合材料のもつ異方性をより有効に利用するために、FRP構造物の積層数、積層順序、積層板厚および各層ラミナにおける繊維配向角などを設計変数とする最適設計問題についての研究は、最近非常に注目されている。

このような現状を踏まえて、本研究では、機械や構造物の重要な要素である薄肉の積層平板と積層偏平シェルの力学応答と設計問題に着目する。理論的な力学解析をすると共にその解析法と解析結果に基づいて積層平板と積層偏平シェルの最適設計法を提案し、また、積層平板と積層偏平シェルの最適積層構成を明らかにすることを目的とする。

まず、積層平板の振動、座屈と静変形問題に対して、種々の拘束条件、寸法比および積層構成を考慮した上で、その固有振動数、座屈荷重と静変形剛性の解析方法を検討する。さらに、各層ラミナにおける繊維配向角などを設計変数として導入し、基本振動数の最大化、座屈荷重の最大化、静変形剛性の最大化および振動特性制約条件付きの重量最小化などの最適化問題を設定して、また、固有値問題に起因する基本モードが自明でない問題を考慮したうえで、これらの最適化問題を計算するために直接最適化法のコンプレックス法 (Complex Method) を用いる。これにより、積層板の拘束条件、寸法比や積層ラミナの繊維配向角などから、その最適解に及ぼす影響についても詳細な検討を行なう。

次に、3次元曲率を有する対称積層の偏平シェルの振動問題を扱い、全周単純支持の境界条件を持つシェルの数理的な最適解を検討する。最適化の目的関数は積層偏平シェルの基本振動数の最大化とし、設計変数は各積層ラミナにおける繊維配向角とする。振動解析法は直接に対称積層の偏平シェルの運動方程式と境界条件を満足する厳密解を用いる。最適化法としては数理計画法の Kuhn-Tucker 最適性条件式を利用し、数理的に積層偏平シェルの基本振動数の最大化を与える最適な繊維配向角の公式を導く。

積層偏平シェルの自由振動では、曲率比、寸法比および積層繊維配向角の変化により、基本振動モードが異なる半波数の振動モードに遷移し、種々の  $x$ 、 $y$  軸に沿う半波数  $(m, n)$  をもつ振動モードが入替って基本振動モードとなる。こうした基本振動モードの自明でない問題、すなわち多峰性の特徴をもつ最適化問題に対して、大域的な最適解を求めるために、その最適解の存在するすべてのパターンを分類する必要がある。それぞれ最適解の存在するパターンを調べたうえで、直接に大域的な最適解を求める。

本研究を通して、理論面では、新しい積層板・シェル構造の最適化方法を提案し、最適な積層構成に関する理論を深める。実用面では、積層板・シェルの最適設計専用プログラムを開発し、また工業的に有用な多数の基礎設計データをまとめる。

## 1. 2 従来の研究の概要

1970年代以来、複合材料からなる積層平板・シェルに関する研究は非常に注目されており、その研究の結果は、数多くの著書、調査報告書や研究論文などにまとめられている。

特に、積層平板・シェルの力学特性の解析モデルとそれに関連する解析手法についての研究が大半を占めている<sup>(1)~(50)</sup>。文献(1)~(13)は、積層理論に基づく積層平板・シェルの力学解析に関する展望論文や著書などであり、その中では120編以上の文献を紹介している。さらに、積層平板の自由振動特性の解析<sup>(14)~(27)</sup>、外部から働く荷重による座屈特性の解析<sup>(28)~(33)</sup>と静変形特性の解析<sup>(34)~(35)</sup>など特定の問題に対する研究結果が多数発表されている。また、3次元の曲率に起因して問題が複雑になった積層シェルの解析についての研究結果も多数の文献から見られている<sup>(36)~(50)</sup>。これらの研究結果は、力学解析の延長線にある積層平板・シェルの最適設計に、極めて重要な研究基礎となっている。

1980年代からは一段と、材料特性が設計できる長所を持つFRP積層平板・シェルの最適設計に関する研究は、非常に進んでおり、数多くの研究結果が専門書、調査報告書や研究展望論文にまとめられている<sup>(51)~(60)</sup>。

積層平板の振動特性の最適設計においては、設計の目的関数は平板の最低次固有振動数（基本振動数）の最大化とし、設計変数は各層ラミナにおける繊維配向角または点支持位置とするのがほとんどである<sup>(61)~(63)</sup>。福永らは、積層横断面の厚さ方向に渡る積分された総合的な剛性効果を示す積層パラメータを用いた幾何学の図式設計法を利用して、対称積層長方形板の基本振動数の最大化を求めた<sup>(64)</sup>。成田らは支持位置により連続体の固有振動数の最適化の結果<sup>(65)</sup>、<sup>(66)</sup>を、藤掛らは片持ばりの支持位置と支持剛性を組合せた固有振動数の最適化の結果<sup>(67)</sup>を発表した。

積層平板の座屈特性の最適化においては、設計の目的関数は座屈荷重の最大化とし、設計変数は各層ラミナの繊維配向角とする研究<sup>(70)~(73)</sup>が最も多い。Haftkaらは、整数計画法による積層平板の座屈特性の最適化法<sup>(70)</sup>、<sup>(71)</sup>を発表した。佐藤ら是对称積層板の組合せ荷重下の座屈特性最適化の結果<sup>(72)</sup>を発表した。

積層平板の静変形特性の最適化においては、最適化の目的関数は板の剛性最大化とするが、板の剛性を示す最大変位点の位置は変わり易く自明でないため、一般的には剛性最大化と等価

する板に貯えた弾性ひずみエネルギーの最小化を求める。設計変数は各層ラミナの繊維配向角とする<sup>(74)~(76)</sup>。

また、積層シェル振動特性の最適化においても、多数の文献からその研究結果が見られている<sup>(77)~(82)</sup>。幾何学の3次元曲率からの影響により振動モードがかなり複雑となるため、成田らは積層シェルの最適化問題に用いる解析モデルの精度と適用性についての比較研究を行った<sup>(77)</sup>。福永は積層円筒シェルを対象して直交異方性積層材の剛性特性と最適化結果を発表した<sup>(78)</sup>。Mota Soaresは2レベル最適化法を用い薄肉積層板・シェル構造の最適化を求めた<sup>(79)</sup>。成田らは遺伝子アルゴリズムを用いアングルプライ対称積層偏平シェルの基本振動数の最大化結果を発表した<sup>(80)</sup>。

以上にまとめた文献の研究結果を調べると、主な問題点あるいは研究すべき点は下記の3つにまとめられる。

(1) 境界条件は、全周単純支持、固定や片持ちなどに限定されている。任意境界条件を組合せた最適化結果は見受けられない。

(2) 積層構成は、クロスプライや対称アングルプライなどに限定されている。非対称を含む一般的な積層構成を考慮した最適化結果は見受けられない。

(3) 最適化手法は、特定な問題にしか対応できない傾向があり、もっと一般的な問題に対応でき、計算効率が高い最適化アルゴリズムを確立することが必要である。

これらの問題を調べて解決するために、本論文の研究では、次節に示した課題と研究内容を設定した。

### 1.3 各章の概要

本論文は10章から構成されており、以下にその概要を述べる。

第2章では、まず最適化問題の概念と定義を述べたうえで、本論文で扱う積層板の基本振動数の最大化、積層板の座屈荷重の最大化、積層板の静変形剛性の最大化、振動数制約条件付き



の積層板の重量最小化などの最適化問題に対して、それぞれの最適設計の数学モデルを設定する。次に、最適化モデルに基づき、その最適解が存在する必要条件である Kuhn-Tucker 最適性条件や直接探索法のコンプレックス法などについて検討する。

第3章では、FRP積層板の力学解析のための定式化について考える。まず、積層板の構成式を示し、異方性弾性論により積層板の面内伸縮剛性、面外曲げ剛性、面内と面外の連成剛性などを求め、次にFRP積層板の運動方程式を求める。さらに、FRP積層板の弾性ひずみエネルギー、運動エネルギーおよび外力系への仕事の評価を行なう。これらの内容は、次の各章の力学解析への基本的な理論準備を与える。

第4章では、非対称積層も含む一般的な積層構成をもつ長方形板を扱う。まず、古典積層板理論に基づくリッツ法を用い、任意境界条件を考慮する積層長方形板の振動解析法を述べる。次に、積層板の振動特性最適化問題を設定する。その最適化の目的関数は積層長方形板の基本振動数の最大化とし、設計変数は各層ラミナの繊維配向角とする。最適化アルゴリズムにはコンプレックス法を適用する。数値例では、異方性の程度が異なる2種類の材料の積層板を扱い、自由、単純支持と固定の拘束を4辺に沿って種々に配した21通りの境界条件の8層板に対する最適な繊維配向角を求めた。そして各々の境界条件について最適解を与えた積層角度の力学的な意味について詳細な検討を行なう。

第5章では、性質が異なる複数の設計変数、ここでは積層長方形板の繊維配向角と支持点の位置を組合せた最適設計法を検討する。つまり、材料異方性を示す積層板の繊維配向角と平板内の位置によって大きく効果が変わる異なる設計変数を同時に調節することにより、基本振動数を最大化する状態に対応する最適なカップリング効果を示す組合せ解を求める。積層長方形板の境界条件は、4辺に自由、単純支持と固定の3種類の拘束条件を任意に組合せる。振動解析は弾性点支持を考慮するリッツ法を用い、最適化法は異なる性質の設計変数を同時に効果的に処理するために改良したコンプレックス法を適用する。数値例では、21種類の拘束条件の積層板に対して、異方性の程度が大きい Graphite/Epoxy 材料を積層して構成された正方形板を取上げ、それぞれ最適な点支持位置と繊維配向角の組合せを求めた。また、その最適解の力学的な意味を検討した。

第6章では、任意の境界条件を考慮した一般的な積層構成をもつ長方形板の座屈荷重の最大化設計問題を扱う。具体的には、非対称も含む一般的な積層構成をもつ長方形板に対して、板

の座屈荷重を最大化することを目的として、各積層ラミナにおける繊維配向角を最適化する。積層板の座屈解析は古典積層理論に基づくリッツ法を用い、最適化アルゴリズムはコンプレックス法を適用する。数値例では、異方性の程度が異なる2種類材料の積層板を扱い、外部荷重は一軸方向の様な分布荷重とし、4辺に沿った自由、単純支持と固定の拘束を種々に配した11通りの境界条件の8層板に関する最適な繊維配向角を求めた。そして各々の境界条件について最適解を与えた積層角度の力学的な意味についての検討を行なう。

第7章では、任意境界条件の組合せを考慮した一般的な積層構成をもつ長方形板の静変形剛性の最大化設計問題を扱う。しかし、自由辺を含む任意の境界条件を有する場合、板の最大変位の位置は自明でなく、また、設計変数の変化によりしばしば最大変位の位置が変わる。このため、最適化の目的は、平均的な剛性を示す外部仕事を目的関数として、その最大化を図る。設計変数は各積層ラミナがもつ繊維配向角とする。積層板の静変形解析には古典積層理論に基づくリッツ法を用い、最適化アルゴリズムはコンプレックス法を適用する。数値例では、異方性の程度が異なる2種類の材料の積層板を扱い、4辺に沿って自由、単純支持と固定の拘束を種々に配した17通りの境界条件を持つ8層板に関する最適な繊維配向角を求めた。

第8章では、任意境界条件を持つ一般的な積層構成の長方形板を対象にして、指定された基本振動数の制約条件付き積層板の最小重量設計問題を扱う、設計変数は板厚及び各積層ラミナの繊維配向角とする。振動解析法は第4章と同様に任意境界条件を考慮したリッツ法を用いる。最適化方法は2種類の設計変数の間に互いに連成効果が十分弱いことを考慮したうえで、2レベル最適化アルゴリズムを適用した。数値例では、異方性の程度が異なる2種類の積層板を扱い、4辺に沿った自由、単純支持と固定の拘束を種々に配した21通りの境界条件の8層板に対して、指定された基本振動数の制約条件を付けたうえで、それぞれ最適な繊維配向角と板厚を求めた。また、最適解に及ぼす境界条件などの影響についても検討した。

第9章では、積層シェルのうち比較的曲率の小さい偏平シェルの振動について最適化問題を考察する。このため全周に沿って単純支持され、中央面に関して対称に積層された偏平シェルの固有振動数の解を導く。次に各層の繊維配向角度を設計変数として導入し、積層シェルの基本振動数を目的関数とおき、その最大化を目的とする最適化問題を設定する。この問題に直接にKuhn-Tuckerの最適性の条件を適用して数理的に最適解を導くが、特に設計変数の変化により基本振動数が異なる半波数をもつ振動モード形へと遷移する場合にも対応可能な最適化ア

ルゴリズムを提案する。数値例では，アングルプライ対称積層の偏平シェルについて，その基本振動数を最大化する繊維配向角を求める。また，シェルの曲率が最適な繊維配向角に与える影響などについて考察した。

第10章は本論文の結論であり，各章で得られた成果を取りまとめる。

## 第2章 積層板の最適設計モデルと最適化手法

### 2.1 まえがき

FRP積層板から構成する構造物の構造設計においては、しばしば軽量化ということが目的となる。構造物の軽量化そのものが性能に大きく影響するので、古くから構造の重量を最小化する、いわゆる「最小重量設計」的な発想が注目され、構造や使用材料を含めて広範な観点から軽量化が試みられてきた。軽量化は、構造の性能向上のほかに、低コスト化、可搬性の向上、コンパクト化など多くの利点を生み出している。

しかし、構造の性能と軽量化は、いわば相反する関係にあるため、数々の問題点をも生み出している。すなわち、安易な軽量化は、各種の静的な荷重に対して構造の剛性や強度の不足を招き、また動的な荷重に対しても共振などの振動問題を誘起する危険性がある。従って、構造最適設計の目的は重量最小化だけでなく、静変形の剛性最大化や、座屈荷重最大化や、基本振動数最大化などがよく見られる。

一方、構造最適設計の場合に役立つ数理的最適化手法は、数学モデルとして設定した問題に対して、最適または最善の解を与える方法である。最適化手法の分類は、設計変数、目的関数と制約条件の記述の仕方ならびに解を求める方法によっていろいろに分類される。たとえば、目的関数と制約条件によって分ければ、線形最適化法と非線形最適化法；設計変数の種類によって分ければ、連続的変数最適化法と離散化変数最適化法；また、目的感度と制約条件感度を使うかどうかによって分ければ、直接探索法、最適基準法と数理計画法などがある。いずれの手法も目的関数、設計変数、制約条件など決定すべき量や関数のそれぞれの場合に対応して、適切な数学モデルを代表させ、その数学モデルの性質に応じて最適解を見いだすところが変わりはないと見られる。

したがって、最適化問題において、まず、設計変数、目的関数、制約条件などを数学モデル

に表現して、あとは、その最適化モデルの性質に適合した最適化手法を用い最適解を求めることが通例である。

一般的な構造最適化問題に対して、数理計画法はよく使われている。しかし、積層板の基本振動数の最大化設計や座屈荷重最大化設計のような、設計変数の変化に伴って固有モードが自明でない場合には、多峰性や異なる固有モードの交点（線）で感度計算不可能などの問題が生じてくる。そのような最適化問題に対しては、設計感度を使わず直接探索法などの最適化法を考えなければならない。

本章では、はじめに最適化問題の基本的な概念と定義を説明したうえで、本論文に扱う種々の積層板の重量最小化設計、静変形剛性最大化設計、座屈荷重最大化設計、基本振動数最大化設計など、最適化問題に対してそれぞれの最適設計の数学モデルを検討する。次に、最適化モデルに基づき、その最適解が存在するための必要条件である Kuhn-Tucker 条件や、直接探索法のコンプレックス法などについて検討する。

## 2. 2 最適化問題の基本概念

最適化問題の基本概念としては、設計変数、目的関数、制約条件などがあり、具体的な最適化問題の性質により、各用語の中身はかなり異なっている。ここでは、本論文に扱う各最適設計問題の最適化モデルの設定条件としての設計変数、目的関数と制約条件について説明する。

### [1] 設計変数

複合材料構造物の設計に際しては、いくつかの要素の決定が求められており、特にそれらを数量的に表現して、その値を決定するといった過程が多くの場合に採られる。最適設計問題では、設計案を決定する主な要素である未知のパラメータを設計変数と呼ぶ。数理的に表すと、 $n$  個の設計変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  は、1つのベクトル  $x$  で表現できる。

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad \dots \dots \dots (2-1)$$

本論文では、積層板の各最適化問題に対して、設計変数として次のようなものを主として扱う。

- (1) 積層板の各ラミナにおける繊維配向角  $\theta$ 。
- (2) 剛性を補強するため、板の横方向から加える支持点の位置  $x, y$ 。
- (3) 積層板の板厚  $h$ 。

次の各章において、積層板の最適化問題に関連する部分では、上記の三種類の設計変数を、単に独立な1組を採るか、または互いに組み合わせた2、3組を一緒に採るか、具体的な最適化問題によってそれぞれ決める。たとえば、第4章における一般的な積層構成をもつ積層長方形板の基本振動数の最大化設計問題に対して、積層構成の基本振動数への影響を考察するため、その設計変数は各層ラミナの繊維配向角とする。一方、第5章における点支持位置と繊維配向角を組み合わせた積層長方形板の基本振動数の最大化設計問題に関して、全体的な積層板の基本振動数を最大化させるために異なる2種類の影響要素の最適な組み合わせ値を求めるため、その設計変数は上記の(1)と(2)を同時に採っている。

## [2] 状態変数

複合材料構造物に静的あるいは動的な荷重が負荷されると、それに対応する変位や、座屈荷重や、固有振動数などが生じてくる。これらの量は一種の構造物の静的あるいは動的な応答に関する量と考えることができ、一般にはそれらを状態変数と総称する。

通常、状態変数は静的な平衡方程式、座屈荷重方程式および固有振動数方程式などを与え、境界条件の下で解くことによって求められる。ただし、それらの支配方程式の解である応答量を設計変数の陽な形で表現することは簡単な場合を除き一般には困難である。したがって、状態変数は一般に設計変数の陰関数として次式のように表現される。

$$g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \dots \dots \dots (2-2)$$

本論文で取り扱っている状態変数には、積層板の静変形たわみ、座屈荷重および基本振動数の3種類がある。具体的な問題により、特別な境界条件に対してその支配方程式が解ける場合に厳密な解析解として与え、一般的な境界条件に対してはエネルギー原理に基づくリッツ法を適用し、その状態変数を級数解として与える。

## [3] 制約条件

構造物に所定の安全性、有用性、機能を保持するために、設計変数や状態変数に課せられる

条件を制約条件と呼ぶ。一般には、制約条件は設計変数に直接に課せられる側面制約条件と呼ばれる条件と、状態変数に課せられる挙動制約条件と呼ばれるものがある。

一般に側面制約条件は設計変数の陽な形で表現でき、一方、挙動制約条件はほとんど設計変数の陰な形でしか表現されない。たとえば、積層板の各ラミナにおける繊維配向角の上限値と下限値で表される側面制約条件は設計変数に対する不等式の形で陽に表現できるが、基本振動数などの状態変数の制限で表される挙動制約条件が課せられている場合には、直接に設計変数を含む不等式などで陽に表現できず、必ず自由振動解析を行い、その解析結果の基本振動数とそれに対応する制限値の大小関係で、すなわち設計変数に関する陰な形の制約条件として表現されることが多い。

したがって、数理的に側面制約条件と挙動制約条件は、それぞれ

$$x_l \leq x \leq x_u \quad \dots \dots \dots (2-3)$$

$$g(x) \geq 0 \quad \dots \dots \dots (2-4)$$

と表される。ここで、 $x_l, x_u$  は側面制約条件の制限値であり、 $g(x)$  は状態変数で表す挙動制約条件である。

#### [4] 目的関数

通常、制約条件を満足する設計、すなわち許容設計は無限に存在するが、その中から設計者は1つの設計に決定しなければならない。目的関数はこのために導入された関数であり、費用関数や評価関数などと呼ばれることもある。この関数はより良い設計を選ぶための判断基準であり、その最小化あるいは最大化が目的とされ、一般には重量や状態変数などが多く採用されている。

目的関数は設計変数  $x$  の関数として

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \dots \dots \dots (2-5)$$

のように定義される。

本論文の各章に選ばれている目的関数とその最大化（または最小化）は下記のとおりである。

- (1) 重量（体積）の最小化
- (2) 静変形剛性の最大化
- (3) 基本振動数の最大化
- (4) 座屈荷重の最大化

### 2. 3 積層板の重量最小化設計モデル

構造物の最適設計において、同様な形状、寸法および性能要求を満足したうえで、より経済的な軽量化構造を追求することは、従来より自然な考え方として行われている。通常、板構造の重量最小化設計問題に対して、その設計変数は板厚や幾何学形状を表す境界点座標などとする。最近、複合材料からなる積層板の最適設計に関する研究は非常に活発であり、FRP積層板の方向性を考慮して材料特性が設計できることにより、従来の形状など幾何的な変数により得られた重量最小化の設計結果より、さらに板構造を軽量化することができることが注目されている。

一般的な構造重量の最小化問題は、幾何学の側面制約条件と最大たわみや基本振動数の制限など挙動制約条件付きの最適化問題として表される。無条件の重量最小化問題は一般に考えられない。その理由としては、制約条件なしの最小重量設計解は通常構造重量が0となり、現実には工学的な意味はないわけである。

したがって、積層板の最小重量設計問題を数理的に表現すると

$$\begin{aligned}
 &\text{Find } x = [h, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \\
 &\text{Minimize } W = f(x) \quad \dots \dots \dots (2-6) \\
 &\text{Subject to } x_{li} \leq x_i \leq x_{ui} \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \\
 &\quad \delta_{j1} \leq [\delta_{j1}] \quad j1 = 1, 2, \dots, m1 \\
 &\quad \Omega_{j2} \geq [\Omega_{j2}] \quad j2 = 1, 2, \dots, m2 \\
 &\quad \sigma_{j3} \geq [\sigma_{j3}] \quad j3 = 1, 2, \dots, m3
 \end{aligned}$$

で定式化される。ここでは、 $x = \{h, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$  は設計変数であり、積層板の各ラミナの織



維配向角と板厚を含む。 $W = f(x)$  は目的関数であり、一般に積層板重量とするが、ただし、積層板の形状、寸法と密度が一定とした場合、直接に目的関数を体積あるいは板厚と簡略化しても良い。 $x_{li}, x_{ui}$  は設計変数  $x_i$  に課せられる側面制約条件の下限と上限値である。 $\delta_{j1}, [\delta_{j1}]$  および  $m1$  はそれぞれ板の最大たわみ、上限値およびその個数である。 $\Omega_{j2}, [\Omega_{j2}]$  および  $m2$  はそれぞれ板の基本振動数、その下限値およびその個数である。 $\sigma_{j3}, [\sigma_{j3}]$  および  $m3$  はそれぞれ板の臨界座屈荷重、下限値およびその個数である。

一方、式(2-6)に示す積層板重量最小化設計問題において、設計変数の中に含まれている板厚  $h$  は直接に目的関数である板重量との間に陽な関係があり、他方、同様に設計変数としての繊維配向角は板重量との間に直接的な関係はあまりなく、ただ最適設計を行う際に、各層ラミナにおける繊維配向角を適当に調節することにより、各挙動制約条件で表される許容設計領域を変化させて、間接的に目的関数の板重量の変化にプラス影響を与える。

また、板厚と繊維配向角の2種類の異なる設計変数の間に連成効果がかかなり弱いことを利用して、実際に最適設計を行う時に、より良い計算効率と精度で、その最適解を求められる。そのためには、最適化問題(2-6)を2つのサブ最適化問題に分解して、2つのサブ最適化問題について別々にそのサブ最適解を求めることにより、全体的な最適化問題(2-6)の最適解を求める方法がよく使われる。具体的には、2段階に分けて最適設計を進める。まず、サブ最適化問題1にあたり、その最適設計の目的関数は式(2-6)の挙動制約条件に対応する状態変数の最大化(あるいは最小化)とし、その設計変数は繊維配向角だけを採用。こうして設定したサブ最適化問題1について求めた最適解に基づき、さらにサブ最適化問題2を設定する。最適化問題2では、目的関数は式(2-6)と同様に板重量とする。その設計変数は板厚だけを採用。各積層ラミナにおける繊維配向角にはサブ最適化問題1の解を一定にして使う。また、挙動制約条件は式(2-6)のまま課せられる。最後にサブ最適化問題2の解を求めることにより、全体的な重量最小化設計問題(2-6)の解を求める。

以上の考え方と方法は、2レベルアルゴリズムとも呼ばれる。この方法を積層板の重量最小化設計問題に適用して、多数の場合は、比較的速い速度で収束し、満足な最適解が求められる。本論文の第8章に扱う積層板の重量最小化設計問題に対して、この2レベルアルゴリズムを用い、任意境界条件をもつ積層板の重量最小解を求める。

## 2. 4 積層板の静変形剛性の最大化設計モデル

軽量化にともなう構造の剛性不足問題が生じることがよく見られる。これに対して、従来、補強リブなどの方法がよく使われているが、より軽く、比強度・比剛性が高い複合積層板についての研究が最近非常に進んでいる。特に各層ラミナにおける繊維配向角の組み合わせを適当に配することによる積層板の静変形の最大化設計が注目されている。

従来から積層板の最大剛性設計に関する研究文献もあったが<sup>(52)</sup>、対称積層や特定の境界条件に限定されてきた。本研究では、対称積層やアングルプライなどの制限のない非対称積層構成を扱い、種々の境界条件に対して、一般的な積層板の剛性最大化設計モデルを用いた。

一方、積層板の剛性最大化設計を数理的に表す目的関数については、従来、積層板の最大たわみを最小化することが多かったが、本研究で扱った任意境界条件をもつ非対称積層板の場合は、板の最大たわみ点が自明でなく、計算中に、設計変数である繊維配向角の変化にともなって積層板の最大たわみ点の位置がかなり変化する。したがって、剛性最大化設計の目的関数は積層板の全体的な剛性を示すパラメータとして外力の仕事を最小化する。その理由として、最適化計算の過程では、外部荷重がつねに設計変数（繊維配向角）の変化と無関係で一定と考えられるが、外力を最小化する結果、単に板の最大たわみを最小化させるだけでなく、積層板の全体的な剛性レベルを最小化することになる。

したがって、積層板の静変形剛性の最大化設計問題は数理的に

$$\begin{aligned} \text{Find } & \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T & \dots \dots \dots (2-7) \\ \text{Minimize } & W = f(\theta) = \int_A qw(\theta)dA \\ \text{Subject to } & -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

と定式化される。ここで、 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$  は設計変数であり、各層ラミナの繊維配向角とする。 $W = f(\theta) = \int_A qw(\theta)dA$  は目的関数の外部荷重の仕事である。 $q$  は外部荷重であり、 $w(\theta)$  は板のたわみである。 $-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$  は設計変数 $\theta_i$ に課せられる側面制約条件である。

本論文の第7章に扱う一般的な積層板の静変形剛性の最大化設計問題に対して、式(2-7)に示した積層板の静変形剛性の最大化設計モデルを適用する。

## 2. 5 積層板の基本振動数の最大化設計モデル

周期的荷重を受ける構造物では部材の共振による変形の増大が破損をもたらす。このため、板・シェルなど薄肉構造物では一般に基本振動数を高くするほうが望ましい。従来、積層板の基本振動数の最大化設計について多数の研究文献がある<sup>(52), (53)</sup>。しかし、対称積層や全周単純支持の境界条件など特定の条件に限定しており、また、寸法比や繊維配向角などの原因により、固有値計算に関わる基本振動モードが自明でない状態となっている。それゆえに、積層板の重量最小化設計や静変形剛性の最大化設計などの目的関数が明白である最適設計問題と比べ、積層板の基本振動数の最大化設計問題はかなり複雑となる。

通常、積層板の基本振動数の最大化設計の設計変数は、各層ラミナにおける繊維配向角とする。すなわち、材質、寸法や境界条件など一定な条件に対して繊維配向角を適当に調節することにより、全体的に基本振動数を最大化する積層構成を求める。一方、構造の薄肉化と軽量化に起因する振動問題への要求は非常に厳しく、積層板の基本振動数を高くするため、板の横方向に弾性点支持を加える方法がよく使われている。

本研究では、種々の境界条件の組み合わせを考慮した非対称積層構成を持つ積層板の基本振動数の最大化設計問題に対して、2つの最適設計モデルを設定する。

まず、第4章に扱う任意の境界条件における非対称を含む一般的な積層構成を持つ積層板の基本振動数の最大化設計問題に対して、単に種々の境界条件における積層板の最適な積層構成を考察するため、弾性支持点を無視し、各層ラミナの繊維配向角だけを設計変数とする。したがって、その最適化問題を数理的に表現すると

$$\begin{aligned} \text{Find } & \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \\ \text{Maximize } & \Omega = f(\theta) \quad \dots \dots \dots (2-8) \\ \text{Subject to } & -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

で表される。ここで、設計変数  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$  は各層ラミナの繊維配向角とする。そして各設計変数の間に対称積層やアングルプライなど制限がなく自由にそれぞれの値をとることに

より，一般的な積層構成として最適設計を行う。目的関数  $\Omega = f(\theta)$  は任意境界条件における積層板の基本振動数パラメータである。また，設計問題の性質により，各設計変数に側面制約条件，  $-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ, (i = 1, 2, \dots, n)$  を付ける。  $n$  は層の総数である。

次に，第5章で扱う支持点と繊維配向角を組合せた一般的な積層構成を持つ積層板の基本振動数の最大化設計問題に対して，主としては点支持と繊維配向角の異なる異方性を持つ設計要素の間に連成効果を生かして，もっと大きな基本振動数を有する積層構成を求めるため，複数の設計変数を同時に最適化する設計法を提案した。具体的には，境界条件の任意組合せを考慮したうえで，積層板の繊維配向角と点支持位置座標を同一の最適設計モデルに取り込み，同じ設計レベルで同時に最適化計算を行う。その最適設計問題は

$$\begin{aligned}
 &\text{Find } \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \\
 &\quad x = [x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m]^T \\
 &\text{Maximize } \Omega = f(\theta, x) \quad \dots \dots \dots (2-9) \\
 &\text{Subject to } -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 &\quad \quad \quad -a/2 \leq x_j \leq a/2 \\
 &\quad \quad \quad -b/2 \leq y_j \leq b/2 \quad j = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

で表される。ここで，  $n$  は積層ラミナの総層数，  $m$  は点支持の個数である。設計変数  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$  は各積層ラミナにおける繊維配向角であり，同じく設計変数  $x = [x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m]^T$  は支持点の位置座標である。目的関数  $\Omega = f(\theta, x)$  は任意境界条件の積層板の基本振動数パラメータとする。また，各設計変数に対して，それぞれ側面制約条件  $-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$ ，  $-a/2 \leq x_j \leq a/2$  と  $-b/2 \leq y_j \leq b/2$  が付けられている。

## 2. 6 積層板の座屈荷重の最大化設計モデル

機械構造物の軽量化に際して，比強度・比剛性に優れた繊維強化複合材料を使用する事例が多い。こうした複合材料構造物は航空宇宙分野によく見られるように，厳しい制限重量のため薄肉化されており，その座屈強度を十分に考慮することが重要である。

しかし、固有値計算を伴う積層板の座屈問題に対する最適設計の論文の件数は限られており、さらに過去の文献は全周単純支持や固定の境界条件を持つ積層板に限定され、任意境界まで考慮した積層板の座屈問題に対する最適設計の論文はほとんど見受けられない。

このような現状を踏まえて、本論文では任意の境界条件を考慮する一般的な積層構成を持つ積層板の座屈荷重の最大化設計問題を扱う。非対称積層も含む一般的な積層構成を持つ積層板において、その座屈荷重を最大化するように各積層ラミナにおける最適な繊維配向角分布を求める。

具体的には、一般的な積層構成を持つ積層板の座屈荷重の最大化設計問題は数理的に

$$\begin{aligned} \text{Find } & \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T && \dots \dots \dots (2-10) \\ \text{Maximize } & \lambda = f(\theta) \\ \text{Subject to } & -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ && i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

で表される。ここで、 $n$ は積層ラミナの総層数である。設計変数の $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ は各層ラミナの繊維配向角とする。目的関数の $\lambda = f(\theta)$ は座屈荷重である。また、最適化設計問題の性質により、各設計変数に側面制約条件 $-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$ を付ける。

本論文の第6章における種々の境界条件を考慮した一般的な積層構成を持つ積層板の座屈荷重の最大化設計問題に対して、式(2-10)に示した最適設計モデルを適用した。

## 2.7 非線形数理計画問題の Kuhn-Tucker 条件

まず、便宜上、前節の種々の最適化モデルをまとめて、下記の式で表す。

$$\begin{aligned} \text{Find } & x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \\ \text{Maximize } & W = f(x) && \dots \dots \dots (2-11) \\ \text{Subject to } & g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

これは代表的な不等式制約条件付き非線形数理計画問題である。ただし、目的関数 $W = f(x)$

は設計変数  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  の関数であり，設計変数  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  は  $n$  次元のベクトル変数であり，制約関数  $g(x)$  は  $m$  次元のベクトル関数である。

次に，式 (2-11) の不等式で表す制約条件にスラック変数  $s_j$  を付加することにより，Lagrange 乗数法を適用することができる。このため，変換制約条件  $h_j(x, s)$  を導入する。

$$h_j(x, s) = g_j(x) - s_j^2 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad \dots \dots (2-12)$$

ここで，もし， $s_j = 0$  ならば， $g_j(x) = 0$ ，それに対応する制約条件が臨界状態（あるいはアクティブ状態と呼ぶ）となる。他方， $s_j \neq 0$  ならば，制約条件  $g_j(x) \leq 0$  は満足される。ただし， $g_j(x) < 0$  の場合には，変換制約条件式 (2-12) は満足されない。

式 (2-12) を用い，Lagrange 乗数法を不等式制約条件付き最適設計問題式 (2-11) に適用すれば，下記の Lagrange 関数を得る。

$$L(x, s, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j [g_j(x) - s_j^2] \quad \dots \dots (2-13)$$

ここで， $\lambda_j$  は Lagrange 乗数である。Lagrange 関数  $L(x, s, \lambda)$  に関する停留条件は次の通りである。

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (2-14)$$

$$2\lambda_j s_j = 0 \quad \dots \dots (2-15)$$

$$g_j(x) - s_j^2 = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad \dots \dots (2-16)$$

式 (2-16) では， $g(x) \geq 0$  の制約条件を満足することを保証している。また，式 (2-15) は  $\lambda_j$  あるいは  $s_j$  のいずれかが 0 でなければならないことを示している。ここで， $s_j = 0$  の場合は制約条件が臨界状態つまりアクティブ ( $g_j(x) = 0$ ) となり，式 (2-14) の計算を行う時，制約条件  $j$  の影響を考えなければならないことを表している。式 (2-14) は，ア

クティブな制約条件の負感度  $-\Delta g_j(x)$  によって作られる部分空間の中に目的関数の感度  $\Delta f(x)$  が存在しなければならないことを示している。

式 (2-14) ~ 式 (2-16) は等価的に次のようになる。

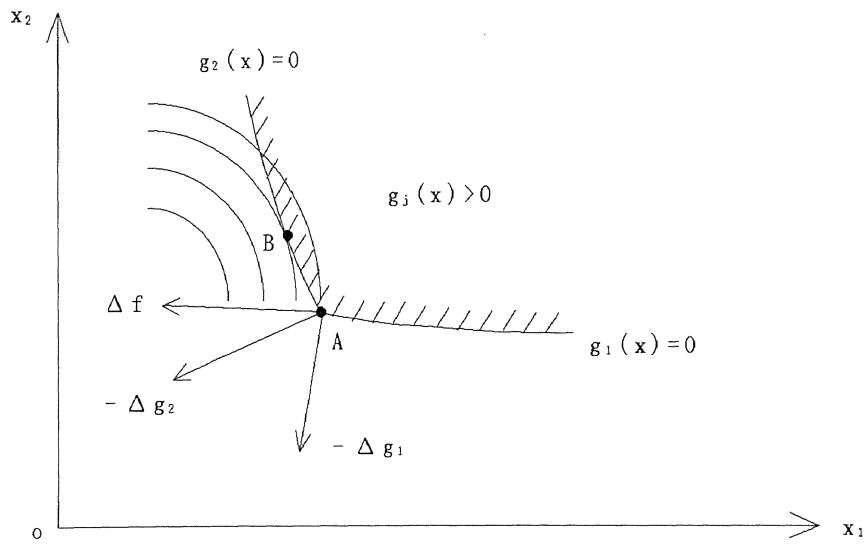
$$\begin{aligned} \Delta f(x) + \lambda \Delta g(x) &= 0 \\ \lambda g(x) &= 0 \quad \dots \dots \dots (2-17) \\ \lambda \geq 0, \quad g(x) &\geq 0 \end{aligned}$$

この式は、ある与えられた点が最適点であるかどうかを判別する規準式となり、通常 Kuhn-Tucker 条件式と呼ばれる。一般には、Kuhn-Tucker 条件式はある点が局所的な最大点であるための必要条件であるが十分条件ではない。ただし、凸数理計画問題においては、Kuhn-Tucker 条件式は大域的な最適点に対する必要十分条件となる。

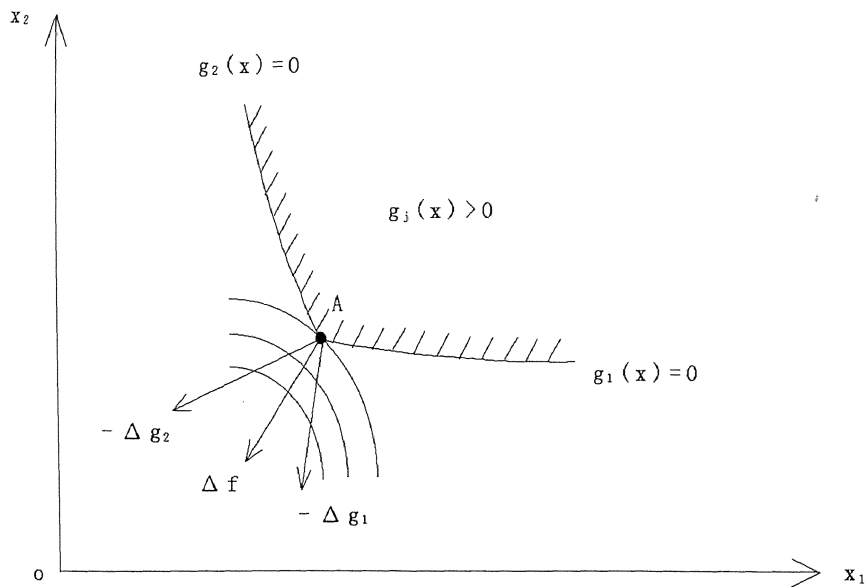
2次元空間における Kuhn-Tucker 条件式の幾何学的な解釈を図2-1のように示す。図2-1 (a)の場合、 $\Delta f(x)$  は  $-\Delta g_j(x)$  によって形成される凸錐の中に含まれてない。すなわち、 $\Delta f(x)$  は  $-\Delta g_j(x)$  の1次結合として表すための非負の乗数  $\lambda_j$  を求めることができないので Kuhn-Tucker 条件式も満足してない。図2-1 (a)に示すように、着目点 A から目的関数  $f(x)$  は制約条件を違反せずに増加させることができるので、(たとえば、点 A から点 B に移動する)、着目点 A は最適点ではないと判断できる。

一方、図2-1 (b)の場合には、 $\Delta f(x)$  は  $-\Delta g_j(x)$  によって形成される凸錐の中に存在しており、許容領域において目的関数  $f(x)$  をさらに増加させるように点を移動させることができない。また、 $\Delta f(x)$  は  $-\Delta g_j(x)$  の1次結合として表すための非負の乗数  $\lambda_j$  を求めることができる。したがって、着目点 A は Kuhn-Tucker 条件式を満足しており最適点となっている。

Kuhn-Tucker 条件式は大部分の非線形計画問題において、その最適点が満たさなければならない条件である。この条件は次の事実の属性となっている。「制約条件付き最適設計問題の最適点においては、すべての許容方向に沿って設計変数のどのような微小変化も目的関数を改良することはない」。



(a) 満足していない例



(b) 満足している例

図2-1 Kuhn-Tucker条件の幾何学意味



一方、微小方向ベクトルが制約条件を違反しないような方向を許容方向という。 $n$ 次元の設計空間において、すべての許容方向はアクティブの制約条件式の接平面が形成する錐体の中にある。また、目的関数の法線ベクトル $\Delta f(x)$ は目的関数 $f(x)$ がもっとも急速に増加する方向を示し、ベクトル $\Delta f(x)$ と $90^\circ$ 以内の角度にある方向はすべて目的関数 $f(x)$ が増加する方向である。それゆえ、最適点においては、ベクトル $\Delta f(x)$ と $90^\circ$ 以内の角度をなすような許容方向はありえない。また、ある点が不等式制約条件付き最適解であるための必要条件はベクトル $\Delta f(x)$ が制約条件式の負方向の法線ベクトル $-\Delta g_j(x)$ によって形成される錐体の内部にあることである。

本論文の第9章における積層偏平シェルの基本振動数の最大化設計問題に対して、全周単純支持の境界条件における基本振動数の解析解が求められることに基づいて、さらに Kuhn-Tucker 条件式を適用して、数理的にその最適解、すなわち各層ラミナの最適な繊維配向角の計算式を導いた。

## 2. 8 直接探索法のコンプレックス法

本論文に扱った積層平板の基本振動数の最大化設計、座屈荷重の最大化設計など、目的関数値が固有値計算によって決められる最適化問題に対して、固有モードが自明でないことに起因する最適化問題は感度不連続などの現象が生じてくるので、前節に説明した Kuhn-Tucker 条件式に基づく数理計画法はほとんど利用できない。この種の最適化問題には、もっと一般的な最適化アルゴリズムを適用する必要がある。

一方、直接探索法は試行解を繰り返し検査することを基礎においたものであり、それらの試行解を簡単な方法で比較することによって、つぎの探索への行先を与える方法である。これらの方法では、与えた点において関数の評価ができさえすればよいので、連続関数は一般に応用することができる。

本研究の積層板の最適設計問題では、最適化問題の性質により直接探索法のシンプレックス法(Simplex Method)から拡張したコンプレックス法(Complex Method)を適用した。

シンプレックス法では、シンプレックスと呼ばれる幾何学的な図形が主な役割を果たす。シ

ンプレックスの各頂点での関数値を比較することにより、ンプレックスは徐々に最適解に向かって動くように形をかえてゆき、最後には形を縮小して最適解に収束する<sup>(59)</sup>,<sup>(60)</sup>。

一般的な最適化問題は下記のように表現される。

$$\begin{aligned}
 &\text{Find } x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \\
 &\text{Maximize } W = f(x) \quad \dots \dots \dots (2-18) \\
 &\text{Subject to } a_i \leq x_i \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 &\quad \quad \quad g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

ここで、 $a_i \leq x_i \leq b_i$ は側面制約条件であり、 $a_i, b_i$ は設計変数 $x_i$ の限界値である。 $g_j(x) \geq 0$ は状態制約条件である。

$n$ 次元空間の $n+1$ 個の点の集合はンプレックスを形成する。それらの点の距離が等しい時、そのンプレックスは規準形という。たとえば、 $n=2$ の場合にはその規準形のンプレックスは正3角形であり、 $n=3$ の場合にはその規準形のンプレックスは正4面体である。

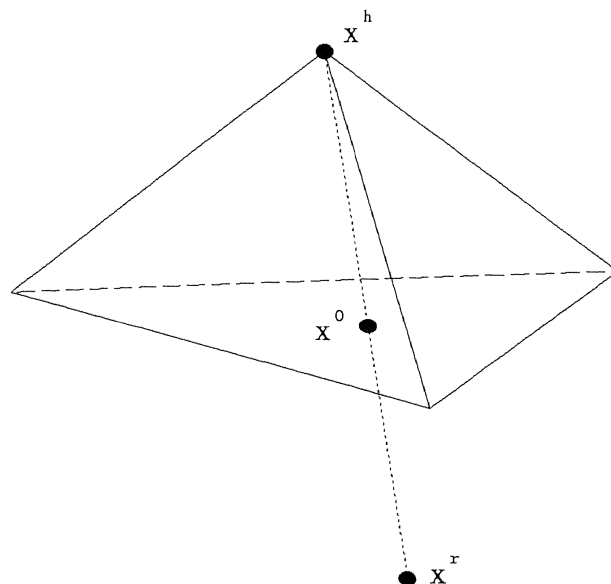


図2-2 3次元の場合の鏡像点 $x^r$

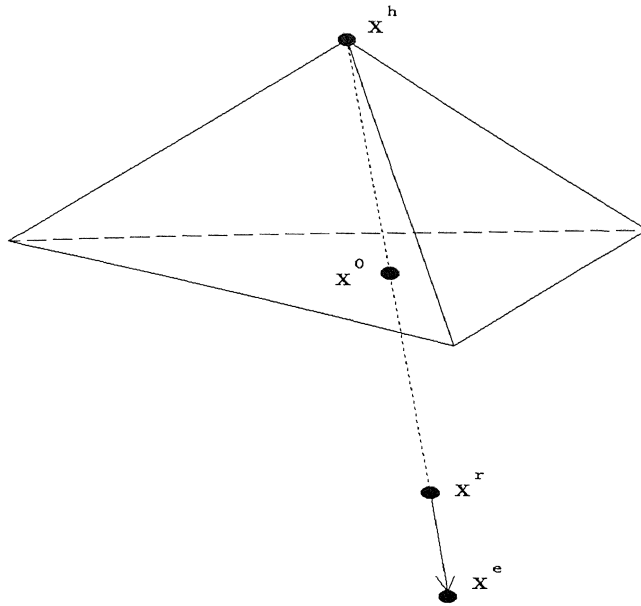


図2-3 3次元の場合の拡張点  $x^e$

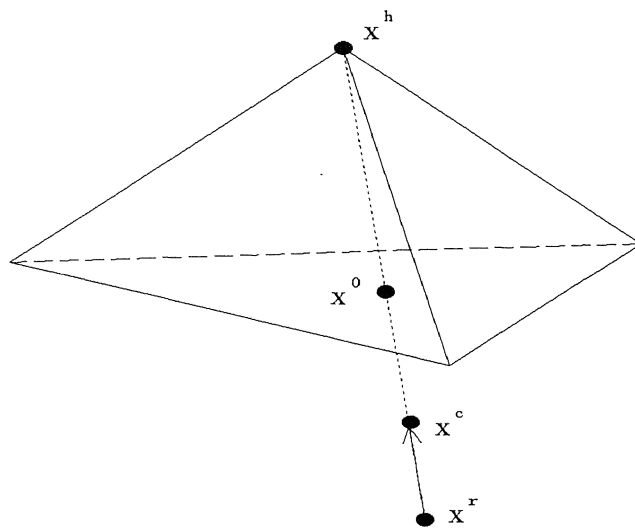


図2-4 3次元の場合の収縮点  $x^c$

シンプレックス法の考え方の中心は、シンプレックスの1点の、残りの点で張られる超平面に関する鏡像をとること（図2-2に参照）によって、新しいシンプレックスを容易に形成することができる点である。すなわち、シンプレックスの頂点の中で、目的関数をもっとも小さいものに対応する点 $x^h$ を選べば、その鏡像の点 $x^r$ における目的関数値は大きくなるであろうと期待できる。この期待が正しいであれば、このプロセスを続けることによって、シンプレックスを全体的に最大点に近づけることができると考えられる。

また、目的関数の局所的な性質に応じて、より速く最大点に収束するように、鏡像操作に基づく拡張（拡張点 $x^e$ ）と収縮（収縮点 $x^c$ ）の2種類の探索操作を取り込む。すなわち、これらの操作を続けるのに伴い、シンプレックスの大きさと形もたえず変える。ここで、拡張と収縮については、図2-3と図2-4および次に説明するシンプレックスの各特性頂点の定義を参照する。

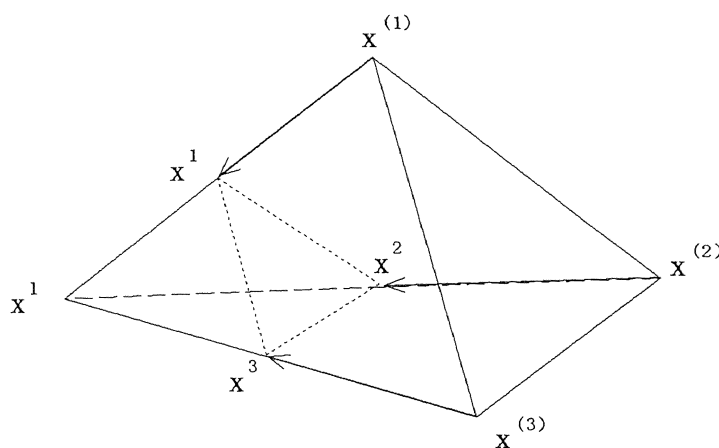


図2-5 3次元の場合の縮小点 $x^i$  ( $i=1,2,3$ )

一方、シンプレックス探索を行う途中で、以上の3種の操作にすべて失敗した場合、シンプレックスを全体的にもっとも大きい点 $x^l$ の方向へ縮小する操作を加える必要がある。ここで、縮小については、図2-5と次に説明するシンプレックスの縮小点 $x^i$  ( $i=1,2,\dots,k ; i \neq l$ )

の定義を参照する。

さらに、より安定な探索プロセスを続けるため、シンプレックス法に基づき、変形した方法としてコンプレックス法を適用する。シンプレックス法が $n+1$ 個の頂点を使うのに対して、 $k$ 個 ( $k > n+1$ ) の頂点を持つ、規準形でないコンプレックスを用いる。一方、 $k = n+1$ の頂点を持つシンプレックスを用いると、とくに制約条件に近づけた場合、それに平行な部分空間から抜け出せなくなる傾向がある<sup>(59), (60)</sup>。すなわち、制約条件に平行な超平面に陥って動けなくなる。それゆえ、一般にはコンプレックス法を使ったほうが良いと考える。

以上の考え方と方法をまとめて、数理的に説明するため、まず、コンプレックスの各頂点を $x^i (i = 1, 2, \dots, k)$ とし、次の記号と操作を定義する。

1. 最小点 $x^h$ はコンプレックスの各頂点での、目的関数をもっとも小さい点である。

$$x^h = \left\{ x \mid f(x) = \text{Min} [f(x^i), i = 1, 2, \dots, k] \right\} \quad \dots \quad (2-19)$$

2. 次小点 $x^s$ はコンプレックスの各頂点の中に、最小点 $x^h$ を除いた残る頂点の中に目的関数をもっとも小さい点である。

$$x^s = \left\{ x \mid f(x) = \text{Min} [f(x^i), i = 1, 2, \dots, k, i \neq h] \right\} \quad \dots \quad (2-20)$$

3. 最大点 $x^l$ はコンプレックスの各頂点での、目的関数をもっとも大きい点である。

$$x^l = \left\{ x \mid f(x) = \text{Max} [f(x^i), i = 1, 2, \dots, k] \right\} \quad \dots \quad (2-21)$$

4. 鏡像図心 $x^0$ は最小点 $x^h$ を除いた残る頂点の図心である。

$$x^0 = \frac{1}{k-1} \left( \sum_{i=1}^k x^i - x^h \right) \quad \dots \quad (2-22)$$

5. 鏡像点 $x^r$ は最小点 $x^h$ の鏡像図心 $x^0$ に関する鏡像点である。

$$x^r = (1.0 + \alpha)x^0 - \alpha x^h \quad \dots \dots \dots (2-23)$$

ここで、 $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) は鏡像係数といわれ、鏡像点と図心の距離  $|x^r x^0|$  および最小点と図心の  $|x^h x^0|$  の比である。

$$\alpha = \frac{|x^r x^0|}{|x^h x^0|} \quad \dots \dots \dots (2-24)$$

一般には、 $0.5 \leq \alpha \leq 1.5$  とする。

6. 拡張点  $x^e$  は鏡像点  $x^r$  の方向に沿って、その点を越えて試行点をさらに移動する点である。

$$x^e = \gamma x^r + (1.0 - \gamma)x^0 \quad \dots \dots \dots (2-25)$$

ここで、 $\gamma$  ( $\gamma \geq 1$ ) は拡張係数といわれ、拡張点と図心の距離  $|x^e x^0|$  および鏡像点と図心の  $|x^r x^0|$  の比である。

$$\gamma = \frac{|x^e x^0|}{|x^r x^0|} \quad \dots \dots \dots (2-26)$$

一般には、 $1 \leq \gamma \leq 3$  とする。

7. 収縮点  $x^c$  は鏡像点  $x^r$  の方向に沿って、その点から鏡像図心  $x^0$  に向かい収縮点である。

$$x^c = \beta x^h + (1.0 - \beta)x^0 \quad \dots \dots \dots (2-27)$$

ここで、 $\beta$  ( $\beta > 0$ ) は収縮係数といわれ、収縮点と図心の距離  $|x^c x^0|$  および最小点と図心の  $|x^h x^0|$  の比である。

$$\beta = \frac{|x^c x^0|}{|x^h x^0|} \dots \dots \dots (2-28)$$

一般には、 $0 < \beta < 1.0$ とする。

8. 縮小点  $x^i$  ( $i = 1, 2, \dots, k; i \neq h$ )はコンプレックスの各頂点より、最大点  $x^l$ に半分近づける点である。結局、コンプレックスは全体的に最大点  $x^l$ に縮小する。

$$x^i = \frac{1}{2}(x^i + x^l) \quad i = 1, 2, \dots, k; i \neq h$$

\dots \dots \dots (2-29)

以上に述べたように、コンプレックス方法では、最大点へ向かってコンプレックスが移動し、収縮し、縮小していくと考えられ、これらの探索プロセスは次の順序で行われる。

1. 最初のコンプレックスを作り、各頂点での目的関数  $f(x^i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ )を求める。
2. 各頂点での目的関数を比較して、コンプレックスの最小点  $x^h$ 、次小点  $x^s$ 、最大点  $x^l$ および鏡像図心  $x^0$ を計算する。
3. 鏡像操作を行い、鏡像点  $x^r$ とそれに対応する目的関数  $f(x^r)$ を求める。
4. コンプレックスの最大点  $x^l$ 、次小点  $x^s$ と鏡像点  $x^r$ での目的関数を比較して、その結果としては3つの可能性があり、それに対応する操作をそれぞれ手順5, 6, 7に飛ばす。
5.  $f(x^s) \leq f(x^r) \leq f(x^l)$ となる場合は、鏡像点  $x^r$ での目的関数  $f(x^r)$ が、次小点  $x^s$ より大きい、最大点  $x^l$ より小さい。これは通常のコンプレックス操作ケースにあたり、鏡像点  $x^r$ を最小点  $x^h$ に置き換えて、手順2に飛ばして、新しく作られたコンプレックスについて探索操作を再開する。
6.  $f(x^r) > f(x^l)$ の場合は、鏡像点  $x^r$ の方向へ試行点をさらに移動することにより、より大きな目的関数値が得られると期待される。そこで、新しく作られたコンプレックスを鏡像点  $x^r$ の方向に沿って拡張してみて、得られた拡張点  $x^e$ を鏡像点  $x^r$ と比較し、 $f(x^r) < f(x^e)$ であれば、成功であったと考え、拡張点  $x^e$ を鏡像点  $x^r$ に置き換える。失敗の場合は鏡像点  $x^r$ を最小点  $x^h$ に置き換える。いずれにしても、こうして作られた新し

いコンプレックスに対して、手順2に飛ばし探索手続きを再開する。

7.  $f(x^r) < f(x^s)$  の場合は、鏡像点  $x^r$  は次回に新しく作られたコンプレックスの最小点になることで、今回の鏡像探索が失敗したと考える。そこで、鏡像点  $x^r$  から鏡像図心  $x^0$  に向かって収縮を行う。この収縮操作を行ったあと、収縮点  $x^c$  での目的関数  $f(x^c)$  と次小点  $x^s$  での目的関数  $f(x^s)$  を比較してみて、 $f(x^c) > f(x^s)$  であれば、収縮は成功したわけで、収縮点  $x^c$  を鏡像点  $x^r$  に置き換えて、新しいコンプレックスについて手順2に飛ばし探索手続きを再開する。一方、失敗の場合は、すなわち  $f(x^c) \leq f(x^s)$  になったときは、コンプレックスを全体的に最大点  $x^l$  の方向へ縮小操作を行う。そのあとは新しいコンプレックスについて手順2に飛ばし探索手続きを始める。

一方、コンプレックス探索の収束規準は

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [f(x_i) - W_0]^2 < \varepsilon \quad \dots \dots \dots (2-30)$$

$$W_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f(x_j)$$

とする。ここでは、 $W_0$  はコンプレックスの各頂点での目的関数値の平均値であり、 $\varepsilon$  はあらかじめ決められた小さな数である。つまり、コンプレックスは十分に縮小して、徐々に点に近づけたら収束することになると考える。

また、最初のコンプレックスを作るためには、まず、すべての制約条件を満足する点が1つ与える。残りの  $k-1$  個の点は、次式によって定めることができる。

$$x_i = \alpha_i + \gamma_i (b_i - a_i) \quad \dots \dots \dots (2-31)$$

ここでは、 $\gamma_i$  は  $[0, 1]$  の区間で一様な模擬乱数であり、 $a_i, b_i$  は設計変数  $x_i$  に課せられる側面制約条件の下限値と上限値である。もし、式(2-31)で作られた点が制約条件を満足しない場合は、その点をすでに制約条件を満足している頂点の図心の方向へ動かせば、最終的には許容的な頂点が見い出せる。



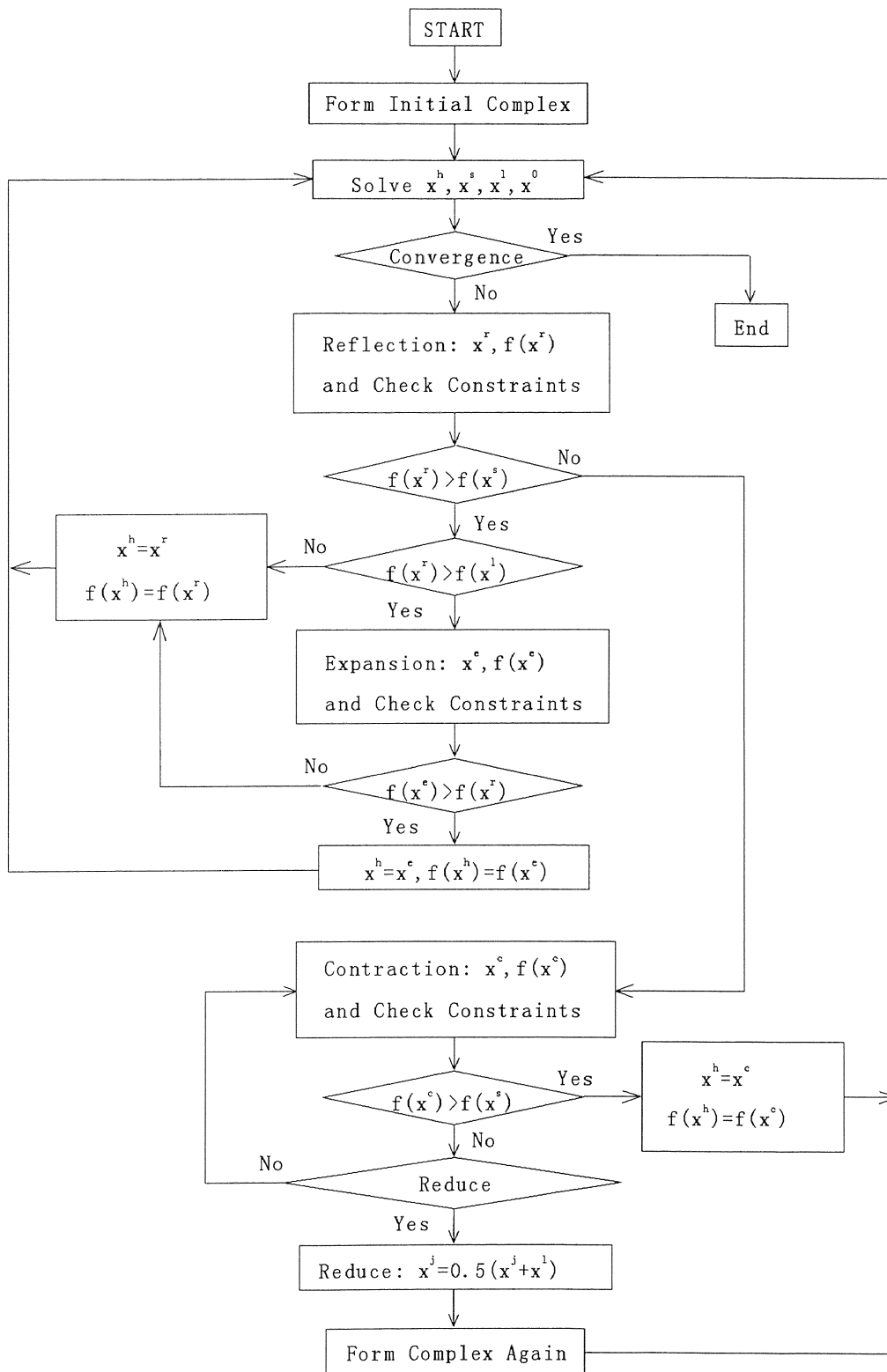


図2-6 コンプレックス法の計算流れ

他方、最適化問題の許容区域がある程度分かっている場合は、コンプレックスの $k$ 個の頂点をあらかじめ与えても良い。本論文で扱った積層板の最適設計問題に対して、設計変数として表している各層ラミナの繊維配向角と点支持位置座標など、その変化領域はほとんど明白であり、したがって、それらの最適化問題に対してコンプレックス法を適用するとき、より高い計算効率で速く収束するように最初のコンプレックスをあらかじめ入力データとして与える。

一方、コンプレックス探索操作を行う途中で、新しい試行点が制約条件に違反すれば、その試行点を適当に調節する必要がある。側面制約条件に違反するとき、その側面制約条件に対応する限界値に置き換える。状態制約条件に違反するとき、試行点を残り点の図心の方向へ移動する。このようにして、制約条件を満足する点が見つけられる。

以上の方法に基づいて、図2-5に示すようにコンプレックス法の計算流れがまとめられる。

## 2-9 本章のまとめ

本研究に扱う種々の積層板に関する最適設計問題に対して、それぞれの目的関数、設計変数および制約条件について詳細な検討を行ったうえで、各最適設計問題のモデルを数理的に与えた。それらのモデルを要約すると、次のようにまとめられる。

1. 積層板の重量最小化設計モデル (式2-6)
2. 積層板の静変形剛性の最大化設計モデル (式2-7)
3. 積層板の基本振動数の最大化設計モデル (式2-8, 式2-9)
4. 積層板の座屈荷重の最大化設計モデル (式2-10)

また、最適化アルゴリズムについて検討した。目的関数の性質が明白であり、数理的な解析解が存在する最適化問題に対しては、直接最適性条件 Kuhn-Tucker 条件式を適用する。一方、数理的な解析解が存在しない最適化問題に対して、直接探索法のコンプレックス法を適用するために、この2種の最適化問題に関連する Kuhn-Tucker 条件式とコンプレックス法について、詳細な検討を行った。本章の内容は次の各章の最適化問題の解析には重要な理論的基礎となっている。

## 第3章 積層板の力学的解析の定式化

### 3.1 まえがき

本研究で扱う FRP 積層板は、プラスチック系の母材（マトリックス）中に強化材として連続繊維を一方向に配列した繊維強化複合材料の一つである。その FRP 積層ラミナは基本的に直交異方性材料であり、これを適当に積層配向することにより、所要の方向に所要の特性を与えることができる。したがって、FRP 積層材料は、各積層ラミナの繊維配向角、厚さ、積層数、積層順序などで示される積層構成の違いにより異なる材料特性を有する。

本研究の積層板の力学解析において、FRP ラミナからなる積層板は材料特性が異なるいくつかの異方性弾性層を重ねて構成し、また各層の弾性主軸方向が異なっているため、以下の仮定を用いる。

各積層ラミナの接着は完全であり、ラミナとラミナは互いに相対すべりおよびはく離は生じないとする。また、積層板の厚さは他の寸法に比べ小さく、面外方向のせん断応力は他の応力成分に比べ微小であり無視する。さらに、変位、回転角度およびひずみは微小（線形解析）と仮定する。

したがって、FRP 積層板は、繊維と母材の平均的な特性を持つと仮定する巨視力学により、異方性をもつ均質な連続体として異方性弾性論により解析が可能となる。

本章では、工業分野で多く用いられている積層長方形板について考える。まず、FRP 積層板の構成式を示し、異方性弾性論により FRP 積層板の面内伸縮剛性、面内と面外の連成（カップリング）剛性、面外曲げ剛性を求め、よって FRP 積層板の運動方程式を求め、さらに、FRP 積層板の弾性ひずみエネルギー、外力のなす系への仕事および運動エネルギーの評価を行う。本章の内容は次の各章の力学解析に基本的な理論準備を用意する。

### 3.2 積層板の形状と座標系

本章で考える FRP 積層板の形状は、工業分野でよく見られている長方形積層板である。積層長方形板の座標系と境界条件を図3-1（図に示したのは板の中央面のみである）に示す。板の  $x$ 、 $y$  軸方向の辺長を  $a$ 、 $b$  とし、板の厚さを  $h$  とする。座標系  $o-xyz$  の原点  $o$  を板の中心にとる。4 辺における拘束条件は自由、単純支持、固定の 3 種類（以降、それぞれ F、S、C の記号により表す）を各辺毎に独立に選択することにする。表記の順序は、 $x = -a/2$ 、 $y = -b/2$ 、 $x = a/2$ 、 $y = b/2$  の辺の順に対応させて表す。例えば、図3-1に示す境界条件は、固定-単純支持-自由-自由であるが、それを CSFF と表す。

図3-2は、積層長方形板の (a)  $x$  軸に沿った厚さ方向の断面図と (b) 第  $k$  層ラミナの平面図を示す。板の中央面から第  $k$  層ラミナの上面、下面までの距離をそれぞれ  $z_k$ 、 $z_{k-1}$  ( $k=1,2,\dots,N$ 、 $N$  は層数である) とする。この第  $k$  層の繊維方向および平面内の直角方向に、それぞれ材料主軸となる 1 軸、2 軸をとり、 $x$  軸と 1 軸のなす角度を繊維配向角  $\theta_k$  とする。なお、積層順序に対称積層やアングルプライ等の制限は加えず、一般的な積層構成とする。

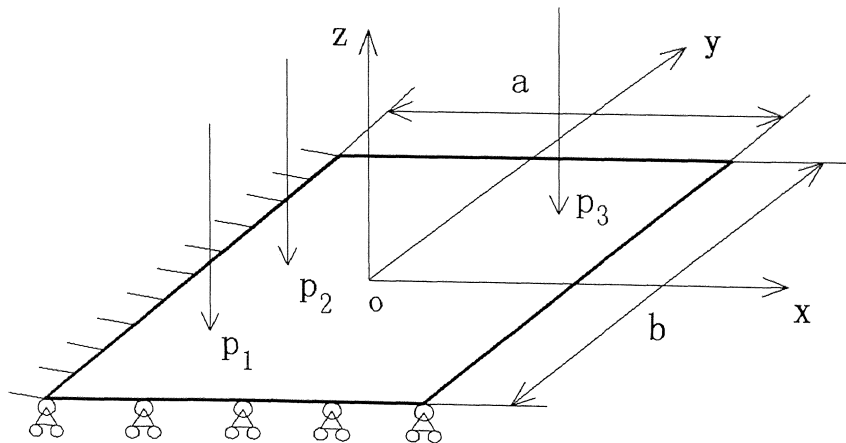
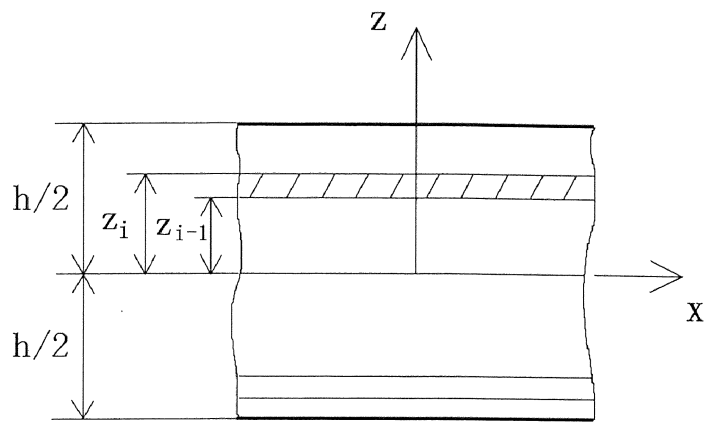
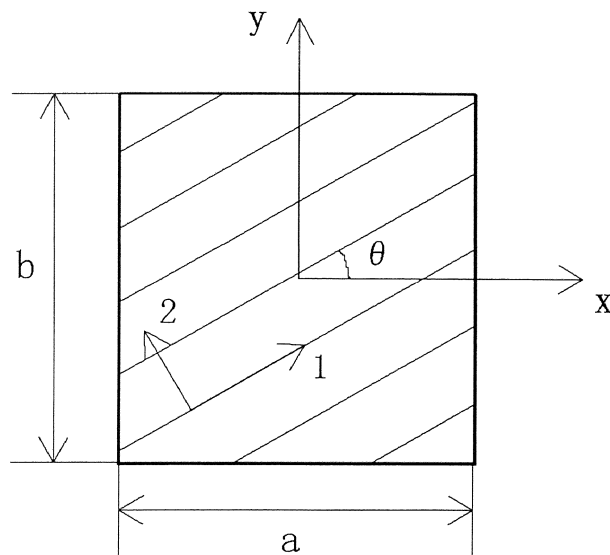


図3-1 積層長方形板（中央面）と座標系



(a)



(b)

図3-2 積層構成. (a) 横断面, (b) 第 $k$ 層ラミナ

### 3.3 積層材料の構成方程式

図3-2 (b) に示す弾性主軸が互いに直交しており、直交異方性を有するものとする。したがって、異方性弾性理論により、第 $k$ 層ラミナの応力-ひずみ関係式は下記のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad \dots \dots \quad (3-1)$$

$$\{\sigma\}^{(k)} = [Q]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)}$$

ここで、剛性マトリックスの係数  $Q_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) は

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad \dots \dots \quad (3-2)$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

で与えられる。ここで、 $E_1$ 、 $E_2$  は材料主軸方向（1軸および2軸）の縦弾性係数、 $G_{12}$  は1軸と2軸の間の角度変化に関連するせん断弾性係数、 $\nu_{12}$ 、 $\nu_{21}$  はポアソン比を表す。

図3-2 (b) に示したとおり弾性主軸を用いる座標  $o-12$  は第  $k$  層ラミナの局所座標系である。積層板の全体的な剛性を検討するために大域座標系  $o-xyz$  に座標変換する必要がある。

したがって、式 (3-1) は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad \dots \quad (3-3)$$

$$\{\bar{\sigma}\}^{(k)} = [\bar{Q}]^{(k)} \{\bar{\varepsilon}\}^{(k)}$$

と表される。ここで、剛性マトリックス  $[\bar{Q}]^{(k)}$  は

$$[\bar{Q}]^{(k)} = [T]^T [Q]^{(k)} [T] \quad \dots \dots \dots (3-4)$$

で与えられる。また、座標変換マトリックス  $[T]$  は

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & 2 \sin \theta_k \cos \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -2 \sin \theta_k \cos \theta_k \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta_k \cos \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \quad \dots \dots (3-5)$$

で与えられる。式 (3-5) を式 (3-4) に代入し整理すると、剛性マトリックス  $[\bar{Q}]^{(k)}$  の係数  $\bar{Q}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \sin^4 \theta_k \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{22} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{11} \sin^4 \theta_k \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12} (\cos^4 \theta_k + \sin^4 \theta_k) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta_k \sin \theta_k - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta_k \sin^3 \theta_k - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta_k \sin \theta_k \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + Q_{66} (\cos^4 \theta_k + \sin^4 \theta_k) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (3-6)$$

ここで、記号の  $l = \cos \theta_k$  ,  $m = \sin \theta_k$  を用いて、上式 (3-6) をマトリックスの形に書き直すと

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} l^4 & m^4 & 2l^2m^2 & 4l^2m^2 \\ m^4 & l^4 & 2l^2m^2 & 4l^2m^2 \\ l^2m^2 & l^2m^2 & l^4 + m^4 & -4l^2m^2 \\ l^3m & -lm^3 & lm^3 - l^3m & 2(lm^3 - l^3m) \\ lm^3 & -l^3m & l^3m - lm^3 & 2(l^3m - lm^3) \\ l^2m^2 & l^2m^2 & -2l^2m^2 & (l^2 - m^2)^2 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix} \dots \quad (3-7)$$

となる。

一方、剛性係数  $\bar{Q}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) の計算の便宜上、次のような繊維配向角  $\theta_k$  と関係ない剛性不変量を導入する。

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\ U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}) \\ U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \quad \dots \dots \dots (3-8) \\ U_5 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \end{aligned}$$

これらの剛性不変量を用い、式 (3-6) に示す剛性係数は

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta_k + U_3 \cos 4\theta_k \\ \bar{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta_k + U_3 \cos 4\theta_k \\ \bar{Q}_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta_k \\ \bar{Q}_{16} &= \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta_k + U_3 \sin 4\theta_k \quad \dots \dots \dots (3-9) \end{aligned}$$



$$\bar{Q}_{26} = \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta_k - U_3 \sin 4\theta_k$$

$$\bar{Q}_{66} = U_5 - U_3 \cos 4\theta_k$$

と表される。この式をマトリックスの形に書き直すと

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\theta_k & \cos 4\theta_k & 0 & 0 \\ 1 & -\cos 2\theta_k & \cos 4\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos 4\theta_k & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sin 2\theta_k & \sin 4\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sin 2\theta_k & -\sin 4\theta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos 4\theta_k & 0 & 1 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} \dots (3-10)$$

となる。

一方、古典板理論におけるキルヒホッフの仮定「変形前に中央面に垂直な平面は、変形後も中央面に垂直な平面となる」により、積層板の変位は

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad w = w_0 \quad \dots (3-11)$$

とする。ここで、 $u_0$ 、 $v_0$ 、 $w_0$  は板中央面における変位である。また、積層板のひずみは、中央面におけるひずみと中央面の曲率を用いて

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots (3-12)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0\} + z\{\kappa\}$$

と書ける。ここで、中央面におけるひずみ  $\{\varepsilon_0\}$  と中央面の曲率  $\{\kappa\}$  は

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (3-13)$$

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (3-14)$$

と与えられる。したがって、式(3-12)は積層板のひずみが板厚方向に線形に変化することを示している。

さらに、積層板のひずみの式(3-12)を第  $k$  層ラミナの応力-ひずみ関係式(3-1)に代入すると

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad \dots \dots \dots (3-15)$$

$$\{\sigma\}^{(k)} = [\bar{Q}]^{(k)} \{ \{\varepsilon_0\} + z\{\kappa\} \}$$

となり、第  $k$  層ラミナの応力  $\{\sigma\}^{(k)}$  は、積層板の中央面におけるひずみ  $\{\varepsilon_0\}$  と曲率  $\{\kappa\}$  により与えられる。

したがって、一般に積層板の剛性係数  $\bar{Q}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) は個々のラミナで異なるため、板厚方向の応力分布が層間で不連続となる。

### 3. 4 積層板の剛性

積層板に作用する合応力（面内力） $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_{xy}$  および合モーメント  $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_{xy}$  は、式（3-15）に示した応力を積層板の板厚に沿って積分することにより得られる。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad \dots (3-16)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} z dz \quad \dots (3-17)$$

次に式（3-16）と式（3-17）に式（3-15）を代入し、また、 $\varepsilon_{x0}$ 、 $\varepsilon_{y0}$ 、 $\gamma_{xy0}$ 、 $\kappa_x$ 、 $\kappa_y$ 、 $\kappa_{xy}$  がそれぞれ板の中央面に関するパラメータで、 $z$  と関係がないことを考慮すると

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots (3-18)$$

となる。ここで、 $A_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) は面内の伸縮剛性、 $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) は面内伸縮と面外曲げの連成剛性、 $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) は曲げ剛性であり、それぞれ次の式で与えられる。

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad i, j = 1, 2, 6 \quad \dots \quad (3-19)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad i, j = 1, 2, 6$$

したがって、積層板の剛性は各ラミナの剛性 $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ を板厚方向に総和したものであり、各層の繊維配向角、厚さ、積層数および積層順序により定義される積層構成とFRPの材料定数に大きく依存する。

### 3.5 積層板の運動方程式

古典板理論では、平板の内力釣り合い関係により、積層板の運動方程式が次式のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{D}_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4\bar{D}_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\bar{D}_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + \bar{D}_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q \\ \dots \dots \dots (3-20) \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{D}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) は曲げ剛性係数であり、 $w_0$  は中央面の横方向のたわみで、 $q$  は横方向の単位面積あたりに作用する外力である。

### 3.6 積層板の弾性ひずみエネルギー

積層板の弾性ひずみエネルギー $U$ は、各層ラミナのひずみエネルギーの和により、次のように評価できる。

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad \dots \quad (3-21)$$

式(3-21)に積層板のひずみ式(3-12)と第 $k$ 層ラミナの応力式(3-15)を代入して、また、積層板の弾性ひずみエネルギー $U$ を面内ひずみエネルギー $U_s$ 、面内と面外の連成エネルギー $U_{bs}$ 、面外ひずみエネルギー $U_b$ の和の形で下記のように表すと

$$U = U_s + U_{bs} + U_b \quad \dots \dots \dots (3-22)$$

となり、各エネルギー成分は

$$U_s = \frac{1}{2} \iint_A \left\{ A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right. \\ \left. + 2A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right\} dx dy \quad \dots \dots (3-23)$$

$$U_{bs} = \frac{1}{2} \iint_A \left\{ -2B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 4B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right. \\ - 2B_{12} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ - 2B_{16} \left[ 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] \\ \left. - 2B_{26} \left[ 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] \right\} dx dy \quad \dots \dots (3-24)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \iint_A \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right\} dx dy \\ \dots \dots \dots (3-25)$$

と与えられる。

他方，図3-5に示すような集中ばね支持点に蓄えられる弾性エネルギー  $U_c$  は

$$U_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I k_c^{(i)} w_0^2 \quad \dots \dots \dots (3-26)$$

で表される。ここで， $k_c^{(i)}$  は集中ばねの弾性剛性係数であり， $w_0$  は中央面の横方向のたわみで， $I$  は集中ばねの個数である。

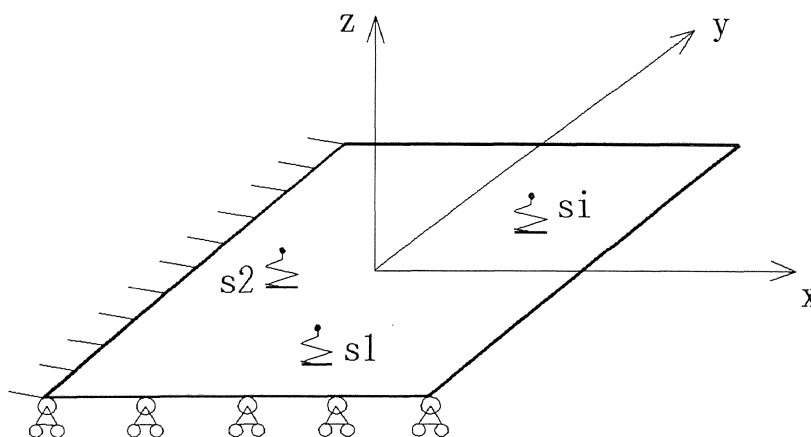


図3-3 弾性点支持を有する積層長方形板

### 3.7 外力系の仕事

図3-4，図3-5に示すように，積層板の面外方向からの集中荷重を  $F_c^{(j)}$  とし，等分布荷重を  $F_d$  とすると，それぞれの外力の系への仕事  $W_c$ ， $W_d$  は

$$W_c = \sum_{j=1}^J F_c^{(j)} w_0 \quad \dots \dots \dots (3-27)$$

$$W_d = \iint_A F_d w_0 dx dy \quad \dots \dots \dots (3-28)$$

となる。ここで、 $J$ は集中荷重の個数を表す。

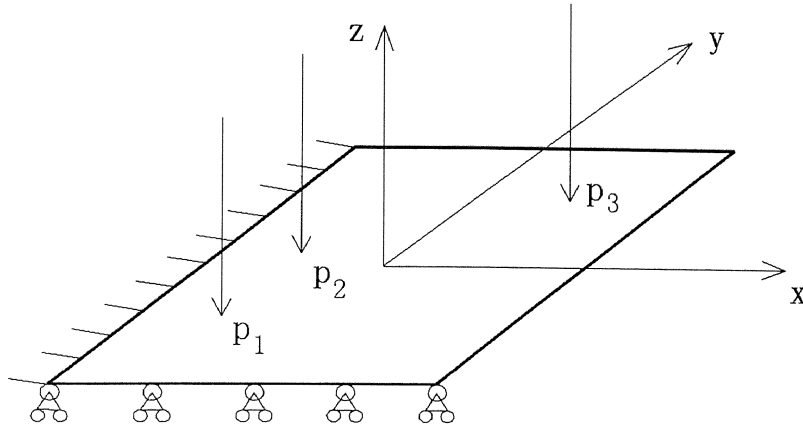


図3-4 集中荷重を受ける積層長方形板

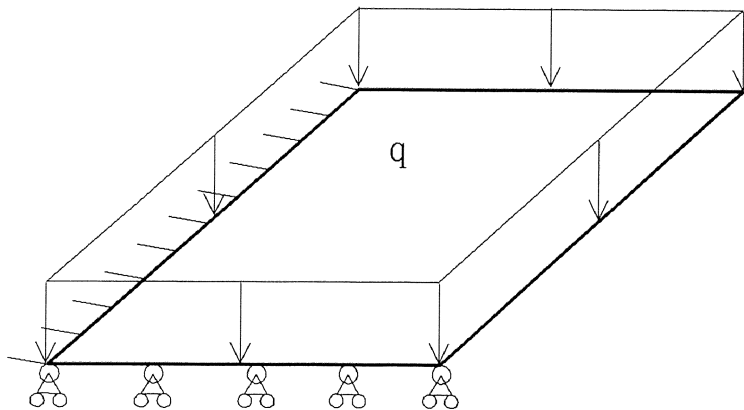


図3-5 等分布荷重を受ける積層長方形板

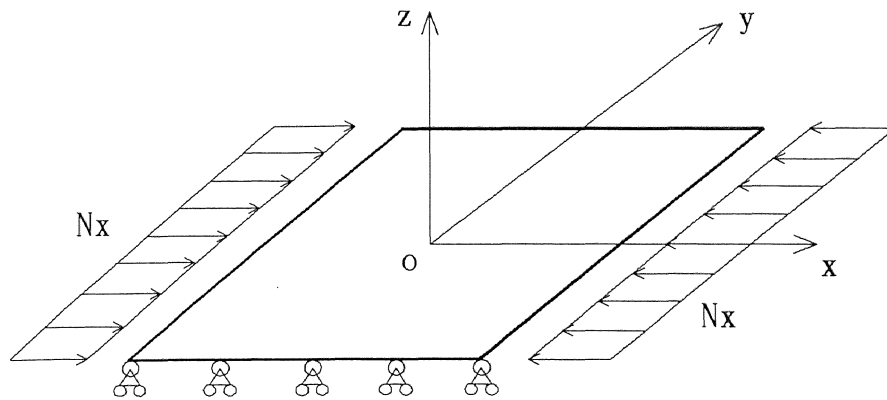


図3-6 面内荷重を受ける積層長方形板

図3-6に示すように、積層板の面内方向からの等分布荷重を  $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_{xy}$  とし、面内荷重による系への仕事  $W_b$  は

$$\begin{aligned}
 W_b &= \iint_A [N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy}] dA \\
 &= -\frac{1}{2} \iint_A \left[ N_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dA \quad \dots (3-29)
 \end{aligned}$$

となる。

上記の式(3-27)、(3-28)と式(3-29)を足すと、積層板の外力の系への仕事は

$$W = W_c + W_d + W_b \quad \dots \dots \dots (3-30)$$

となる。



### 3. 8 運動エネルギー

ここで、積層板は調和振動をしていると考え、その変位関数を次のようにおく

$$\begin{aligned} u^*(x, y, t) &= u(x, y) \sin \omega t \\ v^*(x, y, t) &= v(x, y) \sin \omega t \quad \dots \dots (3-31) \\ w^*(x, y, t) &= w(x, y) \sin \omega t \end{aligned}$$

ここで、 $\omega$ は角振動数である。式(3-31)を時間  $t$  で微分し、式(3-11)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} &= \left( u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \omega \cos \omega t \\ \frac{\partial v^*}{\partial t} &= \left( v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \omega \cos \omega t \quad \dots \dots (3-32) \\ \frac{\partial w^*}{\partial t} &= w_0 \omega \cos \omega t \end{aligned}$$

となる。他方、積層板の運動エネルギー  $T$  は

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \iint_A \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} \left[ \left( \frac{\partial u^*}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v^*}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*}{\partial t} \right)^2 \right] dz dx dy \quad \dots (3-33)$$

と表され、 $\rho^{(k)}$ は各層ラミナの密度である。ここで、各層ラミナの密度を等しいとし、また、式(3-32)を式(3-33)に代入すると

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \iint_A \left\{ I_1 (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + I_3 \left[ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right] \\
& - 2I_2 \left( u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \Big\} dx dy \quad \dots \dots \dots (3-34)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ は慣性量であり

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{k=1}^L \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} dz \\
I_2 &= \sum_{k=1}^L \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} z dz \\
I_3 &= \sum_{k=1}^L \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} z^2 dz
\end{aligned}$$

で与えられる。本研究では、回転慣性を無視するので、式(3-34)を次のように簡略することができる。

$$T = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \iint_A (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) dx dy \quad \dots \dots \dots (3-35)$$

以上の積層板の弾性ひずみエネルギーの式(3-22)と式(3-26)、外力の系への仕事の式(3-30)、運動エネルギーの式(3-35)を用いて、積層板の弾性エネルギー汎関数  $F$  は

$$F = T - U - U_c - W \quad \dots \dots \dots (3-36)$$

と表される。

### 3.9 無次元量の導入

解析の簡単化のため，次に示す無次元量を導入する。

$$\text{(無次元座標)} \quad \xi = \frac{x}{(a/2)} \quad \eta = \frac{y}{(b/2)} \quad \dots \quad (3-37)$$

$$\text{(寸法比)} \quad \alpha = \frac{a}{b} \quad \beta = \frac{a}{h} \quad \dots \quad (3-38)$$

$$\text{(無次元変位)} \quad \bar{u}_0 = \frac{u_0}{h} \quad \bar{v}_0 = \frac{v_0}{h} \quad \bar{w}_0 = \frac{w_0}{h} \quad \dots \quad (3-39)$$

$$\text{(無次元集中ばね定数)} \quad \bar{k}_c = \frac{a^2}{D_0} k_c \quad \dots \quad (3-40)$$

$$\text{(無次元集中荷重)} \quad \bar{F}_c = \frac{a}{D_0} F_c \quad \dots \quad (3-41)$$

$$\text{(無次元分布荷重)} \quad \bar{F}_d = \frac{a^3}{D_0} F_d \quad \dots \quad (3-42)$$

$$\text{(無次元座屈荷重)} \quad \lambda_x = \frac{a^2}{D_0} N_x$$

$$\lambda_y = \frac{a^2}{D_0} N_y \quad \dots \quad (3-43)$$

$$\lambda_{xy} = \frac{a^2}{D_0} N_{xy}$$

$$\text{(無次元振動数)} \quad \Omega = \alpha \alpha^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} \quad \dots \quad (3-44)$$

$$\text{(基準曲げ剛性)} \quad D_0 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \quad \dots \quad (3-45)$$

無次元化における表示の簡単化のため，前述の弾性ひずみエネルギー表現式を次のように行

列の形で書き換える。

$$U_s = \frac{1}{2} \iint_A \{\varepsilon_0\}^T [A] \{\varepsilon_0\} dx dy \quad \dots \quad (3-46)$$

$$U_{bs} = \frac{1}{2} \iint_A \left[ \{\varepsilon_0\}^T [B] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B] \{\varepsilon_0\} \right] dx dy \quad \dots \quad (3-47)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \iint_A \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} dx dy \quad \dots \quad (3-48)$$

ただし,

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \dots \quad (3-49)$$

$$\{\kappa\} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \dots \quad (3-50)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3-51)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{16} & B_{66} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3-52)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad \dots \dots (3-53)$$

とする。無次元量を式(3-49)，式(3-50)に代入すると

$$\{\varepsilon_0\} = \frac{2h}{a} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \xi} \\ \alpha \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \eta} \\ \alpha \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \xi} \end{array} \right\} = \frac{2h}{a} \{\bar{\varepsilon}_0\} \quad \dots \dots (3-54)$$

$$\{\kappa\} = \frac{4h}{a^2} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \\ -\alpha^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \\ -2\alpha \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \end{array} \right\} = \frac{4h}{a^2} \{\bar{\kappa}\} \quad \dots \dots (3-55)$$

となる。ここで

$$\{\bar{\varepsilon}_0\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \xi} \\ \alpha \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \eta} \\ \alpha \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \xi} \end{array} \right\} \quad \dots \dots (3-56)$$

$$\{\bar{\kappa}\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \\ -\alpha^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \\ -2\alpha \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (3-56)$$

と表される。また、剛性マトリックスの[A]、[B]、[D]に各無次元量を代入し、整理すると

$$[A] = \frac{a^2}{D_0} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3-58)$$

$$[B] = \frac{a}{D_0} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{16} & B_{66} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3-59)$$

$$[D] = \frac{1}{D_0} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3-60)$$

と表される。次に、式(3-54)、式(3-55)、式(3-56)、式(3-57)を式(3-46)、式(3-47)、式(3-48)に代入すると、積層板の弾性ひずみエネルギーは

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{1}{2} \iint_A \left(\frac{2h}{a}\right) \{\bar{\varepsilon}_0\}^T \left(\frac{D_0}{a^2}\right) \left(\frac{a^2}{D_0}\right) [A] \left(\frac{2h}{a}\right) \{\bar{\varepsilon}_0\} \frac{ab}{4} d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{D_0}{\alpha\beta^2}\right) \frac{1}{2} \iint_A \{\bar{\varepsilon}_0\}^T [A] \{\bar{\varepsilon}_0\} d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{D_0}{\alpha\beta^2}\right) \bar{U}_s \dots \dots \dots (3-61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{bs} &= \frac{1}{2} \iint_A \left\{ \left( \frac{2h}{a} \right) \{\bar{\varepsilon}_0\}^T \left( \frac{D_0}{a} \right) \left( \frac{a}{D_0} \right) [B] \left( \frac{4h}{a^2} \right) \{\bar{\kappa}\} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{4h}{a^2} \right) \{\bar{\kappa}\}^T \left( \frac{D_0}{a} \right) \left( \frac{a}{D_0} \right) [B] \left( \frac{2h}{a} \right) \{\bar{\varepsilon}_0\} \right\} \frac{ab}{4} d\xi d\eta \\
&= \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) \iint_A \left[ \{\bar{\varepsilon}_0\}^T [\bar{B}] \{\bar{\kappa}\} + \{\bar{\kappa}\}^T [\bar{B}] \{\bar{\varepsilon}_0\} \right] d\xi d\eta \\
&= \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) 2\bar{U}_{bs} \quad \dots \dots \dots (3-62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_b &= \frac{1}{2} \iint_A \left( \frac{4h}{a^2} \right) \{\bar{\kappa}\}^T (D_0) \left( \frac{1}{D_0} \right) [D] \left( \frac{4h}{a^2} \right) \{\bar{\kappa}\} \frac{ab}{4} d\xi d\eta \\
&= \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) 2 \iint_A \{\bar{\kappa}\}^T [\bar{D}] \{\bar{\kappa}\} d\xi d\eta \\
&= \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) 4\bar{U}_b \quad \dots \dots \dots (3-63)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\bar{U}_s = \frac{1}{2} \iint_A \{\bar{\varepsilon}_0\}^T [\bar{A}] \{\bar{\varepsilon}_0\} d\xi d\eta \quad \dots \dots \dots (3-64)$$

$$\bar{U}_{bs} = \frac{1}{2} \iint_A \left[ \{\bar{\varepsilon}_0\}^T [\bar{B}] \{\bar{\kappa}\} + \{\bar{\kappa}\}^T [\bar{B}] \{\bar{\varepsilon}_0\} \right] d\xi d\eta \quad \dots (3-65)$$

$$\bar{U}_b = \frac{1}{2} \iint_A \{\bar{\kappa}\}^T [\bar{D}] \{\bar{\kappa}\} d\xi d\eta \quad \dots \dots \dots (3-66)$$

と与えられる。

集中ばねに蓄えられる弾性エネルギーについては、式(3-26)に各無次元量を代入すると

$$\begin{aligned}
U_c &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I k_c^{(i)} w_0^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \left( \frac{D_0}{a^2} \right) \left( \frac{a^2}{D_0} \right) k_c^{(i)} h^2 \bar{w}_0^2 \\
&= \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \alpha \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \bar{k}_c^{(i)} \bar{w}_0^2 \\
&= \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \alpha \bar{U}_c \quad \dots \dots \dots (3-67)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\bar{U}_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \bar{k}_c^{(i)} \bar{w}_0^2 \quad \dots \dots \dots (3-68)$$

で与えられる。

面外集中荷重の仕事と等分布荷重の仕事は、式(3-27)と式(3-28)に各無次元量を代入すると

$$\begin{aligned}
W_c &= \sum_{j=1}^J F_c^{(j)} w_0 \\
&= \sum_{j=1}^J \left( \frac{D_0}{a} \right) \left( \frac{a}{D_0} \right) F_c^{(j)} h \bar{w}_0 \\
&= \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \alpha \beta \sum_{j=1}^J \bar{F}_c^{(j)} \bar{w}_0 \\
&= \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \alpha \beta \bar{w}_c \quad \dots \dots \dots (3-69)
\end{aligned}$$

$$W_d = \iint_A F_d w_0 dx dy$$



$$\begin{aligned}
&= \iint_A \left(\frac{D_0}{a^3}\right) \left(\frac{a^3}{D_0}\right) F_d h \bar{w}_0 \frac{ab}{4} d\xi d\eta \\
&= \left(\frac{D_0}{\alpha\beta^2}\right) \left(\frac{\beta}{4}\right) \iint_A \bar{F}_d \bar{w}_0 d\xi d\eta \\
&= \left(\frac{D_0}{\alpha\beta^2}\right) \left(\frac{\beta}{4}\right) \bar{W}_d \quad \dots\dots\dots (3-70)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\bar{W}_c = \sum_{j=1}^J \bar{F}_c^{(j)} \bar{w}_0 \quad \dots\dots\dots (3-71)$$

$$\bar{W}_d = \iint_A \bar{F}_d \bar{w}_0 d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (3-72)$$

と与えられる。

積層板における面内荷重の仕事は、式(3-29)に各無次元量を代入して

$$\begin{aligned}
W_b &= -\frac{1}{2} \iint_A \left[ N_x \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right) \right] dA \\
&= -\frac{1}{2} \iint_A \left(\frac{D_0}{a^2}\right) \left(\frac{a^2}{D_0}\right) \left[ N_x \left(\frac{2h}{a}\right)^2 \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \xi}\right)^2 + N_y \left(\frac{2h}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \eta}\right)^2 + N_{xy} \left(\frac{4h^2}{ab}\right) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \xi \partial \eta}\right) \right] \frac{ab}{4} d\xi d\eta \\
&= -\left(\frac{D_0}{\alpha\beta^2}\right) \frac{1}{2} \iint_A \left[ \lambda_x \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \xi}\right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \eta}\right)^2 + 2\lambda_{xy} \alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \xi \partial \eta}\right) \right] d\xi d\eta \\
&= -\left(\frac{D_0}{\alpha\beta^2}\right) \bar{W}_b \quad \dots\dots\dots (3-73)
\end{aligned}$$

と与えられる。ここで、

$$\bar{W}_b = \frac{1}{2} \iint_A \left[ \lambda_x \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \xi} \right)^2 + \lambda_y \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \eta} \right)^2 + 2\lambda_{xy} \alpha \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right] d\xi d\eta \quad \dots (3-74)$$

となる。

運動エネルギーは、式(3-35)に無次元量を代入すると

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \iint_A (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) dx dy \\ &= \left( \frac{D_0}{a \rho h} \right) \left( \frac{a^4 \rho h}{D_0} \right) \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \iint_A h^2 (\bar{u}_0^2 + \bar{v}_0^2 + \bar{w}_0^2) \frac{ab}{4} d\xi d\eta \\ &= \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \left( \frac{\Omega^2}{4} \right) \frac{1}{2} \iint_A (\bar{u}_0^2 + \bar{v}_0^2 + \bar{w}_0^2) d\xi d\eta \\ &= \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \left( \frac{\Omega}{4} \right) \bar{T} \quad \dots \dots \dots (3-75) \end{aligned}$$

となる。

以上の無次元量により、積層板のそれぞれの弾性エネルギーの総和は

$$\begin{aligned} U &= U_s + U_{bs} + U_b + U_c \\ &= \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \bar{U}_s + \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) 2\bar{U}_{bs} + \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) 4\bar{U}_b + \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \alpha \bar{U}_c \\ &= \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) (\bar{U}_s + 2\bar{U}_{bs} + \bar{U}_b + \alpha \bar{U}_c) \\ &= \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \bar{U} \quad \dots \dots \dots (3-76) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\bar{U} = \bar{U}_s + 2\bar{U}_{bs} + 4\bar{U}_b + \alpha\bar{U}_c \quad \dots\dots\dots (3-77)$$

で与えられる。また、式(3-76)は

$$\bar{U} = \left( \frac{\alpha\beta^2}{D_0} \right) U \quad \dots\dots\dots (3-78)$$

とも表される。

一方、積層板の外力の系への仕事の総和は、式(3-69)と式(3-70)により

$$\begin{aligned} W &= W_c + W_d + W_b \\ &= \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) \alpha\beta\bar{W}_c + \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) \left( \frac{\beta}{4} \right) \bar{W}_d - \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) \bar{W}_b \\ &= \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) \left[ \alpha\beta\bar{W}_c + \left( \frac{\beta}{4} \right) \bar{W}_d - \bar{W}_b \right] \\ &= \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) \bar{W} \quad \dots\dots\dots (3-79) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\bar{W} = \alpha\beta\bar{W}_c + \left( \frac{\beta}{4} \right) \bar{W} - \bar{W}_b \quad \dots\dots\dots (3-80)$$

である。また、式(3-79)は

$$\bar{W} = \left( \frac{\alpha\beta^2}{D_0} \right) W \quad \dots\dots\dots (3-81)$$

とも表される。

以上の式により，積層板の弾性エネルギー汎関数は

$$\begin{aligned} F &= T - U - W \\ &= \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) \left( \frac{\Omega^2}{4} \right) \bar{T} - \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) \bar{U} - \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) \bar{W} \\ &= \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) \left[ \left( \frac{\Omega^2}{4} \right) \bar{T} - \bar{U} - \bar{W} \right] \\ &= \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) \bar{F} \quad \dots \dots \dots (3-82) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\bar{F} = \left( \frac{\Omega^2}{4} \right) \bar{T} - \bar{U} - \bar{W} \quad \dots \dots \dots (3-83)$$

と与えられる。また，式(3-82)は

$$\bar{F} = \left( \frac{\alpha\beta^2}{D_0} \right) F \quad \dots \dots \dots (3-84)$$

とも表される。

### 3. 10 本章のまとめ

本章では，FRP積層板の力学解析問題にリッツ法を適用するために，積層板の座標系，構  
成方程式，運動方程式，種々剛性係数および各エネルギーの表現式などについて詳細な検討を  
行った。

本章の内容は、次の各章における積層板の振動，座屈，静変形など力学特性の解析に重要な理論基礎となっている。

# 第4章 一般的な積層長方形板の基本振動数の 最大化設計

## 4.1 まえがき

軽量化が必要な機械構造物に対して、現在は比強度・比剛性に優れた CFRP 等の繊維強化複合材料を使用する例が多い。こうした構造物は航空宇宙分野に典型的に見られるように、厳しい振動環境下で高い構造性能を要求されるのが通例である。この場合、複合材料構造の設計に当たって、静特性だけでなく固有振動数をはじめとする動特性の最適化を十分に考慮することが重要である。

FRP のラミナを重ねて成形した積層平板では、各層ラミナの繊維方向を適切に選択することで、特定の設計要求に対する力学特性を改善できることが知られている。このため積層平板の最適設計に関する研究文献は多数あり書籍や展望論文にまとめられている<sup>(51) - (59)</sup>、しかし固有値計算を伴い支配方程式の解が複雑になる振動問題に対する最適化の論文の件数は比較的限られている<sup>(48) - (71)</sup>。さらに過去の文献は全周単純支持や固定の境界条件を持つ対称積層板に限定されており、任意の境界条件や非対称を含む一般的な積層まで考慮した研究はほとんど見受けられない。

本章では、非対称積層も含む一般的な積層構成を持つ平板において、まず、古典積層板理論に基づくリッツ法を用いた積層長方形板の振動解析法を検討する。次は、各層ラミナが持つ繊維配向角の最適化問題を扱い、その最適化の目的関数は積層長方形板の基本振動数の最大化とし、設計変数は各層ラミナの繊維配向角とする。また、最適化アルゴリズムについてはコンプレックス法を適用する。

数値例では、異方性の程度がかなり大きい Graphite/epoxy と、比較的小さい E-Glass/epoxy

の2種類の材料の正方形積層板を扱った。4辺に沿って自由，単純支持，固定の拘束を種々に配した21通りの境界条件の8層板に関して最適繊維配向角を求めた。そして各々の境界条件について，最適解を与えた積層角度の物理的な意味について詳細な検討を行った。

#### 4.2 解析モデルの設定

図4-1は， $a \times b$ の辺長と $h$ の板厚を持つ長方形板の中央面を示し，座標系 $o-xyz$ の原点 $o$ を板の中心にとる。層の構成は，非対称を含む一般的な積層である。

積層板の4辺における拘束条件は自由，単純支持，固定の3種類を各辺毎に独立に選択することにする。表記の順序は， $x=-a/2$ 、 $y=-b/2$ 、 $x=a/2$ 、 $y=b/2$ の辺の順に対応させて表す。例えば図4-1に示す境界条件は，固定-単純支持-自由-自由であるが，それをCSFFと表す。

積層板の各ラミナの材料主軸である繊維方向を1軸，繊維と垂直な $xy$ 面上の方向を2軸として，1軸が $x$ 軸となす角度を繊維配向角 $\theta_i$ とする。なお本章では，一般的な積層構成を考察するため，積層順序に対称積層やアングルプライ等の制限は加えず，一般的な積層構成とする。したがって各層ラミナの繊維配向角の選択は互いに無関係で，層数 $N$ がそのまま設計変数の数となる。

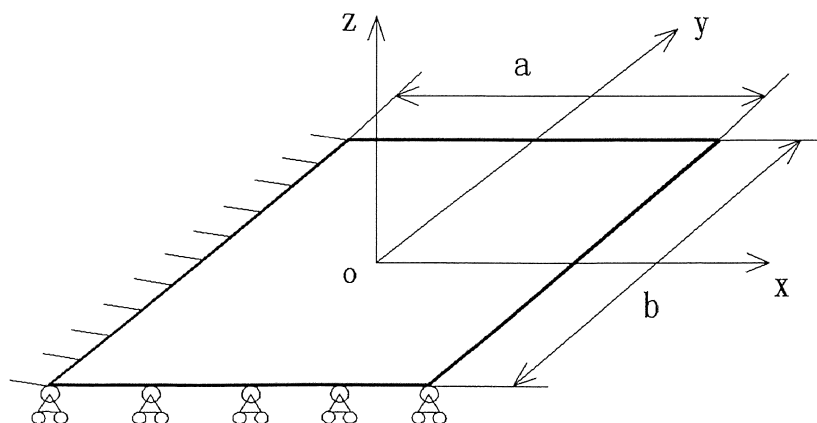


図. 4-1 積層長方形板と座標系

### 4. 3 振動解析法

積層平板の振動解析においては、変位関数としてべき級数を用いたリッツ法が精度の良い近似解が得られることがわかっている<sup>(8)</sup>。本章においても、その手法を適用する。ここで積層長方形板の任意の境界条件を満足するために、以下に幾何学的境界条件を自動的に満足する境界条件インデックスを持つ変位関数を導入する。

$$\begin{aligned}
 u_0(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} p_{ij} X_i(\xi) Y_j(\eta) \\
 v_0(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^{I-1} \sum_{l=0}^{J-1} q_{kl} X_k(\xi) Y_l(\eta) \quad \dots \dots (4-1) \\
 w_0(\xi, \eta) &= \sum_{m=0}^{I-1} \sum_{n=0}^{J-1} r_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta)
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 X_i(\xi) &= \xi^i (\xi+1)^{bc11} (\xi-1)^{bc31} \\
 X_k(\xi) &= \xi^k (\xi+1)^{bc12} (\xi-1)^{bc32} \\
 X_m(\xi) &= \xi^m (\xi+1)^{bc13} (\xi-1)^{bc33} \\
 Y_j(\eta) &= \eta^j (\eta+1)^{bc21} (\eta-1)^{bc41} \quad \dots \dots (4-2) \\
 Y_l(\eta) &= \eta^l (\eta+1)^{bc22} (\eta-1)^{bc42} \\
 Y_n(\eta) &= \eta^n (\eta+1)^{bc23} (\eta-1)^{bc43}
 \end{aligned}$$

と与えられる。ここでは、 $p_{ij}$ 、 $q_{kl}$ 、 $r_{mn}$ は未定係数を表す。 $I$ 、 $J$ は項数である。また、 $bcij$ は境界条件インデックスであり、 $i$ は長方形板の辺 ( $i=1,2,3,4$ : 順に  $x=-a/2$ 、 $y=-b/2$ 、 $x=a/2$ 、 $y=b/2$ ) を示し、 $j$ はそれぞれの拘束条件の対象 ( $j=1,2,3$ : 順に  $u$ 、 $v$ 、 $w$ ) を表す。変位を自由にする場合は  $bcij=0$ 、並進変位を拘束する場合は  $bcij=1$ 、回転変位を拘束する場合は  $bcij=2$  とすればよい。

変位関数 (4-1) を積層板の弾性エネルギー汎関数の式 (3-82) に代入し、次いで、



変位関数中の未定係数  $p_{ij}$ ,  $q_{kl}$ ,  $r_{mn}$  により極小化を行う。

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial p_{ij}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_{kl}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial r_{mn}} = 0 \quad \dots \dots \dots (4-3)$$

$$i, k, m = 0, 1, 2, \dots, I-1 \quad j, l, n = 0, 1, 2, \dots, J-1$$

これにより，次のような未定係数に関する振動数方程式が得られる。

$$([K] - \Omega^2 [M]) \begin{Bmatrix} p_{ij} \\ q_{kl} \\ r_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots \dots \dots (4-4)$$

ここで

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{ijj} & K_{kil} & K_{min} \\ K_{kil} & K_{kkl} & K_{mkn} \\ K_{min} & K_{mkn} & K_{mnn} \end{bmatrix} \quad \dots \dots (4-5)$$

であり

$$K_{ijj} = a_{11} I_{ijj}^{(1100)} + \alpha^2 a_{66} I_{ijj}^{(0011)} + \alpha a_{16} \left( I_{ijj}^{(0110)} + I_{ijj}^{(1001)} \right)$$

$$K_{kil} = \alpha a_{66} I_{kil}^{(1100)} + \alpha a_{12} I_{kil}^{(0110)} + a_{16} I_{kil}^{(1100)} + \alpha^2 a_{26} I_{kil}^{(0011)}$$

$$K_{min} = -2 \left\{ b_{11} I_{min}^{(2100)} + 2\alpha^2 b_{66} I_{min}^{(1011)} + \alpha^2 b_{12} I_{min}^{(0120)} \right.$$

$$\left. + \alpha b_{16} \left( 2I_{min}^{(1110)} + I_{min}^{(2001)} \right) + \alpha^3 I_{min}^{(0021)} \right\}$$

$$K_{kkl} = \alpha^2 a_{22} I_{kkl}^{(0011)} + a_{66} I_{kkl}^{(1100)} + \alpha a_{26} \left( I_{kkl}^{(0110)} + I_{kkl}^{(1001)} \right)$$

$$K_{mkn} = -2 \left\{ \alpha^2 b_{22} I_{mkn}^{(0021)} + 2\alpha b_{66} I_{mkn}^{(1110)} + \alpha b_{12} I_{mkn}^{(2001)} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2b_{66}I_{\bar{m}\bar{k}\bar{n}\bar{l}}^{(2100)} + \alpha^2 b_{26} \left( 2I_{\bar{m}\bar{k}\bar{n}\bar{l}}^{(1011)} + I_{\bar{m}\bar{k}\bar{n}\bar{l}}^{(0120)} \right) \Big\} \\
K_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}} = & d_{11}I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(2200)} + \alpha^4 d_{22}I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(0022)} + \alpha^2 d_{12} \left( I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(0220)} + I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(2002)} \right) \\
& + 2\alpha d_{16} \left( I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(1210)} + I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(2101)} \right) + 2\alpha^3 d_{26} \left( I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(1012)} + I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(0121)} \right) \\
& + 4\alpha^2 d_{66}I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(1111)} \\
& \dots \dots \dots (4-6)
\end{aligned}$$

となる。ここで、剛性比  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $d_{ij}$  は

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \frac{a^2}{D_0} A_{ij} & i, j = 1, 2, 6 \\
b_{ij} &= \frac{a}{D_0} B_{ij} & i, j = 1, 2, 6 \\
d_{ij} &= \frac{1}{D_0} D_{ij} & i, j = 1, 2, 6
\end{aligned} \dots \dots \dots (4-7)$$

である。次にマトリックス  $[M]$  は

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{\bar{i}\bar{j}\bar{j}} & 0 & 0 \\ 0 & M_{\bar{k}\bar{k}\bar{l}\bar{l}} & 0 \\ 0 & 0 & M_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4-8)$$

であり

$$\begin{aligned}
M_{\bar{i}\bar{j}\bar{j}} &= I_{\bar{i}\bar{j}\bar{j}}^{(0000)} \\
M_{\bar{k}\bar{k}\bar{l}\bar{l}} &= I_{\bar{k}\bar{k}\bar{l}\bar{l}}^{(0000)} \\
M_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}} &= I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(0000)} \\
& \dots \dots \dots (4-9)
\end{aligned}$$

となる。以上の式の積分表示  $I_{mmn}^{-(abcd)}$  は

$$I_{mmn}^{-(abcd)} = \phi_{mm}^{-(ab)} \phi_{nn}^{-(cd)} \\ = \iint_A \frac{\partial^a X_m(\xi)}{\partial \xi^a} \frac{\partial^b X_m(\xi)}{\partial \xi^b} \frac{\partial^c Y_n(\eta)}{\partial \eta^c} \frac{\partial^d Y_n(\eta)}{\partial \eta^d} d\xi d\eta \quad \dots (4-10)$$

である。ここで、積分表示  $\phi_{mm}^{-(ab)}$  を

$$\phi_{mm}^{-(ab)} = \int_{-1}^1 \frac{\partial^a X_m(\xi)}{\partial \xi^a} \frac{\partial^b Y_m(\xi)}{\partial \xi^b} d\xi \quad \dots (4-11)$$

$$X_m(\xi) = \xi^m (\xi+1)^{bc1} (\xi-1)^{bc2} \quad \dots (4-12)$$

$$X_m(\xi) = \xi^{\bar{m}} (\xi+1)^{\bar{bc1}} (\xi-1)^{\bar{bc2}} \quad \dots (4-13)$$

としたときに、二項定理より

$$(x+a)^p = \sum_{i=1}^p C_{p,i} a^{p-i} x^i \quad \dots (4-14)$$

となり、したがって式(4-12)と式(4-13)は

$$X_m(\xi) = \xi^m \sum_{i0=0}^{bc1} C_{bc1,i0} (1)^{bc1-i0} \xi^{i0} \sum_{i1=0}^{bc2} C_{bc2,i1} (-1)^{bc2-i1} \xi^{i1} \\ = AB \xi^M \quad \dots (4-15)$$

$$X_m(\xi) = \xi^{\bar{m}} \sum_{i0=0}^{\bar{bc1}} C_{\bar{bc1},i0} (1)^{\bar{bc1}-i0} \xi^{i0} \sum_{i1=0}^{\bar{bc2}} C_{\bar{bc2},i1} (-1)^{\bar{bc2}-i1} \xi^{i1} \\ = \bar{A}\bar{B} \xi^{\bar{M}} \quad \dots (4-16)$$

となる。ただし

$$A = \sum_{i0=0}^{bc1} C_{bc1,i0} (1)^{bc1-i0} \dots \dots \dots (4-17)$$

$$B = \sum_{i1=0}^{bc2} C_{bc2,i1} (-1)^{bc2-i1} \dots \dots \dots (4-18)$$

$$\bar{A} = \sum_{i0=0}^{\bar{bc1}} C_{\bar{bc1},i0} (1)^{\bar{bc1}-i0} \dots \dots \dots (4-19)$$

$$\bar{B} = \sum_{i1=0}^{\bar{bc2}} C_{\bar{bc2},i1} (-1)^{\bar{bc2}-i1} \dots \dots \dots (4-20)$$

$$M = m + i0 + i1 \dots \dots \dots (4-21)$$

$$\bar{M} = \bar{m} + i\bar{0} + i\bar{1} \dots \dots \dots (4-22)$$

である。式(4-15)と式(4-16)を式(4-10)に代入して

$$\phi_{mm}^{-(ab)} = AB\bar{A}\bar{B} \int_{-1}^1 \frac{\partial^a \xi^M}{\partial \xi^a} \frac{\partial^b \xi^{\bar{M}}}{\partial \xi^b} d\xi \dots \dots (4-23)$$

となる。ここで公式により

$$\frac{d^a x^i}{dx^a} = \frac{i!}{(i-a)!} x^{i-a}$$

であるから、式(4-23)は

$$\begin{aligned} \phi_{mm}^{-(ab)} &= AB\bar{A}\bar{B} \int_{-1}^1 \frac{M!}{(M-a)!} \xi^{M-a} \frac{\bar{M}!}{(\bar{M}-b)!} \xi^{\bar{M}-b} d\xi \\ &= ABC\bar{A}\bar{B}\bar{C} \int_{-1}^1 \xi^{M+\bar{M}-a-b} d\xi \end{aligned}$$

$$= ABC \overline{ABC} \frac{1}{M + \overline{M} - a - b + 1} \left[ \xi^{M + \overline{M} - a - b + 1} \right]_{-1}^1 \quad \dots (4-24)$$

と表される。ただし

$$C = \frac{M!}{(M-a)!}$$

$$\overline{C} = \frac{\overline{M}!}{(\overline{M}-b)!} \quad \dots \dots \dots (4-25)$$

である。ここで

$$M + \overline{M} - a - b + 1 \text{ が偶数} \rightarrow \phi_{mm} = 0$$

$$M + \overline{M} - a - b + 1 \text{ が奇数} \rightarrow \phi_{mm} \neq 0$$

となる。

以上までの式を式(4-4)に代入して、さらにその係数行列の固有値問題として、簡単に固有振動数パラメータが求められる。

#### 4.4 最適化アルゴリズム

本章の積層板振動特性の最適設計問題は、任意境界条件を有する一般的な積層構成を持つ長方形板において、最大化する目的関数を積層板の基本振動数とし、各層ラミナの繊維配向角  $\theta_i$  ( $-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$ ) を設計変数とする。これを数理的に表すと

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T \\ \text{Maximize} \quad & \Omega = f(\theta) \quad \dots \dots \dots (4-26) \\ \text{Subject to} \quad & -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

と定式化される。ここで、 $N$  は層の層数であり、 $\Omega$  は無次元化された基本振動数パラメータである。

コンプレックス法を使って最適化問題 (4-26) を解くためには、はじめに初期コンプレックスを生成する。一般的には、乱数を用いて以下の  $M$  個の頂点

$$\begin{aligned}
 \theta_i^1 &= 180(r_i^1 - 0.5) \\
 \theta_i^2 &= 180(r_i^2 - 0.5) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \theta_i^j &= 180(r_i^j - 0.5) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \theta_i^M &= 180(r_i^M - 0.5)
 \end{aligned}
 \qquad \dots\dots\dots (4-27)$$

を持つ初期コンプレックスを作る。ただし、 $r_i$  は区間  $[0, 1]$  での一様な擬似乱数であり、この  $r_i$  と繊維配向角  $\theta_i$  の右上に付した添字  $j$  は、コンプレックスの頂点番号を示す。

本章では、問題の性質によって、初期コンプレックスの頂点座標を入力パラメータとして設定してもよい。

次に、コンプレックスの頂点  $\theta^j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) について、以下の点を定義する。

目的関数の最小値

$$f(\theta^h) = \text{Min}_j \{ f(\theta^j) \} \qquad \dots\dots\dots (4-28)$$

を与える点  $\theta^h$  を最小点とする。 $\theta^h$  のつぎに2番目小さい目的関数値

$$f(\theta^s) = \text{Min}_j \{ f(\theta^j), j \neq h \} \qquad \dots\dots\dots (4-29)$$

を与える点を次小点  $\theta^s$  とする。また、目的関数の最大値

$$f(\theta^l) = \text{Max}_j \{f(\theta^j)\} \quad \dots \dots \dots (4-30)$$

を与える点を最大点  $\theta^l$  である。

さらに最小点  $\theta^h$  を除いた  $(M-1)$  次元部分空間におけるサブコンプレックスの図心  $\theta^0$  は

$$\theta^0 = \frac{1}{M-1} \left( \sum_{j=1}^M \theta^j - \theta^h \right) \quad \dots \dots \dots (4-31)$$

に対応する点とする。

このように定義された点を利用して、以下の手順にしたがってコンプレックス法の最適化計算を行う。

- (1) 自由設定あるいは式(4-27)を用い、初期コンプレックスを作って、各頂点での基本振動数を求める。
- (2) 各頂点の基本振動数を比較し、最小点  $\theta^h$ , 次小点  $\theta^s$ , 最大点  $\theta^l$  および図心  $\theta^0$  を決める。
- (3) 最小点  $\theta^h$  の図心  $\theta^0$  に関する鏡像点  $\theta^r$  を

$$\theta^r = (1.0 - \alpha)\theta^0 - \alpha\theta^h \quad \dots \dots \dots (4-32)$$

により求める。ただし、 $\alpha$  は鏡像係数であり、ここでは  $0 < \alpha < 2$  とする。

- (4) 鏡像点  $\theta^r$  での基本振動数  $f(\theta^r)$  を求める。
- (5) 鏡像点の基本振動数  $f(\theta^r)$  を次小点の基本振動数  $f(\theta^s)$ , 最大点の基本振動数  $f(\theta^l)$  と比較した結果から、それぞれ手順(6), (7)と(8)に対応する3つの可能性を考える。
- (6)  $f(\theta^s) \leq f(\theta^r) \leq f(\theta^l)$  の場合、新規に  $\theta^r$  を  $\theta^h$  と置き換えて、新しい形成されたコンプレックスについて、(2)に戻り手順を繰り返す。
- (7)  $f(\theta^r) \leq f(\theta^l)$  の場合、すなわち鏡像点の基本振動数  $f(\theta^r)$  が最大点の基本振動数

$f(\theta^l)$  より大きい時に、 $\theta^r$  をこえた方向にさらに進むと、目的関数の改善が期待できる。このときは

$$\theta^e = (1.0 - \gamma)\theta^0 + \gamma\theta^r \quad \dots \dots (4-33)$$

を使って、拡張点  $\theta^e$  を求める。ただし、 $\gamma$  は拡張係数であり、 $1 < \gamma < 3$  とする。

拡張点  $\theta^e$  での基本振動数  $f(\theta^e)$  を求めて、もし  $f(\theta^e) > f(\theta^r)$  ならば、その拡張は成功と考え、拡張点  $\theta^e$  を最小点  $\theta^h$  と置き換える。逆に  $f(\theta^e) \leq f(\theta^r)$  ならば、鏡像点  $\theta^r$  を最小点  $\theta^h$  と置き換える。いずれの場合も置き換えた後、(2) に戻り計算手順を繰り返す。

(8)  $f(\theta^r) < f(\theta^s)$  の場合、すなわち鏡像点の基本振動数  $f(\theta^r)$  が次小点の基本振動数  $f(\theta^s)$  より小さい時に、このまま進むと鏡像点  $\theta^r$  は次回のコンプレックスの最小点になるため、今回の鏡像点探索を失敗と見なし、収縮点  $\theta^c$  を

$$\theta^c = (1.0 - \beta)\theta^0 + \beta\theta^r \quad \dots \dots (4-34)$$

により求める。ただし、 $\beta$  は収縮係数であり、 $0 < \beta < 1$  とする。

収縮点  $\theta^c$  での基本振動数  $f(\theta^c)$  を求めて、もし、 $f(\theta^c) > f(\theta^s)$  ならば、収縮点  $\theta^c$  を最小点  $\theta^h$  と置き換えて、(2) に戻る。逆に、 $f(\theta^c) \leq f(\theta^s)$  ならば、鏡像点  $\theta^r$  を収縮点  $\theta^c$  と置き換えて、手順 (8) に戻り、もう一度収縮を行う。

ただし、このような収縮作業を何回か行っても（本章の計算では5回）、依然として  $f(\theta^c) > f(\theta^s)$  を満足しない場合では全体縮小を行う。ここでの全体縮小とは、コンプレックスの  $M$  個の頂点  $\theta^j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) を最大点  $\theta^l$  の方向に半分に縮小することである。すなわち式

$$\theta^j = \frac{1}{2}(\theta^j + \theta^l) \quad j = 1, 2, \dots, M \quad \dots \dots (4-35)$$

を使い、新しいコンプレックスを作って、(2) に戻して、繰り返し計算を続ける。



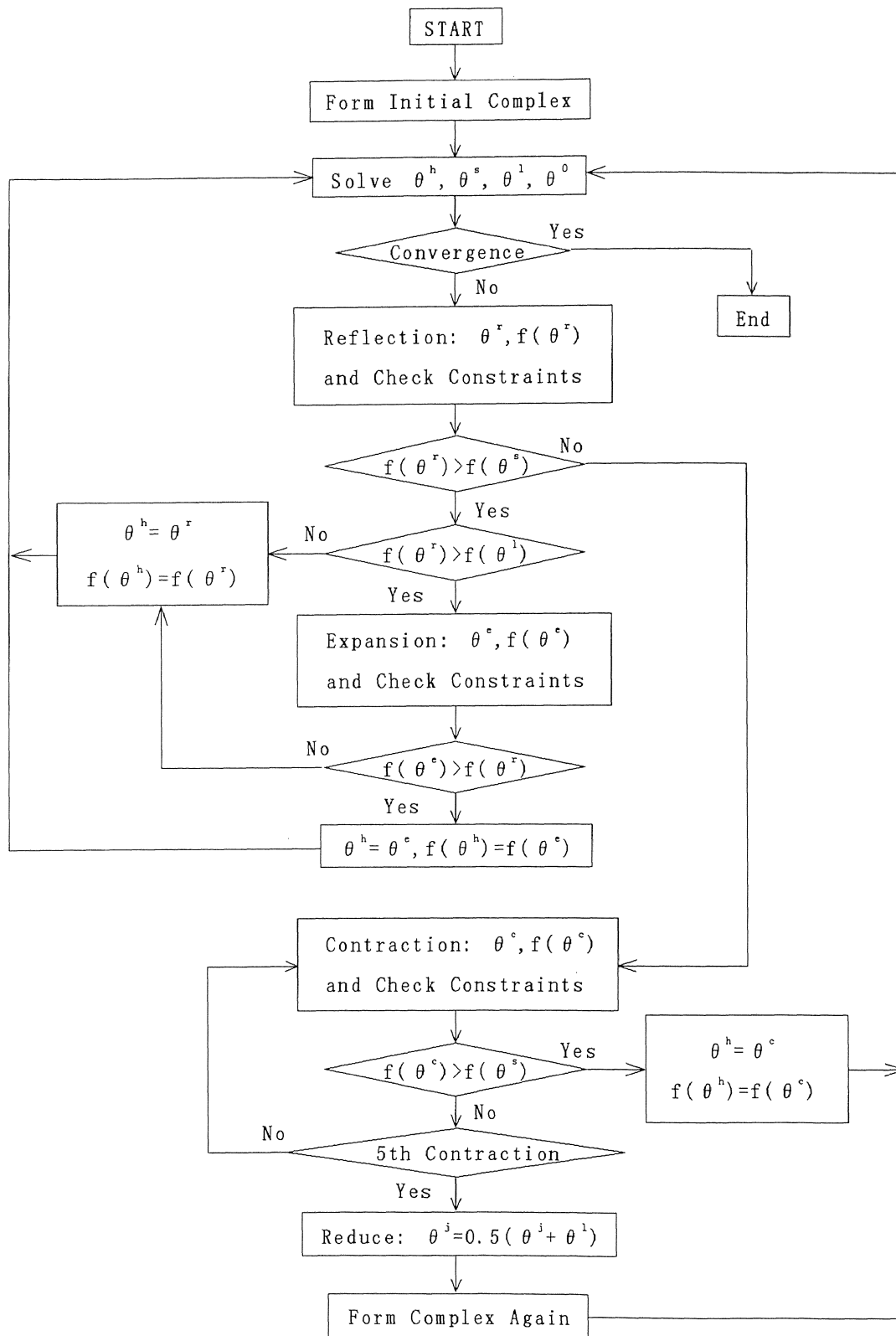


図. 4-2 最適設計アルゴリズム

基本的には以上の手順にしたがって、コンプレックス法の最適化計算が行われる。しかし、本章の最適化モデルは制約条件付きの最適化問題であるから、1回の鏡像点探索や拡張処理あるいは収縮処理が終了した時、必ず制約条件を満足しているかの確認を行う。もし、制約条件  $-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$  を満足しなければ、設計変数  $\theta_i$  は幾何学側面制約条件に対応する限界値 ( $-90^\circ$  或は  $90^\circ$ ) に置き換える。

一方、コンプレックス法における繰り返し計算の収束判定について、以下の式

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M [f(\theta^j) - f_0]^2 < \varepsilon \quad \dots \dots \dots (4-36)$$

の条件により行う。ただし

$$f_0 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M f(\theta^j) \quad \dots \dots \dots (4-37)$$

である。ここでは、 $f_0$  はコンプレックスの各頂点  $\theta^j$  ( $j=1,2,\dots,M$ ) での基本振動数  $f(\theta^j)$  の平均値 (コンプレックスの重心) であり、 $\varepsilon$  は任意に指定する収束判定基準である。

以上の方法に基づき、図4-2に示すコンプレックス法の最適化計算フローがまとめられる。

#### 4.5 数値計算例

前章の任意境界条件を考慮した自由振動解析法と、コンプレックス法の最適化アルゴリズムに基づき、一般的な積層構成を持つ長方形板の自由振動特性に関する最適設計プログラムを作成した。

数値計算例の設定条件は、下記の通りである。

- (1) 積層板の材質は、異方性の程度がかなり強い Graphite/epoxy 材と、異方性の程度が比較的弱い E-Glass/epoxy 材を扱い、それらの材料定数は

$$\text{Graphite/epoxy : } E_1 = 138.0 \text{ GPa} \quad E_2 = 8.96 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 7.10 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.30$$

$$\text{異方比 } E_1 / E_2 = 15.40$$

$$\text{E-Glass/epoxy : } E_1 = 60.7 \text{ GPa} \quad E_2 = 24.8 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 12.0 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.23$$

$$\text{異方比 } E_1 / E_2 = 2.45$$

を用いた。

- (2) 最適化計算において、積層条件は任意の積層角度を持つ8層板として、積層配向角は下から順に $[\theta_1 / \theta_2 / \dots / \theta_8]$ と表示する。各層ラミナの厚さは同一として、それぞれの繊維配向角 $\theta_i$  ( $-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ )は互いに独立に選択できるものとする。したがって設計変数の数も8となる。
- (3) 積層板の厚さと辺長の比は $h / \sqrt{ab} = 0.01$ とする。ここで $h$ は積層板の厚さ、 $a$ ,  $b$ はそれぞれ $x$ ,  $y$ 軸方向の辺長である(図4-1参照)。
- (4) 積層長方形板の4辺における拘束条件は、F:自由, S:単純支持, C:固定の3種類とし、その組合せは任意である。本章の最適化計算例では、長方形板の21通りの境界条件の組合せについて最適化計算を行う。
- (5) 最適化アルゴリズムの中で使われるコンプレックスの頂点数は、設計変数の繊維配向角 $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ )が8個であることを考慮した上で14個とした。初期コンプレックスの頂点 $\theta^j$  ( $j = 1, 2, \dots, 14$ )は、ここでは乱数を用いず入力データとして、他の計算条件や材料データ等と一緒に入力する。

表4-1は、積層正方形板の自由振動解析における変位関数の項数 $i \times j$ を変化させた場合に、無次元化された固有振動数の収束状況を調べた結果である。表中では、 $i \times j = 4 \times 4$ 、 $6 \times 6$ 、 $8 \times 8$ 、 $10 \times 10$ の項数を採り、境界条件は全周自由: F F F F, 全周単純支持: S S S S, 全周固定: C C C C及び支持混在: C S S Fの4種類として、基本次より5次までの固有振動数の結果を示す。積層構成は Graphite/epoxy のアングルプライ板 $[30 / -30 / 30]$ とした。その結果、F F F FとC C C Cにおいて $\Omega_5$ を除き、 $i \times j = 10 \times 10$ まで4桁の精度で収束している。しかし、S S S Sにおいて全体的にやや収束が遅い結果となった。また、3種類の支持条件が混在したC S S Fは、ほぼS S S Sと同様の収束状況を示した。しかしいずれも $i \times j = 8 \times 8$ 項

まで基本固有振動数の結果は全て0.1%以下の誤差で収束している。これらの結果および最適化計算の効率を考慮した上で、本章の積層板の振動特性最適設計に取り込んだ自由振動解析では8×8の項数を採用した。

表4-2においては、Graphite/epoxy 積層板の既知の固有振動数結果との比較である。ここでは、クロスプライ積層板 $[0/90/0]$ の計算結果とLove型の厳密解<sup>(19)</sup>と4桁まで一致すると示し、またアングルプライ積層板 $[30/-30/30]$ の計算結果と文献<sup>(19)</sup>の結果と比べ、5次までにわたり2%以下の低い誤差を示している。

表4-3は、21通りの境界条件の組合せに対して最適化計算により得られたGraphite/epoxy材料の8層正方形板の最適繊維配向角分布と最大化された基本振動数である。

表4-3より、境界条件1. FFFF, 2. SFFFでは、拘束条件が不足するため剛体運動が存在するが、剛体運動以外の弾性振動モードは積層板自身の剛性と慣性がバランスを取ることで存在する。このため、剛体運動モード以外の最低次固有振動数を最大化するには、積層板はなるべく弱い剛性方向が出ないように各層ラミナの繊維配向角が全方向に均一化するように思われる。1. FFFFでは、この効果から最適繊維配向角の分布は種々の角度に分散している。また、2. SFFFの場合は、1番目の辺( $x=-a/2$ )に単純支持の拘束があるため、最適繊維配向角は $[45/-45/45/-45]_s$ の前後に最適解となっている。その最適繊維配向角が対称性を持つ $[45/-45/45/-45]_s$ より少しずれる原因としては、面内と面外の連成剛性による影響もあると考えられる。

検討のために、 $[45/-45/45/-45]_s$ の積層構成を持つ同一の境界条件SFFFの積層板の振動解析も行ったが、その基本振動数は5.216であり、表中の最適解5.314よりやや小さい値となった。他の(3)~(21)の境界条件における繊維配向角の最適解は、2つのパターンに大別される。

第1のパターンは、その最適な繊維配向角が $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $45^\circ$ あるいは $-45^\circ$ の角度の組合せで表され、積層板の中央面に対称な積層構成を与える。このパターンは境界条件の組合せに特徴があり、1組の対辺が単純支持や固定で強化すべき方向が明白か、あるいは積層板の境界条件に対称性がある。表中では、3. CFFF, 4. SSFF, 6. CCFF, 7. SFSF, 8. SF CF, 9. CF CF, 10. SSSF, 11. SCSF, 14. CSCF, 15. CCCF, 16. SSSS, 18. SSCC, 19. SCSC, 20. CCCSと21. CCCCが

このパターンに相当する。

表 4-1 積層正方形板の固有振動数の収束状況  
(Graphite/epoxy,  $[30^\circ/-30^\circ/30^\circ]$ ,  $a/b=1$ )

Boundary	Term numbers	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
FFFF	4*4	5.875	8.074	14.56	21.02	21.78
	6*6	5.617	7.222	13.04	17.71	17.93
	8*8	5.596	7.179	12.82	17.45	17.51
	10*10	5.596	7.179	12.82	17.45	17.51
SSSS	4*4	11.82	21.82	36.37	41.71	62.73
	6*6	11.76	21.59	35.57	35.83	49.51
	8*8	11.73	21.58	35.49	35.53	48.81
	10*10	11.72	21.57	35.48	35.53	48.73
CCCC	4*4	21.46	32.81	51.05	52.71	68.39
	6*6	21.44	32.78	49.59	52.41	65.79
	8*8	21.44	32.77	49.55	52.39	65.68
	10*10	21.44	32.77	49.55	52.39	65.67
CSSF	4*4	12.78	18.08	32.56	40.24	49.48
	6*6	12.69	17.73	28.05	38.77	45.15
	8*8	12.68	17.71	27.78	38.44	43.82
	10*10	12.67	17.71	27.77	38.42	43.75

表 4-2 積層正方形板の固有振動数と他の解の比較  
(Graphite/epoxy, SSSS,  $a/b=1$ )

Lamina	Method	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$	Present	11.29	18.55	33.06	40.11	45.16
	Exact	11.29	18.55	33.06	40.11	45.16
	Error (%)	0	0	0	0	0
$[30^\circ/-30^\circ/30^\circ]$	Present	11.73	21.58	35.51	35.53	48.81
	Ref. (19)	11.97	21.97	35.88	36.04	49.61
	Error (%)	-1.99	-1.78	-1.06	-1.42	-1.61

表4-3 8層正方形積層板の振動特性の最適解

(Graphite/epoxy,  $a/b = 1$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Frequency
1.FFFF	[26.0/-47.3/62.5/-10.9/-41.9/88.3/-40.0/52.7]	9.819
2.SFFF	[48.0/-41.1/49.3/-39.2/-40.1/47.8/-41.3/48.3]	5.314
3.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	3.514
4.SSFF	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	2.558
5.SCFF	[68.3/-45.4/66.6/-57.8/-52.7/67.7/-45.3/67.6]	4.181
6.CCFF	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	4.851
7.SFSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.859
8.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.41
9.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.37
10.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.15
11.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.26
12.SSCF	[-2.1/-3.6/-1.9/-4.7/-1.1/-1.4/-2.4/-3.7]	15.68
13.SCCF	[-3.3/-3.0/-4.3/-2.7/-0.5/-4.3/-3.9/-2.6]	15.78
14.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.53
15.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.58
16.SSSS	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	14.09
17.SSSC	[66.8/-57.3/71.7/-57.9/58.0/73.4/-56.4/67.1]	16.87
18.SSCC	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	18.14
19.SCSC	[90/90/90/90/90/90/90/90]	23.16
20.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	23.44
21.CCCC	[0/90/0/90/90/0/90/0]	23.87

表 4-4 8層長方形板の最適解と他の結果の比較

(Graphite/epoxy,  $a/b = 1$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Frequency	Optimum
1.FFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	5.515	9.819
	[0/90/0/90/90/0/90/0]	5.292	
	[30/-30/30/-30/-30/30/-30/30]	6.973	
	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	7.969	
2.SFFF	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	5.216	5.314
5.SCFF	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	3.745	4.181
	[60/-60/60/-60/-60/60/-60/60]	4.046	
12.SSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.63	15.68
13.SCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.71	15.78
17.SSSC	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	16.19	16.87
	[60/-60/60/-60/-60/60/-60/60]	16.79	

第2のパターンは、残りの5. SCFF, 12. SSCF, 13. SCCFと17. SSSCに見られ、基本振動数を増加させるための強化方向が明白でなく、また17. SSSCを除くと境界条件の組合せに対称性が見られない。この場合でも、中央面に関して対称積層と似た構成になっているが、最適繊維配向角は $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $-45^\circ$ とは異なる値をとっている。

以上の説明のように、第1のパターンでは、対称積層構成である最適解の力学的意味がよく観察される。これに対して第2のパターンでは、連成剛性を持ち非対称な積層構成を示した最適解の正当性が明白でない。このため表4-4では、それらの最適解に近い積層構成と同一の境界条件を持つ積層板の基本振動数を求めて、最適解の基本振動数と比較した。その結果、表中に見られるように、本最適解は表中の他の積層構成よりすべて高い基本振動数を与える。

また、Graphite/epoxy 8層板の最適振動モードは本論文の付録1の最適振動モード図の付1-1~1-21に示す。図中は、左辺に平面図、右辺に立体図を表示している。モード1-1~1-2は、拘束する条件が少ないため剛体運動が存在するから、固体運動モードを除いた最低次モードを表す。

表4-5 8層長方形積層板の振動特性の最適解

(Graphite/epoxy,  $a/b = 1.25$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Frequency
1.FFFF	[86.5/-50.9/48.4/-51.0/-49.9/44.1/-47.6/44.5]	7.594
2.SFFF	[47.8/-41.5/47.2/-40.8/-42.3/49.1/-41.4/47.7]	4.289
3.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	3.515
4.SSFF	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	2.047
5.SCFF	[63.8/-45.0/67.6/-48.6/-50.4/68.0/-44.9/63.3]	3.043
6.CCFF	[25.2/-49.3/26.0/-52.5/-48.2/27.8/-50.7/24.7]	4.062
7.SFSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.861
8.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.41
9.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.37
10.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.05
11.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.11
12.SSCF	[-1.1/-2.9/-5.1/-1.1/-1.0/-4.3/-2.2/-1.9]	15.58
13.SCCF	[-2.8/-3.5/-1.4/-3.1/-2.3/-3.4/-2.6/-2.9]	15.66
14.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.47
15.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.49
16.SSSS	[34.6/-37.4/34.3/-36.4/-37.4/33.5/-37.7/34.6]	11.63
17.SSSC	[48.5/-44.3/48.6/-44.8/-44.4/48.2/-44.5/48.4]	12.68
18.SSCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	16.25
19.SCSC	[90/90/90/90/90/90/90/90]	15.17
20.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.98
21.CCCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	23.17



表 4 - 6 8層長方形積層板の振動特性の最適解

(Graphite/epoxy,  $a/b = 1.5$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Frequency
1.FFFF	[82.3/-51.4/31.7/-47.3/-60.1/45.4/-57.3/50.4]	6.207
2.SFFF	[48.1/-41.0/50.3/-43.9/-41.7/46.8/-41.1/48.2]	3.594
3.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	3.515
4.SSFF	[44.6/-44.5/44.3/-45.0/-45.0/45.3/-44.6/44.6]	1.709
5.SCFF	[62.3/-44.5/60.2/-42.9/-43.6/60.5/-43.8/61.0]	2.381
6.CCFF	[7.3/8.5/10.9/7.8/5.3/8.9/6.8/9.7]	3.837
7.SFSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.862
8.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.41
9.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.37
10.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.993
11.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.02
12.SSCF	[-1.6/-1.2/-3.9/-1.8/-0.6/-1.9/-2.7/-2.4]	15.53
13.SCCF	[-2.4/-2.5/-4.2/-1.6/-0.9/-3.4/-2.7/-2.2]	15.56
14.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.44
15.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.46
16.SSSS	[-16.8/27.7/-10.1/27.1/28.0/-13.2/29.1/-14.4]	10.57
17.SSSC	[24.6/-35.4/24.1/-34.0/-30.8/23.9/-34.5/26.2]	10.89
18.SSCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.95
19.SCSC	[54.1/-42.6/54.2/-42.5/-42.8/55.8/-42.8/54.1]	11.69
20.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.76
21.CCCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.86

表4-7 8層長方形積層板の振動特性の最適解

(Graphite/epoxy,  $a/b = 1.75$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Frequency
1.FFFF	[53.2/-53.4/90.0/-20.8/-13.9/48.8/-56.4/90.0]	5.227
2.SFFF	[48.3/-41.4/48.9/-40.7/-42.5/48.1/-41.3/48.8]	3.093
3.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	3.515
4.SSFF	[44.6/-44.2/45.2/-44.8/-44.5/45.2/-44.1/44.6]	1.467
5.SCFF	[59.5/-44.7/60.1/-42.9/-43.5/57.3/-44.3/60.6]	1.949
6.CCFF	[5.8/8.1/7.3/9.6/4.8/6.1/6.9/7.8]	3.737
7.SFSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.863
8.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.41
9.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.37
10.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.959
11.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.979
12.SSCF	[-1.4/-2.5/-1.9/-3.4/-2.4/-0.9/-2.1/-1.9]	15.51
13.SCCF	[-1.9/-2.0/-1.1/-2.4/-2.3/-1.7/-1.9/-2.2]	15.52
14.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.42
15.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.43
16.SSSS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.29
17.SSSC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.38
18.SSOC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.79
19.SCSC	[13.9/-23.1/-6.9/-20.1/-20.8/-5.4/-26.2/10.8]	10.52
20.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.65
21.CCCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.71

表 4-8 8層長方形積層板の振動特性の最適解

(Graphite/epoxy,  $a/b = 2$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Frequency
1.FFFF	[50.1/-60.3/88.2/-58.4/-61.0/88.5/-59.5/83.3]	4.161
2.SFFF	[48.6/-41.2/48.5/-43.1/-43.1/49.9/-41.2/48.2]	2.712
3.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	3.515
4.SSFF	[45.5/-44.6/44.2/-44.5/-44.3/44.9/-44.3/45.1]	1.286
5.SCFF	[57.1/-46.3/66.7/-44.6/-45.6/56.2/-44.4/58.3]	1.647
6.CCFF	[5.2/6.1/4.4/7.6/5.7/5.0/5.3/6.3]	3.677
7.SFSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.864
8.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.41
9.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.37
10.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.938
11.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.951
12.SSCF	[-1.4/-0.9/-2.9/-0.9/-0.2/-2.0/-1.1/-1.9]	15.48
13.SCCF	[-1.8/-1.6/-3.0/-0.7/-1.3/-2.1/-1.9/-1.0]	15.49
14.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.41
15.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.42
16.SSSS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.19
17.SSSC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.24
18.SSCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.69
19.SCSC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.32
20.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.58
21.CCCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.61

表4-9 8層長方形板の辺長比と最適解の変化

(Graphite/epoxy,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	a/b=1.0	a/b=1.25	a/b=1.5	a/b=1.75	a/b=2.0
1.FFFF	9.819	7.594	6.207	5.227	4.161
2.SFFF	5.314	4.289	3.594	3.093	2.712
3.CFFF	3.514	3.515	3.515	3.515	3.515
4.SSFF	2.558	2.047	1.709	1.467	1.286
5.SCFF	4.181	3.043	2.381	1.949	1.647
6.CCFF	4.851	4.062	3.837	3.737	3.677
7.SFSF	9.859	9.861	9.862	9.863	9.864
8.SFCF	15.41	15.41	15.41	15.41	15.41
9.CFCF	22.37	22.37	22.37	22.37	22.37
10.SSSF	10.15	10.05	9.993	9.959	9.938
11.SCSF	10.26	10.11	10.02	9.979	9.951
12.SSCF	15.68	15.58	15.53	15.51	15.48
13.SCCF	15.78	15.66	15.56	15.52	15.49
14.CSCF	22.53	22.47	22.44	22.42	22.41
15.CCCF	22.58	22.49	22.46	22.43	22.42
16.SSSS	14.09	11.63	10.57	10.29	10.19
17.SSSC	16.87	12.68	10.89	10.38	10.24
18.SSCC	18.14	16.25	15.95	15.79	15.69
19.SCSC	23.16	15.17	11.69	10.52	10.32
20.CCCS	23.44	22.98	22.76	22.65	22.58
21.CCCC	23.87	23.17	22.86	22.71	22.61

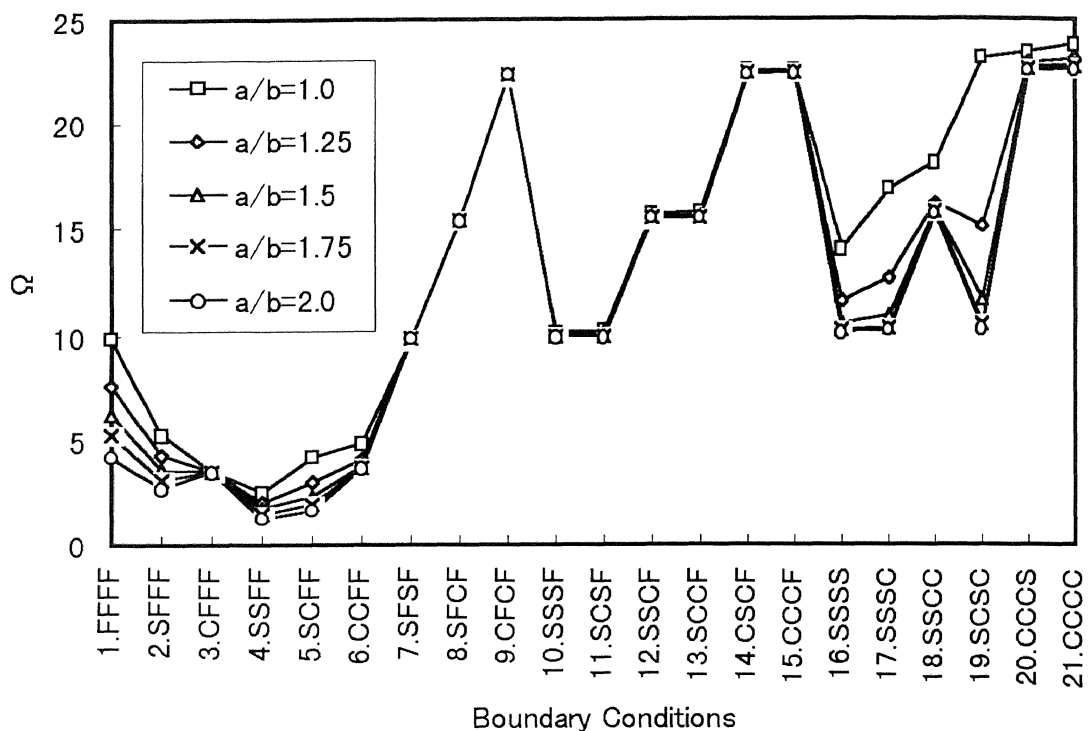


図4-3 境界条件と最適基本振動数の関係

(材料： Graphite/epoxy 8層長方形板)

辺長比の変化により最適基本振動数の変化を考察するため、他の計算条件は固定にし、辺長比  $a/b = 1.25, 1.5, 1.75, 2.0$  の4つの場合について最適設計を行った。その結果をそれぞれ表4-5～表4-8に与える。また、正方形板の結果との比較は表4-9と図4-3, 図4-4に示す。全体的には、辺長比の増加に伴い最適振動数は徐々に減少することが見られる。また、以上に説明したように、1.FFFFと2.SFFFの境界条件では、剛体運動モードが存在するが、ここでは、剛体運動モード以外の基本振動数を最大化するから、図中に示した1.FFFFと2.SFFFの境界条件における最適基本振動数は、他の隣に自由辺が存在する境界条件の最適解より大きい値となった。

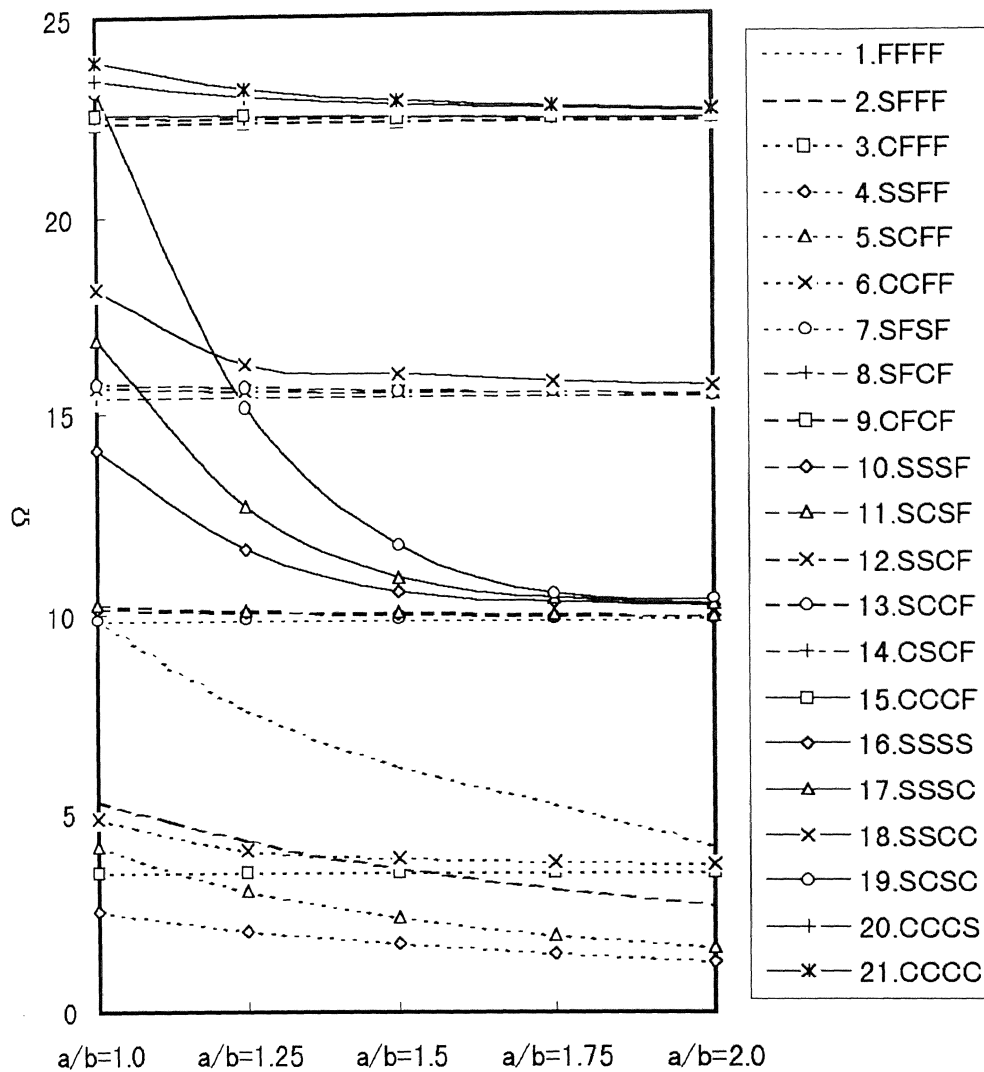


図4-4 辺長比と最適基本振動数の関係

(材料： Graphite/epoxy 8層長方形板)

一方、表4-10は、21通りの境界条件に対して最適化計算により得られた E-Glass/epoxy 材料の8層正方形板の最適繊維配向角と基本振動数である。前例の Graphite/epoxy 材料 ( $E_1/E_2 = 15.40$ ) と比較して、本例の E-Glass/epoxy 材料 ( $E_1/E_2 = 2.45$ ) の異方性が1/6以下である。その影響が最適解に現れていると思われる。

表4-10により、境界条件1. FFFF, 2. SFFFでは、前例の表4-3に示した結果と同様に、拘束する条件が少ないため剛体運動が存在するから、剛体運動以外の振動モードは積層板自身の各剛性と慣性がバランスを取ることで存在する。このため、剛体運動モード以外の基本振動数を最大化するには、積層板はなるべく弱い剛性方向が出ないように各層ラミナの繊維配向角が全方向に均一化する方がよいと思われる。しかし、1. FFFFでは、前例の種々の角度に分散した最適繊維配向角の分布と異なり、本例における剛体運動以外の基本振動モードの最適繊維配向角は対称積層の $[45/-45/45/-45]_s$ となった。この理由として、前例のGraphite/epoxy材料と異なり異方性の弱いE-Glass/epoxy材料では、特殊な角度でなくとも全方向への剛性バランスが取りやすいためと推察される。幾何学的に弱い剛性方向の対角線方向に異方性を持つ繊維を利用し補強することによって、全体的に対辺方向と剛性バランスが取られるようにすればよいと考えられる。一方、(2) SFFFでは、1番目の辺( $x=-a/2$ )に単純支持の拘束があるため、表4-3の結果とわずかの数値の違いは見られるが、同様にほぼ $[45/-45/45/-45]_s$ のアングルプライ積層に近い最適繊維配向角が得られた。他の境界条件における最適解は、表4-3のGraphite/epoxy積層板と同じく2つのパターンに分類される。

第1のパターンは、その最適な繊維配向角が $0^\circ, 90^\circ, 45^\circ, -45^\circ$ の角度の組合せで表され、積層板の中央面に対称な積層構成を与える。このパターンは境界条件に特徴があり、1組の対辺が単純支持や固定で強化すべき方向が明白か、あるいは積層板の境界条件に対称性がある。表中では、3. CFFF, 4. SSFF, 7. SFSF, 8. SF CF, 9. CF CF, 10. SSSF, 11. SC SF, 14. CSCF, 15. CCCF, 16. SSSS, 18. SS CC, 19. SC SC, 20. CCCSと21. CCCCがこのパターンに相当する。表4-3のGraphite/epoxy積層板の最適解で第1パターンになった境界条件と比較し、6. CCFFを除くと、表4-3と同一の最適繊維配向角を与えている。

表4-11で6. CCFFは最適化計算の結果は複雑な繊維配向角が得られたが境界条件の対称軸と繊維配向角が一致する $[45/-45/45/-45]_s$ の場合も基本振動数が同一の5.987を与えておりこれが最適解と考えて良い。それに対して表4-3のGraphite/epoxyは、最適繊維配向角が $45^\circ$ と $-45^\circ$ 方向ともに剛性を強化する $[45/-45/45/-45]_s$ であった。その差は、この境界条件では、基本振動数増加のために2つの固定端からの $45^\circ$ 方向の曲げを拘束する必要があるが、それだけでは $-45^\circ$ 方向に柔く $45^\circ$ 方向を軸とするねじれモードが生じる。このため異方性

の強い Graphite/epoxy では外から偶数番目の層は  $-45^\circ$  として、両方向の剛性をバランスさせている。それに対し、異方性の弱い E-Glass/epoxy ではねじれモードは生じにくく、すべての角度が  $45^\circ$  に揃う最適解が得られたと思われる。

表4-10 8層長方形積層板の振動特性の最適解

(E-Glass/epoxy,  $a/b = 1$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Frequency
1.FFFF	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	12.19
2.SFFF	[45.6/-42.5/45.4/-41.9/-42.6/46.0/-42.8/46.3]	6.078
3.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	3.507
4.SSFF	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	2.999
5.SCFF	[69.2/90.0/69.7/-88.8/-89.0/69.7/-89.9/69.3]	4.783
6.CCFF	[45.6/46.3/47.2/42.2/38.2/46.4/43.3/46.4]	5.987
7.SFSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.821
8.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.37
9.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.33
10.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.91
11.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	11.44
12.SSCF	[-5.3/-5.3/-6.3/-3.0/-1.4/-8.6/-5.9/-4.1]	16.26
13.SCCF	[-6.3/-6.5/-2.9/-7.9/-9.1/-3.5/-6.6/-6.1]	16.67
14.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.96
15.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	23.23
16.SSSS	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	16.49
17.SSSC	[66.1/-58.9/67.4/-62.1/-59.8/68.1/-60.2/65.9]	19.78
18.SSCC	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	22.06
19.SCSC	[90/90/90/90/90/90/90/90]	25.62
20.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	27.02
21.CCCC	[0/90/0/90/90/0/90/0]	29.11

第2のパターンは表4-3と同じ、5. SCFF, 12. SSCF, 13. SCCFと17. SSSCであるが、基本振動数を増加させるための強化方向が明白でなく、境界上の拘束に明確な規則性や対称性が見られない場合で、最適繊維配向角は  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $-45^\circ$  とは異なる値をとって、全体的に中央面に関する対称積層と似た構成となっている。



表 4-11 8層長方形板の最適解と他の結果の比較

(E-Glass/epoxy,  $a/b = 1$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Frequency	Optimum
1.FFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.02	12.19
2.SFFF	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	6.073	6.078
5.SCFF	[90/90/90/90/90/90/90/90]	4.646	4.783
	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	4.581	
	[60/-60/60/-60/-60/60/-60/60]	4.752	
12.SSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	16.21	16.26
13.SCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	16.59	16.67
17.SSSC	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	19.43	19.78
	[60/-60/60/-60/-60/60/-60/60]	19.76	

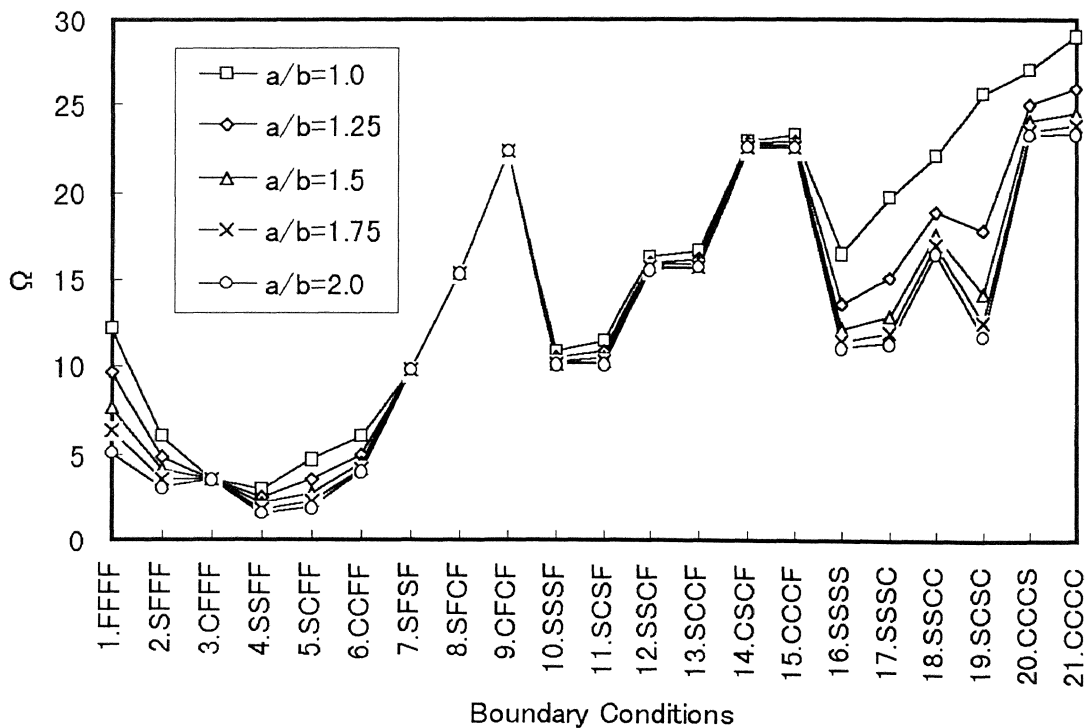


図 4-5 境界条件と最適基本振動数の関係

(材料: E-Glass/epoxy 8層長方形板)

前例と同じく第1のパターンでは対称積層構成である最適解の力学的意味がよく観察されるが、第2のパターンでは連成剛性を持ち非対称な積層構成を示した最適解の正当性が明白でない。このため表4-12には、表4-11中における第2のパターンの境界条件について、最適解の近傍の繊維配向角に対して積層板の基本振動数を求めて、それに対応する最適解と比較した。この表から、その差はわずかであるが、複雑な繊維配向角を持つ本最適解がより高い振動数を与えていることがわかる。

表4-12 8層長方形積層板の振動特性の最適解

(E-Glass/epoxy,  $a/b = 1.25$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Frequency
1.FFFF	[42.2/-49.2/44.4/-46.1/-46.6/38.6/-50.1/42.5]	9.691
2.SFFF	[46.4/-43.3/45.8/-43.5/-43.1/46.6/-43.3/46.4]	4.892
3.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	3.509
4.SSFF	[-46.2/-47.5/-46.8/-45.1/-42.1/-48.7/-45.4/-47.4]	2.507
5.SCFF	[63.5/-48.3/59.9/-46.5/-48.6/60.7/-48.0/62.7]	3.494
6.CCFF	[26.7/24.8/23.1/23.0/24.5/26.3/23.8/25.2]	4.976
7.SFSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.829
8.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.38
9.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.34
10.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.54
11.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.81
12.SSCF	[-4.0/-2.9/-3.0/-0.5/-2.4/-6.0/-2.3/-3.2]	15.95
13.SCCF	[-5.2/-3.9/-5.1/-3.7/-3.8/-4.5/-4.2/-4.2]	16.16
14.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.74
15.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.88
16.SSSS	[33.4/-37.4/34.6/-34.8/-36.4/31.2/-36.4/33.9]	13.58
17.SSSC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.14
18.SSCC	[1.6/0.6/2.6/-1.1/1.5/1.7/1.3/0.3]	18.88
19.SCSC	[90/90/90/90/90/90/90/90]	17.86
20.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	24.99
21.CCCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	25.98

表 4-13 8層長方形積層板の振動特性の最適解

(E-Glass/epoxy,  $a/b = 1.5$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Frequency
1.FFFF	[51.1/-61.9/88.7/-66.8/-74.4/34.3/-64.2/32.2]	7.736
2.SFFF	[46.3/-43.4/46.7/-44.2/-44.0/47.9/-43.5/46.7]	4.093
3.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	3.511
4.SSFF	[-48.0/-48.7/-47.6/-46.0/-44.4/-50.5/-47.5/-48.3]	2.078
5.SCFF	[59.9/-47.9/60.7/-47.7/-45.6/60.5/-47.3/60.0]	2.739
6.CCFF	[17.1/16.6/15.9/23.3/24.6/11.6/18.1/18.6]	4.469
7.SFSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.835
8.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.39
9.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.35
10.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.33
11.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.49
12.SSCF	[-2.0/-2.9/-2.1/-2.8/-3.5/-3.3/-3.5/-3.2]	15.79
13.SCCF	[-3.8/-3.8/-2.3/-3.4/-4.3/-3.8-3.5/-3.4]	15.91
14.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.63
15.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.71
16.SSSS	[-17.9/23.2/-10.8/21.8/22.8/-13.4/24.1/-16.8]	12.15
17.SSSC	[30.3/-31.6/28.7/-30.2/-33.6/26.9/-34.3/28.4]	12.93
18.SSCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	17.65
19.SCSC	[49.2/-44.9/49.5/-44.6/-43.0/50.4/-43.2/50.7]	14.16
20.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	24.04
21.CCCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	24.56

表4-14 8層長方形積層板の振動特性の最適解

(E-Glass/epoxy,  $a/b = 1.75$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Frequency
1.FFFF	[90.0/-57.3/88.9/-72.3/-71.9/53.5/-64.6/53.3]	6.384
2.SFFF	[46.2/-42.9/46.4/-42.6/-43.8/46.1/-43.6/46.6]	3.516
3.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	3.511
4.SSFF	[-43.9/-48.4/-47.4/-42.5/-43.5/-47.2/-47.4/-47.1]	1.771
5.SCFF	[58.1/-45.8/56.6/-45.7/-47.3/58.9/-46.3/57.0]	2.246
6.CCFF	[14.6/12.3/14.0/8.1/15.1/16.3/13.9/11.8]	4.179
7.SFSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.839
8.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.39
9.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.35
10.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.21
11.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.31
12.SSCF	[-1.9/-2.5/-2.4/-3.2/-2.4/-2.3/-3.3/-2.9]	15.69
13.SCCF	[-2.8/-3.1/-2.1/-2.6/-1.7/-2.7/-1.4/-2.2]	15.76
14.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.56
15.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.61
16.SSSS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	11.49
17.SSSC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	11.92
18.SSCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	16.98
19.SCSC	[11.8/-24.8/2.3/-23.1/-24.5/8.4/-23.5/10.3]	12.51
20.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	23.53
21.CCCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	23.83

表 4-15 8層長方形積層板の振動特性の最適解

(E-Glass/epoxy,  $a/b = 2.0$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Frequency
1.FFFF	[90.0/38.6/89.9/48.3/90.0/89.9/90.0/90.0]	5.107
2.SFFF	[46.7/-43.3/46.7/-42.7/-43.7/45.5/-44.2/46.5]	3.079
3.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	3.512
4.SSFF	[-49.1/-49.0/-50.3/-48.6/-46.9/-47.7/-51.4/-49.0]	1.539
5.SCFF	[56.8/-46.8/57.7/-47.9/-46.8/57.6/-46.0/56.3]	1.899
6.CCFF	[10.7/11.9/10.3/13.4/10.2/8.9/11.6/10.5]	4.001
7.SFSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	9.843
8.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	15.39
9.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.35
10.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.13
11.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.19
12.SSCF	[-1.7/-3.3/-1.8/-2.4/-2.6/-2.9/-1.4/-1.9]	15.62
13.SCCF	[-2.1/-1.5/-3.6/-4.1/-3.7/0.5/-3.5/-2.6]	15.67
14.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.51
15.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	22.54
16.SSSS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	11.11
17.SSSC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	11.39
18.SSCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	16.56
19.SCSC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	11.75
20.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	23.22
21.CCCC	[0/0/0/0/0/0/0/0]	23.41

表4-16 8層長方形板の辺長比と最適解の変化

( E-Glass/epoxy ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$  )

Boundary	a/b=1.0	a/b=1.25	a/b=1.5	a/b=1.75	a/b=2.0
1.FFFF	12.19	9.691	7.736	6.384	5.107
2.SFFF	6.078	4.892	4.093	3.516	3.079
3.CFFF	3.507	3.509	3.511	3.511	3.512
4.SSFF	2.999	2.507	2.078	1.771	1.539
5.SCFF	4.783	3.494	2.739	2.246	1.899
6.CCFF	5.987	4.976	4.469	4.179	4.001
7.SFSF	9.821	9.829	9.835	9.839	9.843
8.SFCF	15.37	15.38	15.39	15.39	15.39
9.CFCF	22.33	22.34	22.35	22.35	22.35
10.SSSF	10.91	10.54	10.33	10.21	10.13
11.SCSF	11.44	10.81	10.49	10.31	10.19
12.SSCF	16.26	15.95	15.79	15.69	15.62
13.SCCF	16.67	16.16	15.91	15.76	15.67
14.CSCF	22.96	22.74	22.63	22.56	22.51
15.CCCF	23.23	22.88	22.71	22.61	22.54
16.SSSS	16.49	13.58	12.15	11.49	11.11
17.SSSC	19.78	15.14	12.93	11.92	11.39
18.SSCC	22.06	18.88	17.65	16.98	16.56
19.SCSC	25.62	17.86	14.16	12.51	11.75
20.CCCS	27.02	24.99	24.04	23.53	23.22
21.CCCC	29.11	25.98	24.56	23.83	23.41

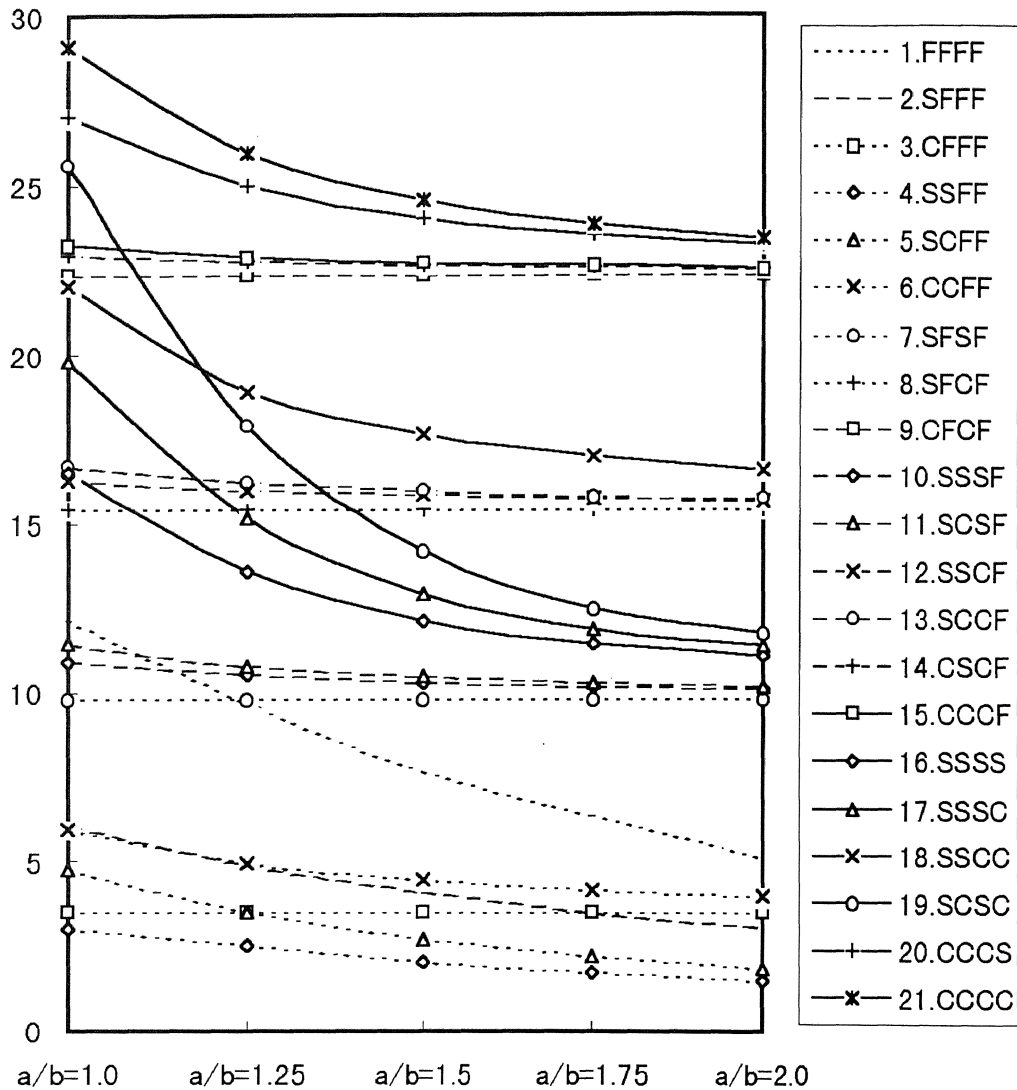


図4-6 辺長比と最適基本振動数の関係

(材料：E-Glass/epoxy 8層長方形板)

E-Glass/epoxy 正方形板の最適振動モードは、本論文の付録2の最適振動モード図の付2-1～2-21に表している。Graphite/epoxy 正方形板の最適振動モード2-1～2-2と比較して、同一の境界条件の最適振動数は多少違いがあるが、最適振動モードは（剛体運動モードがあるものを除く）非常に似ている。すなわち、振動モードに及ぼす影響は、境界条件より材質の方がかなり弱いと見られる。

さらに、辺長比の影響を考察するため、 $a/b = 1.25, 1.5, 1.75, 2.0$  に対して最適化計算を

行った。その結果をそれぞれ表4-12~表4-15に与える。また、同一材質の正方形板の最適解と比較した結果は表4-16と図4-5, 図4-6に表す。

全体的には、辺長比の増加に伴い最適振動数は徐々に減少し、前例と比べ E-Glass/epoxy 材料の最適基本振動数は大きい値を与えることがわかる。

#### 4.6 本章のまとめ

コンプレックス法を種々の境界条件の組合せを持つ積層長方形板の基本振動数の最大化設計問題に適用して、設計変数には、各層ラミナの繊維配向角を用いた。目的関数である基本振動数の計算には、任意の境界条件の組合せができるように変位関数を工夫したりツツ法を適用した。

最適化計算例として、異方性がかなり強い Graphite/epoxy 材料と比較的弱い E-Glass/epoxy 材料の8層正方形板を扱い、それぞれ21種類の境界条件の組合せに対して最適繊維配向角を計算した。その結果、最適な繊維配向角の分布は境界条件の組合せによりかなり影響を受けるが、全体の傾向として2つのパターンに分類されることが明らかになった。

また、積層板の全体的な力学特性を示す基本振動数を最大化するために、設計変数とした各層ラミナの繊維配向角の分布を適当に調節することにより、全方向にわたり弱い剛性方向がないよう、すなわち積層板の全体的な剛性バランスを取ることが非常に重要な設計ポイントとなることを明らかにした。

本章に用いたコンプレックス最適化方法は、積層板振動解析の部分から独立した手法であり、感度解析が不要なことから広い範囲の最適化問題に拡張可能である。とくに基本振動のモード形が自明でないような他の問題にも効果的な適用が可能であると思われる。



# 第5章 支持点と繊維配向角を組合せた積層 長方形板の基本振動数の最大化設計

## 5. 1 まえがき

FRPなど繊維強化複合材料は、繊維配向角度や積層ラミナの厚さなどを設計変数とすることにより最適設計が可能となる材料として、各産業分野に使用する例がよく見られている。複合材料の基本的な構造要素である積層長方形板の力学特性に関する種々の最適化の研究も行われており、特に、振動問題については設計変数を繊維配向角とする研究報告が多い<sup>(51)~(53)</sup>。

第4章では、任意境界条件を考慮する積層長方形板の振動解析法と複素法を利用して、一般的な積層構成を持つ積層長方形板の基本振動数を最大化する繊維配向角の最適設計法を検討した。また、その数値計算例もまとめて述べた。

しかし、この設計変数に繊維配向角を用いる方法は、積層平板の標準的な設計法であるが、それだけでは最大化できる基本振動数の範囲に限界がある。これに対して、積層平板を支える点の適正な配置により、基本振動数をかなり増加させることが考えられる。成田<sup>(65)</sup>は、等方性の平板、シェル、はりなどの連続体の最適化に、支持点の位置を設計変数とする設計法を報告した。それによれば、積層平板の振動特性の最適化には、繊維配向角の適正な配布と支持点の適正な配置の2つの手段を同時に用いることが効果的と推測される。

以上の観点から、本章では、性質が異なる複数の設計変数、すなわち積層長方形板の繊維配向角と支持点の位置を組み合わせた最適設計法を提案する。つまり、異方性を示す積層板の繊維配向角と方向性が強い支持点位置の異種類の設計変数を、同時に調節することにより、基本振動数を最大化する状態に対応する最適なカップリング効果を示す組合せ解を求める。積層長方形板の境界条件は、4辺に自由、単純支持、固定の3種類の条件を任意に組み合わせた拘束

条件とする。振動解析は、リッツ法に基づく弾性点支持を有する積層長方形板の振動解析法を使い、最適化アルゴリズムは異種類の設計変数を同時に効果的に処理されるように改良したコンプレックス法を適用した。

数値計算例では、長方形板に可能な21種類の境界条件の組合せに対して、異方性の程度が大きいCFRP材料を積層し構成された正方形板を取り上げる。この積層板の点支持位置座標と繊維配向角の最適な組合せを具体的に求めること、また、その最適解の力学的な意味についても詳細な検討を行う。これらの数値例を通じて、この種の最適化問題に、本章に提案した設計法が有効であることを示す。

## 5.2 点支持を有する積層板の振動解析法

弾性支持点を有する積層長方形板について、その中央面を図5-1に示す。積層材は、非対称積層を含む一般的な積層構成である。積層板の寸法は $a \times b \times h$  ( $h$ は積層板の板厚である)として、座標系 $o-xyz$ の原点 $o$ を板中央面の中心にとる。板の横方向に配布する弾性な $m$ 個支持点の位置座標は、 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ と記す。四辺における拘束条件

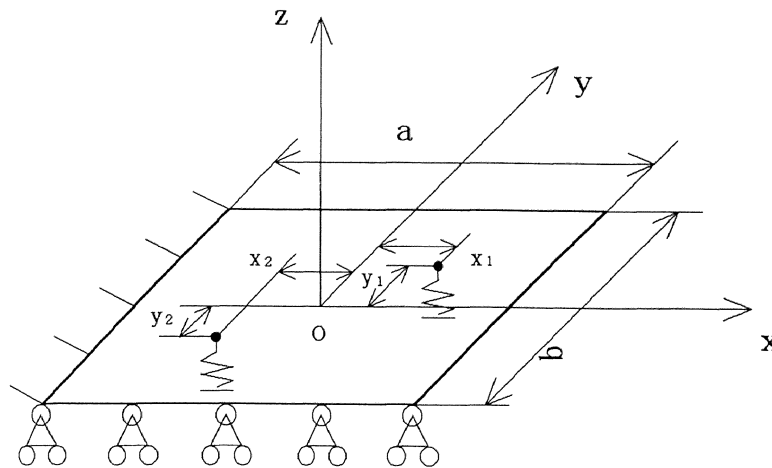


図5-1. 点支持を有する積層長方形板と座標系

は自由，単純支持，固定（それぞれF，S，Cの記号で表す）として，この3種類の範囲で任意の組合せとする。その境界条件の表記法は，例えば，図5-1の「固定-単純支持-自由-自由」， $(x = -a/2, y = -b/2, x = a/2, y = b/2)$ の例ではCSFFとなり，本章の問題における他の組合せも同様の表記法により表す。

本章における弾性点支持を有する積層板の振動解析には，変位関数としてべき級数を用いたリッツ法を適用する。ここで，積層長方形板の任意の境界条件を満足させるために，式(4-1)と同様に幾何学境界条件を自動的に満足する境界条件インデックスを持つ変位関数を導入する。

$$\begin{aligned}
 u_0(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} p_{ij} X_i(\xi) Y_j(\eta) \\
 v_0(\xi, \eta) &= \sum_{k=0}^{I-1} \sum_{l=0}^{J-1} q_{kl} X_k(\xi) Y_l(\eta) \quad \dots \dots \dots (5-1) \\
 w_0(\xi, \eta) &= \sum_{m=0}^{I-1} \sum_{n=0}^{J-1} r_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta)
 \end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
 X_i(\xi) &= \xi^i (\xi + 1)^{bc11} (\xi - 1)^{bc31} \\
 X_k(\xi) &= \xi^k (\xi + 1)^{bc12} (\xi - 1)^{bc32} \\
 X_m(\xi) &= \xi^m (\xi + 1)^{bc13} (\xi - 1)^{bc33} \\
 Y_j(\eta) &= \eta^j (\eta + 1)^{bc21} (\eta - 1)^{bc41} \quad \dots \dots \dots (5-2) \\
 Y_l(\eta) &= \eta^l (\eta + 1)^{bc22} (\eta - 1)^{bc42} \\
 Y_n(\eta) &= \eta^n (\eta + 1)^{bc23} (\eta - 1)^{bc43}
 \end{aligned}$$

と与えられる。ここで， $p_{ij}$ ， $q_{kl}$ ， $r_{mn}$ は未定係数であり， $I$ ， $J$ はリッツ法計算の項数である。また， $bcij$ は境界条件インデックスであり， $I$ は長方形積層板の辺（ $i = 1, 2, 3, 4$ ：順に  $x = -a/2$ ， $y = -b/2$ ， $x = a/2$ ， $y = b/2$ ）を示し， $J$ は拘束条件の対象（ $j = 1, 2, 3$ ：順

に  $u, v, w$ ) を表わす。変位を自由にする場合は  $bcij = 0$ , 並進変位を拘束する場合は  $bcij = 1$ , 回転変位を拘束する場合は  $bcij = 2$  とする。

弾性点支持の集中ばねに蓄えられる弾性エネルギーは、式 (3-26) により

$$U_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I k_c^{(i)} w_0^2 \dots \dots \dots (5-3)$$

と与えられる。ここで、 $k_c^{(i)}$  は  $i$  番目集中ばねの剛性係数であり、 $I$  は集中ばねの個数である。

さらに、無次元量の式 (3-37) ~ 式 (3-41) と式 (3-45) を代入し、式 (5-3) は

$$U_c = \left( \frac{D_0}{\alpha\beta^2} \right) \alpha \bar{U}_c \dots \dots \dots (5-4)$$

にまとめられる。ここで

$$\bar{U}_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \bar{k}_c^{(i)} \bar{w}_0^2 \dots \dots \dots (5-5)$$

と与えられる。

積層板の弾性ひずみエネルギーは

$$U = U_s + U_{bs} + U_b \dots \dots \dots (5-6)$$

で与えられる。ここで、 $U_s$  は面内ひずみエネルギー、 $U_{bs}$  は面内と面外連成ひずみエネルギー、 $U_b$  は面外ひずみエネルギーである。それぞれ、下記に式で表わされる。

$$U_s = \frac{1}{2} \iint_A \{\varepsilon_0\}^T [A] \{\varepsilon_0\} dx dy$$

$$U_{bs} = \frac{1}{2} \iint_A \left[ \{\varepsilon_0\}^T [B] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B] \{\varepsilon_0\} \right] dx dy$$

$$U_b = \frac{1}{2} \iint_A \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} dx dy \quad \dots \dots \dots (5-7)$$

ただし、 $\{\varepsilon_0\}$  と  $\{\kappa\}$  は積層板の中央面における面内ひずみベクトルと曲率ベクトルであり、 $[A]$  は面内剛性マトリクス、 $[B]$  は面内と面外の連成剛性マトリクス、 $[D]$  は面外剛性マトリクスである。

無次元量の (3-37) ~ 式 (3-41) と式 (3-45) を代入し、式 (5-7) は

$$U_s = \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \bar{U}_s$$

$$U_{bs} = \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \bar{U}_{bs}$$

$$U_b = \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \bar{U}_b \quad \dots \dots \dots (5-8)$$

と表わされる。ここで、無次元化された弾性ひずみエネルギー成分は

$$\bar{U}_s = \frac{1}{2} \iint_A \{\bar{\varepsilon}_0\}^T [\bar{A}] \{\bar{\varepsilon}_0\} d\xi d\eta$$

$$\bar{U}_{bs} = \frac{1}{2} \iint_A \left[ \{\bar{\varepsilon}_0\}^T [\bar{B}] \{\bar{\kappa}\} + \{\bar{\kappa}\}^T [\bar{B}] \{\bar{\varepsilon}_0\} \right] d\xi d\eta$$

$$\bar{U}_b = \frac{1}{2} \iint_A \{\bar{\kappa}\}^T [\bar{D}] \{\bar{\varepsilon}_0\} d\xi d\eta \quad \dots \dots \dots (5-9)$$

と与えられる。

積層板の運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \iint_A (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) dx dy \quad \dots \dots (5-10)$$

である。無次元量の (3-37) ~ 式 (3-41) と式 (3-45) を代入し、上式は

$$T = \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \left( \frac{\Omega}{4} \right) \bar{T} \quad \dots \dots \dots (5-11)$$

と表わされる。ここで、無次元化された運動エネルギー  $\bar{T}$  と無次元化された固有振動数パラメータ  $\Omega$  は

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \iint_A (\bar{u}_0^2 + \bar{v}_0^2 + \bar{w}_0^2) dx dy \quad \dots \dots \dots (5-12)$$

$$\Omega = \omega \alpha^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} \quad \dots \dots \dots (5-13)$$

となる。

以上の式をまとめて、弾性点支持を有する積層長方形板の弾性エネルギー汎関数は

$$F = \left( \frac{D_0}{\alpha \beta^2} \right) \bar{F} \quad \dots \dots \dots (5-14)$$

$$\bar{F} = \left( \frac{\Omega^2}{4} \right) \bar{T} - \bar{U} - \bar{U}_c$$

と与えられる。

続いて、変位関数 (5-1) を弾性エネルギー汎関数 (5-14) に代入して、変位関数の中にある未定係数  $p_{ij}$ ,  $q_{kl}$ ,  $r_{mn}$  により極小化を行う。

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial p_{ij}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_{kl}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial r_{mn}} = 0 \quad \dots \dots \dots (5-15)$$

$$i, k, m = 0, 1, 2, \dots, I-1 \quad j, l, n = 0, 1, 2, \dots, J-1$$

これより、次のような未定係数に関する振動数方程式が得られる。

$$([K] - \Omega^2 [M]) \begin{Bmatrix} p_{ij} \\ q_{kl} \\ r_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots \dots \dots (5-16)$$

ここで

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{\bar{i}ij\bar{j}} & K_{\bar{k}il\bar{j}} & K_{\bar{m}in\bar{j}} \\ K_{\bar{k}il\bar{j}} & K_{\bar{k}kll} & K_{\bar{m}knl} \\ K_{\bar{m}in\bar{j}} & K_{\bar{m}knl} & K_{\bar{m}mnn} \end{bmatrix}$$

であり

$$K_{\bar{i}ij\bar{j}} = a_{11} I_{\bar{i}ij\bar{j}}^{(1100)} + \alpha^2 a_{66} I_{\bar{i}ij\bar{j}}^{(0011)} + \alpha a_{16} \left( I_{\bar{i}ij\bar{j}}^{(0110)} + I_{\bar{i}ij\bar{j}}^{(1001)} \right)$$

$$K_{\bar{k}il\bar{j}} = \alpha a_{66} I_{\bar{k}il\bar{j}}^{(1100)} + \alpha a_{12} I_{\bar{k}il\bar{j}}^{(0110)} + a_{16} I_{\bar{k}il\bar{j}}^{(1100)} + \alpha^2 a_{26} I_{\bar{k}il\bar{j}}^{(0011)}$$

$$K_{\bar{m}in\bar{j}} = -2 \left\{ b_{11} I_{\bar{m}in\bar{j}}^{(2100)} + 2\alpha^2 b_{66} I_{\bar{m}in\bar{j}}^{(1011)} + \alpha^2 b_{12} I_{\bar{m}in\bar{j}}^{(0120)} \right.$$

$$\left. + \alpha b_{16} \left( 2I_{\bar{m}in\bar{j}}^{(1110)} + I_{\bar{m}in\bar{j}}^{(2001)} \right) + \alpha^3 I_{\bar{m}in\bar{j}}^{(0021)} \right\}$$

$$K_{\bar{k}kll} = \alpha^2 a_{22} I_{\bar{k}kll}^{(0011)} + a_{66} I_{\bar{k}kll}^{(1100)} + \alpha a_{26} \left( I_{\bar{k}kll}^{(0110)} + I_{\bar{k}kll}^{(1001)} \right)$$

$$K_{\bar{m}knl} = -2 \left\{ \alpha^2 b_{22} I_{\bar{m}knl}^{(0021)} + 2\alpha b_{66} I_{\bar{m}knl}^{(1110)} + \alpha b_{12} I_{\bar{m}knl}^{(2001)} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2b_{66}I_{\bar{m}\bar{k}\bar{n}\bar{l}}^{(2100)} + \alpha^2 b_{26} \left( 2I_{\bar{m}\bar{k}\bar{n}\bar{l}}^{(1011)} + I_{\bar{m}\bar{k}\bar{n}\bar{l}}^{(0120)} \right) \Big\} \\
K_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}} = & d_{11}I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(2200)} + \alpha^4 d_{22}I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(0022)} + \alpha^2 d_{12} \left( I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(0220)} + I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(2002)} \right) \\
& + 2\alpha d_{16} \left( I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(1210)} + I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(2101)} \right) + 2\alpha^3 d_{26} \left( I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(1012)} + I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(0121)} \right) \\
& + 4\alpha^2 d_{66}I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(1111)} + \alpha \sum_i^I \bar{k}_c^{(i)} X_q(\xi_i) Y(\eta_i)
\end{aligned}$$

である。剛性比 $a_{ij}, b_{ij}, d_{ij}$ ，質量マトリクス $[M]$ ，積分表示 $I_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}\bar{n}}^{(abcd)}$ などについては，式(4-7)～式(4-10)を用いる。また，式(5-16)の固有値問題として，積層板の固有振動数パラメータ $\Omega$ が求められる。

### 5.3 最適化アルゴリズム

本章の設計問題は，最適化モデルの中に繊維配向角と点支持位置の力学的に性質の異なる設計変数を含んでいる。この種の問題にはしばしば，最適化を2つの段階に分けて行う2レベル最適化アルゴリズムが使われる。この方法を本章の問題に適用する場合は，レベル1で支持位置を固定して繊維配向角の最適解を求め，レベル2では，その最適な繊維配向角を前提条件として支持位置のみの最適化を行う方法が考えられる。しかし，2種類の設計変数の連成効果がかなり強いと考えられる本章のような最適化問題では，双方の変数を非連成化して独立な問題とした上で，真の最適解を得るのは困難と考えられる。

これに対する修正法として，レベル2の最適解をレベル1の問題に代入する反復解析方法があるが，しかし繊維配向角と点支持位置の連成効果が非常に強いので，解が2つの領域を往復して収束しないことが多い。

以上の考察から，本論文では繊維配向角と点支持の位置座標を同一のレベルで扱い，2種類の設計変数を単一のモデルに組み込んで同時に最適化する。

この結果，本章の繊維配向角と点支持位置の性質が異なる設計変数を組合わせた最適化問題は，以下のように定式化される。



$$\begin{aligned}
&\text{Find } \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T \\
&\quad x = [x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m]^T \\
&\text{Maximize } \Omega = f(\theta, x) \quad \dots \dots \dots (5-17) \\
&\text{Subject to } -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
&\quad -\frac{a}{2} \leq x_j \leq \frac{a}{2} \\
&\quad -\frac{b}{2} \leq y_j \leq \frac{b}{2} \quad (j = 1, 2, \dots, m)
\end{aligned}$$

ここで、 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$  は積層板の各層ラミナにおける繊維配向角であり、 $x = [x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m]^T$  は弾性支持点の位置座標を表わすベクトルである。 $n$  は積層ラミナの総層数、 $m$  は支持点の個数である。 $a, b$  はそれぞれ  $x, y$  軸方向の辺長である。目的関数の  $\Omega = f(\theta, x)$  は無次元化された基本振動数とする。また、各設計変数に対して、幾何学的な側面制約条件が付けられている。

計算に便宜のため、最適化問題 (5-17) を下記のような形式にまとめる。

$$\begin{aligned}
&\text{Find } p = [\theta, x]^T \\
&\text{Maximize } \Omega = F(p) \quad \dots \dots \dots (5-18) \\
&\text{Subject to } -1 \leq p_k \leq 1 \quad (K = 1, 2, \dots, n + 2m)
\end{aligned}$$

ただし、 $p_k$  は設計変数ベクトル  $p$  の要素で

$$p_k = \begin{cases} \theta_k & (k = i, i = 1, 2, \dots, n) \\ 90^\circ & \\ \frac{2x_k}{a} & (k = n + 2j - 1, j = 1, 2, \dots, m) \\ \frac{2y_k}{b} & (k = n + 2j, j = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

である。

次に、第4章において有効性が認められたコンプレックス法を使って最適化問題(5-18)を解く。なお、コンプレックスとは、 $n+2m$ 次元空間における $L$ 個( $L > n+2m+1$ )の点の集合であり、幾何学的には、この $L$ 個の点を頂点として、 $n+2m$ 次元空間に1つのコンプレックスが形成される。

ここで、コンプレックスの各頂点の座標を $p^j$  ( $j=1,2,\dots,L$ )と表わして、以下の特性を持つ点を定義する。

目的関数 $F(p)$ の最小値を与える点 $p^h$ を

$$F(p^h) = \text{Min}_j \{F(p^j)\} \quad \dots \dots \dots (5-19)$$

とし、2番目に小さい目的関数 $F(p)$ の値を与える次小点 $p^s$ を

$$F(p^s) = \text{Min}_j \{F(p^j), j \neq h\} \quad \dots \dots \dots (5-20)$$

とし、目的関数 $F(p)$ を与える最大点 $p^l$ を

$$F(p^l) = \text{Max}_j \{F(p^j)\} \quad \dots \dots \dots (5-21)$$

と定義する。

しかし、連成効果が強く異種類の設計変数が混在する本最適化問題では、解の多峰性や収束性など問題が起きやすい。ここでは、コンプレックスに関して、2つのアルゴリズムの改良を加えた。

最初の改良は、最小点 $p^h$ を除いた $K-1$ 次元の部分空間におけるサブコンプレックスの図心を

$$p^0 = \frac{1}{k-1} \left( \sum_{j=1}^k w_j p^j - w_h p^h \right) \quad \dots \dots \dots (5-22)$$

$$1 \leq w_j \leq 2, \quad 1 \leq w_h \leq 2$$

と定義する。コンプレックス計算の過程で、元の図心を使う代わりに偏心させた図心を使う。ただし、 $w_j$ 、 $w_h$ はコンプレックス頂点の座標に付ける重み係数であり、具体的に用いる重み係数の値は、問題の性質により適宜設定される。原則的には、目的関数の値が小さい頂点に小さい重み係数を、目的関数が大きい頂点には大きな重み係数を付ける。

2番目の改良として、1回のコンプレックス計算が終了した段階で、新設計点  $p^n$ 、偏心図心  $p^0$  と最大点  $p^l$  の3点の重心となる設計点  $p^w$  を導入する方法を考案した。すなわち

$$p^w = \frac{1}{3} (p^n + p^0 + p^l) \quad \dots \dots \dots (5-23)$$

により3点の平均的な探索点  $p^w$  を計算する。これは、1回のコンプレックス計算が終了した後では、「新しい設計点  $p^n$ 、重み係数付き偏心図心  $p^0$ 、最大点  $p^l$ 」からなる超空間内の三角形の重心点  $p^w$  がさらに良い設計点となる可能性が高いことを利用している。この新しい探索点  $p^w$  の目的関数値  $F(p^w)$  が次小点  $p^s$  の目的関数値  $F(p^s)$  より大きければ、点  $p^w$  を次小点  $p^s$  に置き換えて、次の計算に続ける。

この2つのアルゴリズムの改良を加えたコンプレックス法の計算の流れをまとめると、以下の通りである。

1. 初期コンプレックスを作り、各頂点での基本振動数を求める。
2. 各頂点での基本振動数を比較し、 $p^h$ 、 $p^s$ 、 $p^l$ 、 $p^0$ を決める。
3. 次の式を使い、重み係数付き偏心図心  $p^0$  に関する鏡像点  $p^r$  を求める。

$$p^r = (1.0 + \alpha)p^0 - \alpha p^h \quad \dots \dots \dots (5-24)$$

ただし、 $\alpha$  は鏡像係数であり、 $0 < \alpha < 2$  とする。

4. 鏡像点  $p^r$  での基本振動数  $F(p^r)$  を求める。
5. 基本振動数  $F(p^r)$  を  $F(p^s)$ ,  $F(p^l)$  と比較する。その結果には、3つの可能性があり、それぞれ手順 (6), (7), (8) に対応する。
6.  $F(p^s) \leq F(p^r) \leq F(p^l)$  の場合、 $p^h$  を  $p^r$  に置き換えて、新しいコンプレックスが形成されたならば、手順 (10) に飛び、新しい探索点  $p^w$  を求める。
7.  $F(p^r) \leq F(p^l)$  の場合、鏡像点  $p^r$  は最大点  $p^l$  よりさらに基本振動数が大きく、同じ方向に先に進むと、さらに基本振動数が大きい点が見つかる可能性が高い。そこで

$$p^e = (1.0 + \gamma)p^0 + \gamma p^r \quad \dots \dots \dots (5-25)$$

を使い、拡張点  $p^e$  を求める。ただし、 $\gamma$  は拡張係数であり、 $1 < \gamma < 3$  とする。続いて、拡張点  $p^e$  での基本振動数  $F(p^e)$  を求める。鏡像点  $p^r$  での基本振動数  $F(p^r)$  と比較して、もし、 $F(p^e) > F(p^r)$  ならば、 $p^h$  を  $p^e$  に置き換える。 $F(p^e) \leq F(p^r)$  ならば、 $p^h$  を  $p^e$  に置き換える。いずれも、置き換えた後に手順 (10) に飛び、新しい探索点を求める。

8.  $F(p^r) < F(p^s)$  の場合、鏡像点  $p^r$  は次小点  $p^s$  より、対応する基本振動数が小さく、その方向に進むと、鏡像点  $p^r$  は次回のコンプレックスの最小点になる。このため、今回の鏡像点探索は失敗と見なし、式

$$p^c = (1.0 - \beta)p^0 + \beta p^r \quad \dots \dots \dots (5-26)$$

を使い、収縮点  $p^c$  を求める。ただし、 $\beta$  は収縮係数であり、 $0 < \beta < 1$  とする。続いて、収縮点での基本振動数  $F(p^c)$  を求めて、次小点  $p^s$  での基本振動数  $F(p^s)$  と比較して、もし、 $F(p^c) > F(p^s)$  ならば、 $p^h$  を  $p^c$  に置き換えて、手順 (10) に飛ばし新たな探索を行う。逆に  $F(p^c) \leq F(p^s)$  ならば、 $p^r$  を  $p^c$  に置き換え、手順 (8) に戻し、もう1度収縮を行う。ただし、数回の収縮 (本章の問題では5回とする) を行っても、 $F(p^c) \leq F(p^s)$  が満足されない場合、手順 (9) に飛ばし、全体縮小を行

う。

9. 全体縮小とは、コンプレックスの  $k$  個頂点をすべて最大点  $p^l$  方向に半分に縮めることである。すなわち

$$p^j = \frac{1}{2}(p^j + p^l) \quad j=1,2,\dots,L \quad \dots\dots (5-27)$$

を使い、新しいコンプレックスを作る。全体縮小を終了したら、手順(2)に戻し、コンプレックス計算を続ける。

10. 新しい探索点  $p^m$  を式(5-23)により求める。この探索点  $p^m$  での基本振動数  $F(p^m)$  を求めて、もし、 $F(p^m) > F(p^s)$  ならば、 $p^s$  を  $p^m$  に置き換える。逆に、 $F(p^m) \leq F(p^s)$  ならば、 $p^m$  による改良は失敗と見なして、何も変更しない。いずれも、手順(2)に戻し、コンプレックス計算を続ける。

本研究の問題は、制約条件付きの最適化問題であるため、1回の鏡像点探索、拡張処理、収縮処理などを終了した時、制約条件  $-1 \leq p^j \leq 1$ , ( $j=1,2,\dots,L$ ) をチェックする必要がある。もし、新しい設計点で、ある制約条件を満足しなければ、その変数を対応する限界値により置き換える。

収束の判定条件は

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [F(p^j) - F_0]^2 < \varepsilon \quad \dots\dots\dots (5-28)$$

を使い判定される。ただし、

$$F_0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k F(p^j) \quad \dots\dots\dots (5-29)$$

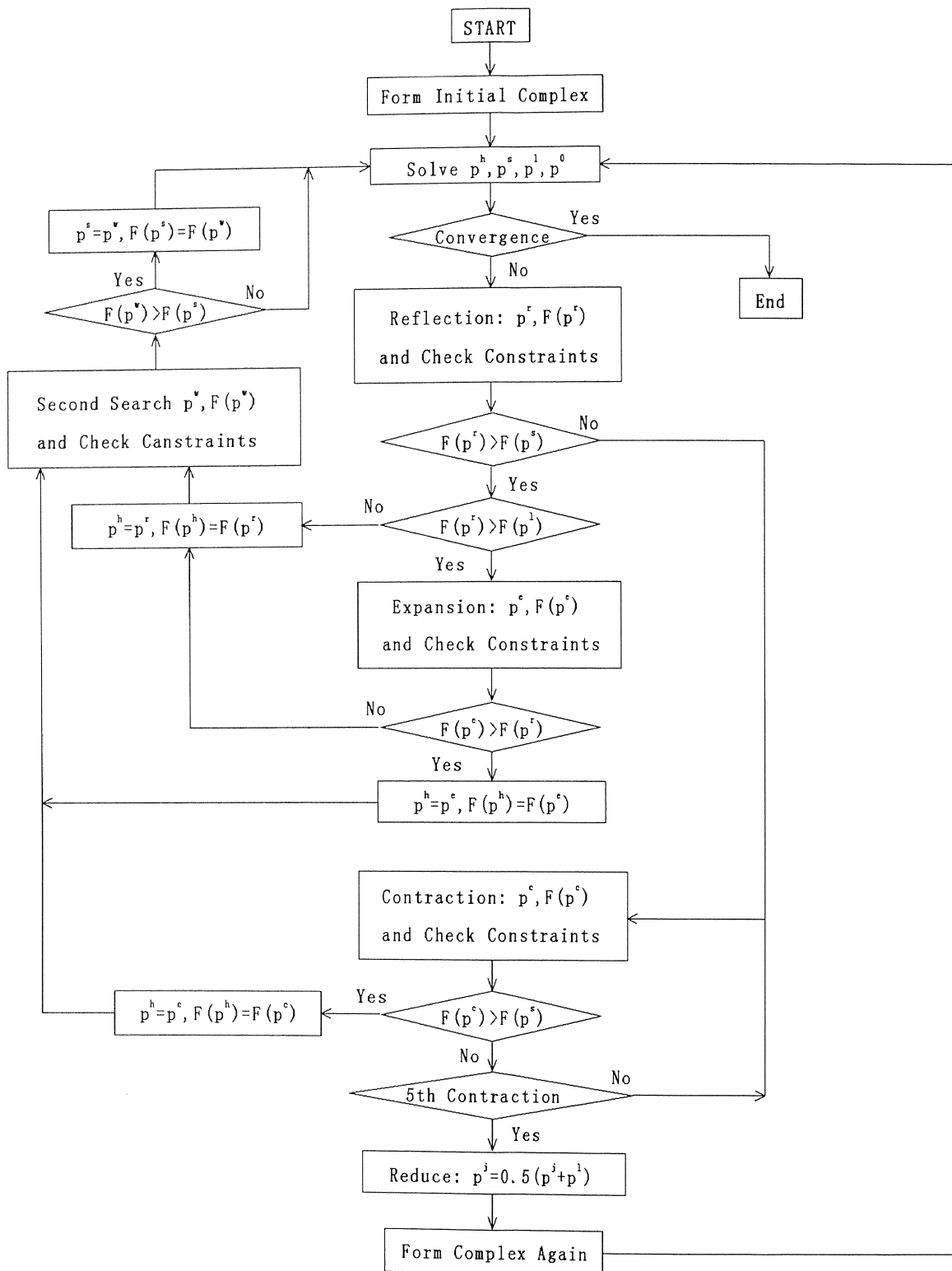


図5-2 点支持を有する積層板最適化アルゴリズム

である。ここで、 $F_0$ はコンプレックスの各頂点での基本振動数の平均値であり、 $\varepsilon$ は任意に指定された収束基準値である。

以上の1～10の方法は図5-2に示すようなフローチャートにまとめられる。

#### 5-4 数値計算例

以上に提案した最適化アルゴリズムに、弾性点支持を有する積層長方形板の振動解析法を組み込み、境界条件の任意組合せを考慮した一般的な積層構成を持つ積層長方形板の、繊維配向角と弾性支持位置の、同時に最適化プログラムを作成した。

数値計算例の条件の設定は下記の通りである。

1. 長方形板の4辺における境界条件は、F：自由、S：単純支持、C：固定の3種類にわけ、その組合せは任意とする。本章の計算では、主に長方形板の21通りの境界条件に対して最適化計算を行う。
2. 支持点の数は1と2の2つの場合に対して計算する。無次元化された弾性ばね定数

$$k_c = \frac{k^* ab}{D_0}$$

の値は、剛性支持点に近い効果を与える  $k_c = 10^6$  とする。ここで、 $k^*$ は集中ばね定数である。 $D_0$ は基準剛性の

$$D_0 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$$

を表す。

3. 積層板の材質は、異方性がかなり強い Graphite/epoxy 材料の1種類からなり、その材料定数は

$$E_1 = 138.0 \text{ GPa} \quad E_2 = 8.96 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 7.10 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.30$$

$$E_1 / E_2 = 15.40$$

とする。

4. 積層の条件は、各層の厚さが同一として、非対称積層を含む一般的な3層 $[\theta_l / \theta_m / \theta_u]$ とする。ただし、 $\theta_l$ 、 $\theta_m$ 、 $\theta_u$ はそれぞれ下層、中間層と上層の繊維配向角を示し、互いに独立に決められる。
5. 積層板の板厚辺長比は $h / \sqrt{ab} = 0.01$ とする。
6. 振動解析はエネルギー原理に基づくリッツ法を使い、二重級数で表す変位関数の項数は実用上十分な精度を与える $8 \times 8$ とする。目的関数として使用される無次元化された基本振動数は

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}}$$

で表される。ここで、 $\omega$ は基本振動数、 $\rho$ は積層板の単位体積当たりの質量である。

7. 最適化計算で使われるコンプレックスの頂点数は経験的に15個とした。初期コンプレックスの $L$ 次元座標（設計点）は、境界条件などを考慮して適当に決め、入力データとして材料と形状のデータとともに入力する。

表5-1は、1個の支持点により拘束された21通りの境界条件を持つ3層正方形板について、基本振動数の最大値を与える繊維配向角 $[\theta_l / \theta_m / \theta_u]$ 、点支持位置 $(2x_1 / a, 2y_1 / b)$ およびその基本振動数 $\Omega$ を表す。さらに最適解におけるこれらの関係を、図6-3に図示する。

第4章の繊維配向角のみによる最適化問題では、その結果は比較的容易に力学的な説明がつけられる2つのグループに分けられた。しかし、本章の問題では、点支持位置と繊維配向角が連成して固有振動数に影響を与えるため、複雑な結果を与えている。

その分類を試みると、以下のように自由辺Fの数により特徴づけられる。

(1) 自由辺が4辺の場合 (1. F F F F)

1つの支持点だけでは拘束条件が不足して、並進と回転の剛体モードが存在する。このため、剛体運動モードを除いて最低次振動モードを最大化するように解を求めた結果、釣り合いを満足させるため節線のあるモードをもち、最適な点支持位置は板の中央からずれた位置で、対角線方向に繊維配向角がある解となる。

(2) 自由辺が3辺の場合 (2. S F F F, 3. C F F F)

片持支持となるため、拘束辺から支持点と対角方向に繊維が配向される解となっている。最適な支持位置は、剛性バランスを取るため、S F F Fの場合は、中央から拘束辺に離れる方向



へ少しずれた位置の解となった。一方、C F F Fの場合は、曲げ剛性が強い性格を示す上層と下層の繊維がすべて同一対角線方向に沿っており、それと垂直な対角線方向に近い位置で、最適な支持位置をとった。

表5-1 1点支持3層正方形板の最適解

(Graphite/epoxy,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Point location	Frequency
1.FFFF	[36.5/3.0/-37.3]	(0.03,-0.48)	7.131
2.SFFF	[39.7/-0.9/-40.1]	(0.34,0.00)	3.866
3.CFFF	[-23.6/45.1/-23.0]	(0.03,0.39)	5.039
4.SFSF	[1.5/-36.1/1.5]	(0.02,0.00)	11.05
5.SSFF	[19.1/-60.1/44.9]	(0.02,0.20)	6.692
6.SCFF	[44.7/-39.6/43.0]	(0.07,0.22)	8.732
7.CCFF	[45.0/-45.0/45.0]	(0.40,0.40)	11.37
8.SFCF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	16.27
9.CFCF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	23.01
10.SSSF	[58.9/-24.8/59.2]	(0.04,0.57)	14.33
11.SSCF	[-5.4/-44.8/-4.7]	(0.04,0.35)	18.13
12.SCSF	[52.3/-25.5/52.5]	(0.05,0.68)	16.26
13.SCCF	[-13.3/52.8/-13.3]	(0.00,0.40)	19.32
14.CSCF	[-2.0/35.1/-1.5]	(0.02,0.40)	24.25
15.CCCF	[-1.8/46.8/-2.1]	(0.01,0.47)	24.87
16.SSSS	[45.0/-45.0/45.0]	(0.00,0.00)	23.30
17.SSSC	[42.7/-46.2/42.4]	(0.02,-0.09)	26.01
18.SCSC	[40.3/-47.5/40.1]	(0.02,0.02)	28.65
19.SSCC	[45.0/-45.0/45.0]	(0.00,0.00)	29.04
20.CCCS	[47.3/-43.5/47.4]	(0.02,0.13)	32.11
21.CCCC	[45.0/-45.0/45.0]	(0.00,0.00)	35.55

表5-2 1点支持3層板の最適解と他の解の比較

(Graphite/epoxy,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Point location	Frequency	Optimal
1.FFFF	[30/0/-30]	(0.0,-0.5)	6.577	7.131
	[45/-45/45]	(0.0,0.0)	4.417	
2.SFFF	[45/0/-45]	(0.4,0.0)	3.832	3.866
	[0/0/0]	(0.4,0.0)	3.702	
3.CFFF	[-30/45/-30]	(0.0,0.4)	4.991	5.039
	[45/0/-45]	(0.4,0.0)	4.418	
4.SFSF	[0/-30/0]	(0.0,0.0)	11.04	11.05
	[0/0/0]	(0.0,0.0)	10.98	
5.SSFF	[30/-60/45]	(0.0,0.2)	6.342	6.692
	[45/-45/45]	(0.2,0.2)	6.583	
6.SCFF	[45/-45/45]	(0.1,0.2)	8.497	8.732
	[45/-30/45]	(0.1,0.2)	8.491	
7.CCFF	[45/-45/45]	(0.38,0.4)	11.36	11.37
	[60/90/0]	(0.4,0.4)	11.28	
8.SFCF	[0/0/0]	(0.0,0.1)	16.21	16.27
	[10/0/-10]	(0.0,0.0)	14.96	
9.CFCF	[0/0/0]	(0.0,0.1)	22.96	23.01
	[10/-10/10]	(0.0,0.0)	22.03	
10.SSSF	[60/-30/60]	(0.0,0.6)	14.07	14.33
	[30/-30/30]	(0.0,0.6)	13.41	
11.SSCF	[0/-45/0]	(0.0,0.4)	18.06	18.13
	[10/-45/-10]	(0.0,0.4)	17.44	
12.SCSF	[60/-30/60]	(0.0,0.7)	15.89	16.26
	[30/-30/30]	(0.0,0.7)	14.31	
13.SCCF	[-10/50/-10]	(0.0,0.4)	19.28	19.32
	[45/0/-45]	(0.0,0.4)	16.48	
14.CSCF	[0/30/0]	(0.0,0.4)	24.23	24.25
	[0/0/0]	(0.0,0.4)	24.21	
15.CCCF	[0/45/0]	(0.0,0.5)	24.83	24.87
	[45/-45/45]	(0.0,0.5)	21.75	
16.SSSS	[45/0/45]	(0.0,0.0)	21.63	23.31
	[0/90/0]	(0.0,0.0)	18.55	

17.SSSC	[42/-46/42]	(0.02,-0.1)	25.99	26.01
	[45/-45/45]	(0.0,0.0)	24.84	
18.SCSC	[45/-45/45]	(0.0,0.0)	28.58	28.65
	[30/90/-30]	(0.0,0.0)	26.66	
19.SSCC	[45/-45/45]	(0.0,0.0)	25.25	29.04
	[45/-45/45]	(-0.1,-0.1)	29.04	
20.CCCS	[45/-45/45]	(0.0,0.1)	32.04	32.11
	[30/90/-30]	(0.0,0.1)	27.84	
21.CCCC	[45/0/-45]	(0.0,0.0)	31.91	35.55
	[0/90/0]	(0.0,0.0)	31.59	

### (3) 自由辺が2辺の場合 (4. SF SF ~ 9. CF CF)

ここはさらに2つに分けられる。4. SF SF, 8. SF CF, 9. CF CFのグループは、1組の対辺がCかSであり、対辺をつなぐ方向に繊維配向角をもち、ほぼ中央に位置する支持点がある場合が最適解となる。他の隣接する2辺がCかSである5. SS FF, 6. SC FF, 7. CC FFのグループは、もっとも拘束の強い7. CC FFで明確に表されているように、2辺に挟まれる角から45°方向の対角線上に支持点があり、繊維配向角は外の2層が45°方向、中央の層が-45°方向に近い積層となっている。

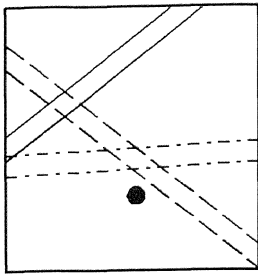
### (4) 自由辺が1辺の場合 (10. SSSF ~ 15. C CCF)

3辺がCかSで拘束されているため、中央から少し自由辺に寄った位置に最適な支持点がある。その位置は3辺の拘束の程度に依存する。層の繊維は、CかSの1組の対辺をつなぐ方向に配向する傾向となる。

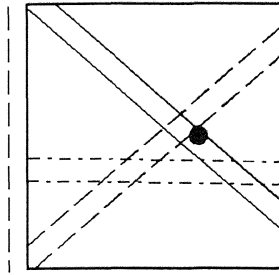
### (5) 自由辺がない場合 (16. SSSS ~ 21. CCCC)

4辺から拘束を受けるため、支持点はほぼ中央に位置する。とくに、均等な拘束となる16. SSSS, 21. CCCCと、対角線に関する対称な19. SSCCでは、完全に中央に支持点が存在して、層の繊維配向角も[45°/-45°/45°]となる。他の拘束条件の17. SSSC, 18. SCSC, 20. CCCSも、ほぼ同様な積層になる。

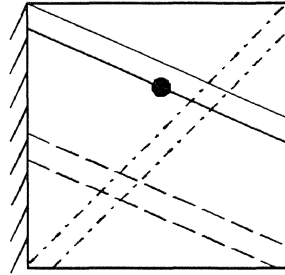
以上のように表5-1および図5-3に示された最適解は、支持点と境界条件による力学的な特徴に沿った定性的な説明がある程度可能である。しかし、定量的には、表5-1に示した繊維配向角と支持点の最適値はかなりばらついており、最適解であることがあまり明確でない。



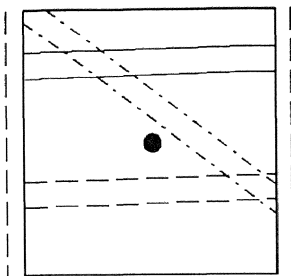
1. FFFF



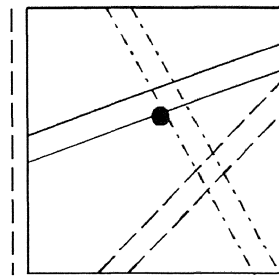
2. SFFF



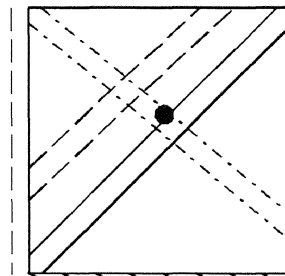
3. CFFF



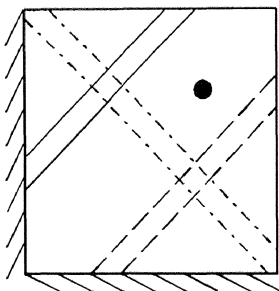
4. SFSF



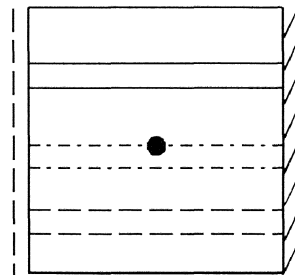
5. SSFF



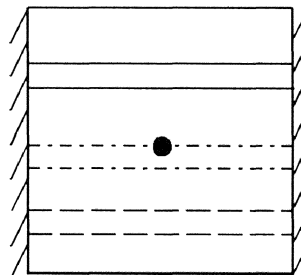
6. SCFF



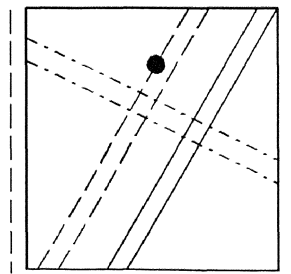
7. CCFF



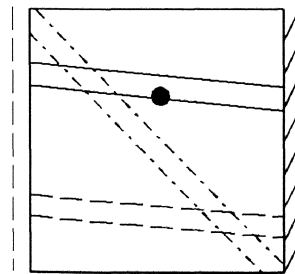
8. SFCF



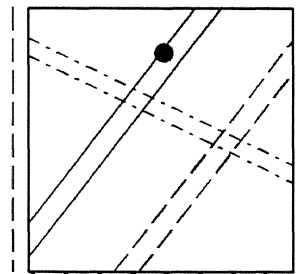
9. CFCF



10. SSSF



11. SSCF



12. SCSF

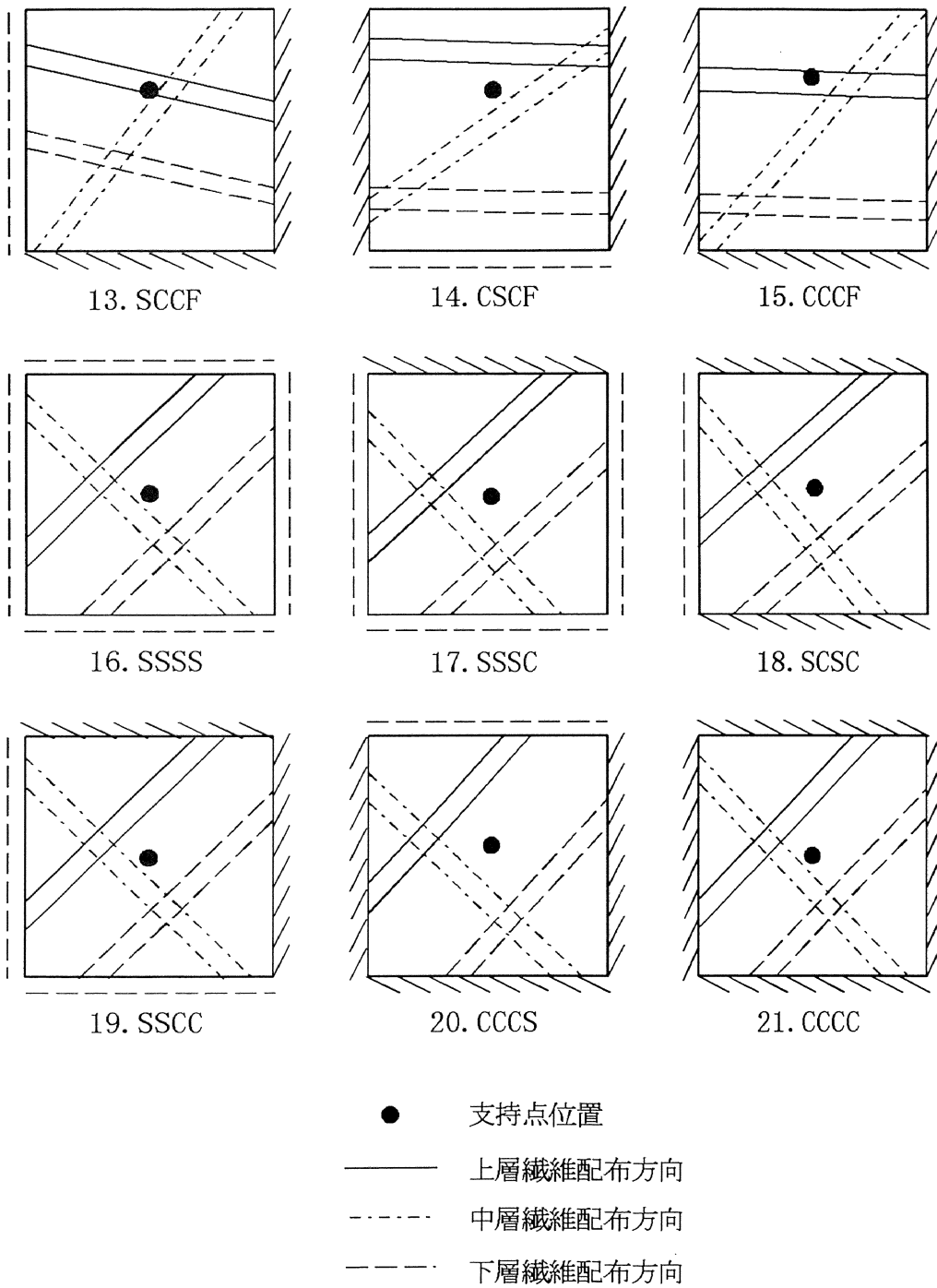


図5-3 支持点1の最適繊維配向角と支持位置

表 5 - 3 1 点支持 3 層長方形板最適解  
 (Graphite/epoxy,  $a/b=1.25$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Point location	Frequency
1.FFFF	[90.0/-44.7/46.73]	(-0.07,0.63)	4.889
2.SFFF	[40.3/-2.0/-41.1]	(0.37,0.00)	3.123
3.CFFF	[-9.9/44.8/-9.4]	(0.00,0.27)	4.445
4.SSFF	[46.0/-58.0/-62.2]	(0.37,0.47)	6.856
5.SFSF	[-1.3/27.8/-1.2]	(0.02,0.00)	10.61
6.SCFF	[56.1/-36.1/55.8]	(0.71,1.00)	7.187
7.CCFF	[-17.8/-87.6/85.7]	(0.55,0.55)	9.574
8.SFCF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	15.96
9.CFCF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	22.78
10.SSSF	[-4.9/45.2/-5.2]	(-0.03,0.40)	12.02
11.SSCF	[-6.7/38.6/-6.3]	(0.02,0.32)	17.08
12.SCSF	[68.1/-18.7/68.5]	(0.00,0.58)	13.79
13.SOCF	[-7.2/46.5/-6.7]	(0.05,0.39)	18.53
14.CSCF	[0.05/3.8/0.2]	(0.02,0.39)	23.47
15.CCCF	[-0.5/19.3/-0.8]	(0.02,0.44)	23.74
16.SSSS	[55.4/-34.4/55.4]	(0.00,-0.01)	18.69
17.SSSC	[52.4/-34.5/52.5]	(0.01,-0.00)	20.91
18.SCSC	[49.7/-35.6/49.7]	(0.02,0.02)	23.12
19.SSCC	[55.8/-31.7/55.1]	(0.01,0.00)	23.27
20.CCCS	[-2.3/72.6/-2.4]	(0.05,0.08)	25.82
21.CCCC	[56.0/-29.3/55.4]	(0.04,0.04)	28.46

表 5 - 4 1 点支持 3 層長方形板最適解

(Graphite/epoxy,  $a/b=1.5$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Point location	Frequency
1.FFFF	[90.0/-48.5/46.0]	(0.10,-0.52)	4.046
2.SFFF	[41.6/-1.2/-41.5]	(0.38,0.00)	2.617
3.CFFF	[-4.4/41.9/-4.4]	(0.02,0.14)	5.151
4.SSFF	[61.3/-25.5/60.7]	(0.11,0.09)	5.763
5.SFSF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	10.37
6.SCFF	[66.0/-16.5/66.9]	(0.30,0.39)	6.294
7.CCFF	[73.9/-19.7/68.7]	(0.40,0.28)	7.496
8.SFCF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	15.79
9.CFCF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	22.65
10.SSSF	[2.3/-42.1/2.5]	(0.06,0.38)	11.28
11.SSCF	[-4.3/26.5/-4.3]	(0.03,0.33)	16.47
12.SCSF	[2.8/-46.0/2.4]	(0.05,0.44)	11.62
13.SCCF	[-4.9/34.9/-4.4]	(0.05,0.39)	16.72
14.CSCF	[-0.2/1.4/-0.2]	(0.01,0.37)	23.11
15.CCCF	[-0.1/-2.1/0.3]	(-0.03,0.43)	23.26
16.SSSS	[66.0/-25.7/66.0]	(0.02,0.02)	15.67
17.SSSC	[61.0/-27.6/61.0]	(0.08,-0.04)	17.53
18.SCSC	[57.0/-27.2/57.5]	(0.04,0.04)	19.41
19.SSCC	[67.2/-20.1/67.6]	(-0.02,-0.03)	19.49
20.CCCS	[-1.1/43.6/-1.3]	(0.02,0.07)	24.33
21.CCCC	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	24.87

表5-5 1点支持3層長方形板最適解

(Graphite/epoxy,  $a/b=1.75$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Point location	Frequency
1.FFFF	[90.0/90.0/51.4]	(0.20,-0.44)	3.241
2.SFFF	[42.1/1.4/-42.1]	(0.37,0.00)	2.249
3.CFFF	[-2.6/37.1/-2.4]	(0.03,0.08)	3.976
4.SSFF	[90.0/-3.9/90.0]	(0.46,0.46)	5.296
5.SFSF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	10.24
6.SCFF	[75.8/-7.2/77.1]	(0.46,0.59)	5.679
7.CCFF	[38.4/-59.145.3]	(0.07,0.26)	5.867
8.SFCF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	15.69
9.CFCF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	22.58
10.SSSF	[-1.6/35.0/-1.9]	(0.05,0.38)	10.86
11.SSCF	[-2.7/8.0/-2.7]	(-0.01,0.32)	16.16
12.SCSF	[-1.8/42.0/-1.7]	(0.03,0.42)	11.06
13.SCCF	[-3.1/10.2/-3.3]	(0.00,0.38)	16.29
14.CSCF	[0.3/-1.4/0.1]	(0.01,0.37)	22.89
15.CCCF	[6.3/1.5/-0.4]	(0.03,0.41)	22.99
16.SSSS	[90.0/-0.2/90.0]	(0.00,0.01)	14.01
17.SSSC	[71.6/-20.7/71.1]	(0.11,-0.00)	15.12
18.SCSC	[65.1/-22.3/65.3]	(0.03,0.03)	16.74
19.SSOC	[-2.1/47.0/-2.7]	(0.03,-0.08)	17.26
20.CCCS	[-0.4/5.9/0.1]	(-0.01,0.07)	23.65
21.CCCC	[-0.7/26.4/-0.9]	(0.02,0.00)	23.89



表 5 - 6 1 点支持 3 層長方形板最適解

(Graphite/epoxy,  $a/b=2.0$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Point location	Frequency
1.FFFF	[90.0/90.0/50.0]	(0.14,-0.50)	2.799
2.SFFF	[41.8/-3.6/-43.3]	(0.42,0.00)	1.971
3.CFFF	[-1.3/32.3/-1.3]	(0.03,0.03)	3.861
4.SSFF	[88.3/-39.5/88.3]	(0.34,0.42)	4.342
5.SFSF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	10.15
6.SCFF	[90.0/0.2/90.0]	(0.45,0.53)	5.392
7.CCFF	[79.3/-18.7/68.6]	(0.73,0.50)	5.723
8.SFCF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	15.63
9.CFCF	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	22.53
10.SSSF	[-0.8/31.7/-0.7]	(0.00,0.37)	10.59
11.SSCF	[-1.9/-2.7/-2.1]	(-0.02,0.32)	15.97
12.SCSF	[-1.3/34.8/-1.4]	(0.06,0.42)	10.73
13.SCCF	[-2.7/-2.7/-2.6]	(0.10,0.36)	16.06
14.CSCF	[0.2/-0.3/0.3]	(0.00,0.35)	22.76
15.CCCF	[-0.1/-2.2/0.2]	(0.02,0.40)	22.83
16.SSSS	[90.0/44.6/90.0]	(-0.03,0.00)	11.38
17.SSSC	[90.0/-17.6/87.1]	(0.03,-0.11)	13.66
18.SCSC	[77.2/-12.3/76.7]	(0.04,0.05)	14.77
19.SSCC	[1.1/-37.6/1.4]	(0.02,-0.06)	16.69
20.CCCS	[0.2/-1.7/0.9]	(0.02,0.06)	22.29
21.CCCC	[0.0/0.0/0.0]	(0.00,0.00)	23.44

表5-7 辺長比の変化により1点支持3層板の最適解の変化

(Graphite/epoxy,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	a/b=1.0	a/b=1.25	a/b=1.5	a/b=1.75	a/b=2.0
1.FFFF	7.131	4.889	4.047	3.241	2.799
2.SFFF	3.866	3.123	2.617	2.249	1.971
3.CFFF	5.039	4.445	4.151	3.976	3.861
4.SSFF	6.962	6.856	5.763	5.296	4.342
5.SFSF	11.05	10.61	10.37	10.24	10.15
6.SCFF	8.732	7.187	6.294	5.679	5.392
7.SFCF	16.27	15.96	15.79	15.69	15.63
8.CCFF	11.37	9.574	7.496	5.867	5.723
9.CFCF	23.01	22.78	22.65	22.58	22.53
10.SSSF	14.33	12.02	11.28	10.86	10.59
11.SSCF	18.13	17.08	16.47	16.16	15.97
12.SCSF	16.26	13.79	11.62	11.06	10.72
13.CSCF	24.25	23.47	23.11	22.89	22.76
14.SCCF	19.32	17.53	16.71	16.29	16.06
15.CCCF	24.87	23.74	23.26	22.99	22.83
16.SSSS	23.31	18.69	15.67	14.01	11.38
17.SSSC	26.01	20.91	17.53	15.12	13.66
18.SSCC	29.04	23.27	19.49	17.26	16.69
19.SCSC	28.65	23.12	19.41	16.74	14.77
20.CCCS	32.11	25.82	24.33	23.65	23.29
21.CCCC	35.55	28.46	24.87	23.89	23.44

表5-2に、表5-1の解に近い条件に対する基本振動数との比較を示す。その結果、表5-1の最適解はすべて表5-2に求められた基本振動数より高い値を示し、本章の最適解の妥当性を裏付けた。すなわち、多峰性が予測される本章の最適化問題においても、表5-1の結果が最適解または最適解に近い結果を与えていることは明らかである。

また、点支持を有する積層板の最適振動モードは比較的複雑になると考えられ、表5-1の結果に基づき得られた1点支持3層板の最適振動モード図は付録3に示している。

さらに、辺長比により最適解に及ぼす影響を調べるため、 $a/b = 1.25, 1.5, 1.75, 2.0$ に対して最適化計算を行った。その結果をそれぞれ表5-3~表5-6に示す。また、表5-1の正方形板の結果と比較した結果は表5-7と図5-4、図5-5に示す。表と図から、全体的に辺長比の増加により最適基本振動数は減少する傾向があることがわかる。

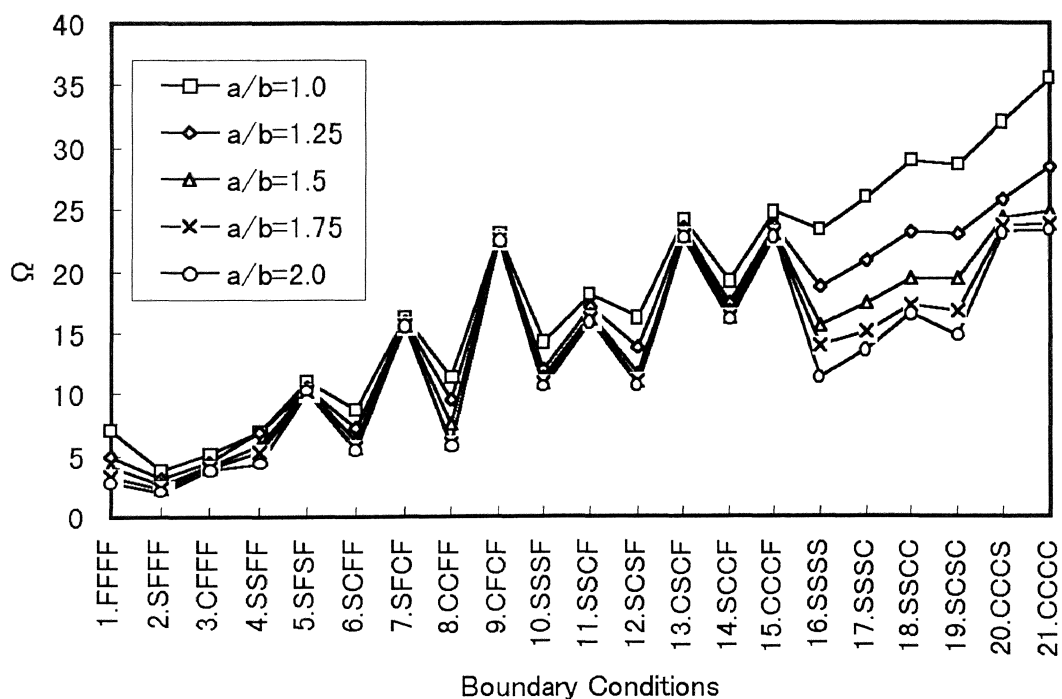


図5-4 1点支持3層正方形板の拘束条件と最適基本振動数

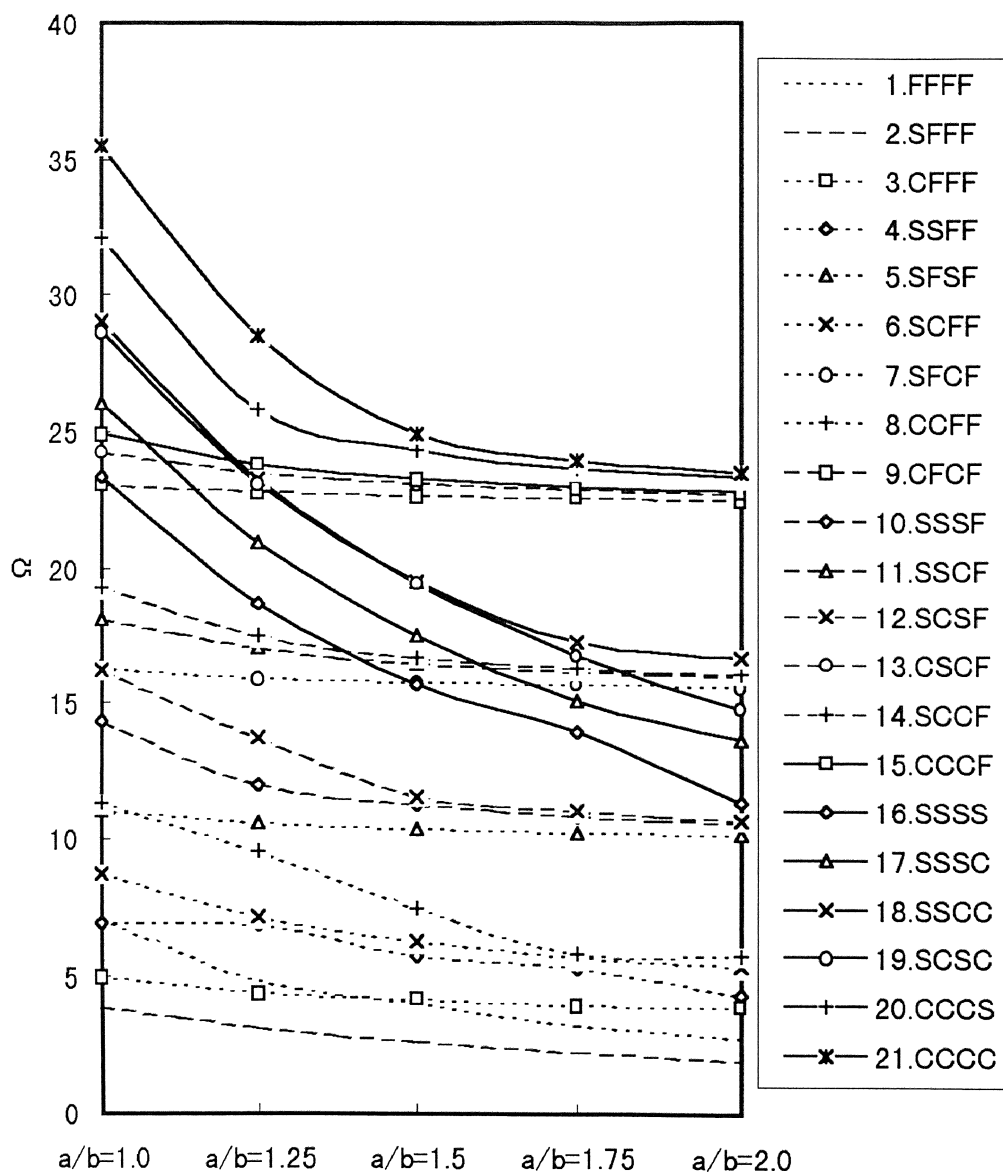


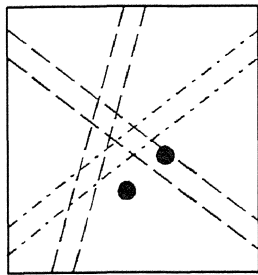
図5-5 1点支持3層正方形板の辺長比と最適基本振動数

表5-8は、2個の支持点により拘束された21通りの境界条件を持つ3層正方形板について、基本振動数の最大値を与える繊維配向角 $[\theta_l / \theta_m / \theta_u]$ 、点支持位置 $(2x_1/a, 2y_1/b)$ 、 $(2x_2/a, 2y_2/b)$ およびその基本振動数を表す。さらに最適解におけるこれらの関係を、図5-7に図示する。

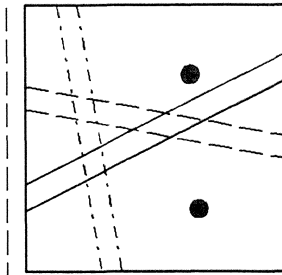
表5-8 2点支持3层正方形板最適解

(Graphite/epoxy,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

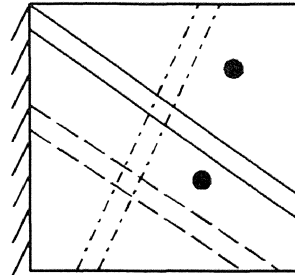
Boundary	Fiber angles	Point location	frequency
1.FFFF	[36.3/-36.0/73.5]	(0.07,-0.39), (0.25,-0.19)	5.139
2.SFFF	[26.2/-80.4/-10.5]	(0.26,0.49), (0.35,-0.53)	9.254
3.CFFF	[-35.5/65.3/-33.7]	(0.56,0.58), (0.27,-0.33)	11.31
4.SSFF	[64.9/-37.3/58.3]	(0.02,0.49), (1.00,0.43)	13.69
5.SFSF	[-55.1/23.6/-52.1]	(0.00,0.61), (-0.13,-0.51)	16.88
6.SCFF	[70.5/-7.4/71.2]	(-0.08,0.75), (0.61,0.37)	18.21
7.SFCF	[-8.1/49.2/-7.7]	(0.16,0.46), (0.03,-0.61)	20.22
8.CCFF	[79.4/-4.4/80.1]	(0.00,0.59), (0.73,0.55)	21.18
9.CFCF	[2.7/-46.8/2.3]	(0.01,-0.54), (0.05,0.54)	25.91
10.SSSF	[-36.0/44.6/-35.5]	(0.15,0.69), (0.08,-0.06)	24.31
11.SSCF	[27.0/90.0/26.7]	(-0.08,0.77), (0.08,0.01)	26.14
12.SCSF	[30.4/-49.0/35.9]	(0.01,0.88), (-0.03,0.08)	26.55
13.CSCF	[42.1/55.6/-33.6]	(0.00,0.69), (0.00,-0.12)	31.01
14.SCCF	[-34.4/50.0/-34.6]	(0.09,0.61), (-0.04,-0.02)	31.64
15.CCCF	[-37.4/48.0/-37.2]	(-0.02,0.75), (0.01,0.00)	35.09
16.SSSS	[23.9/-69.9/24.9]	(0.08,-0.30), (-0.04,0.31)	36.18
17.SSSC	[15.3/-69.9/15.5]	(0.07,-0.36), (-0.02,0.24)	38.56
18.SSCC	[28.4/-56.9/27.8]	(0.00,-0.34), (-0.15,0.22)	43.41
19.SCSC	[50.4/-37.3/50.2]	(0.29,-0.07), (-0.29,0.08)	44.57
20.CCCS	[34.4/-53.8/35.0]	(0.03,-0.22), (-0.09,0.34)	48.03
21.CCCC	[30.7/-60.4/29.5]	(-0.09,0.24), (0.05,-0.26)	51.57



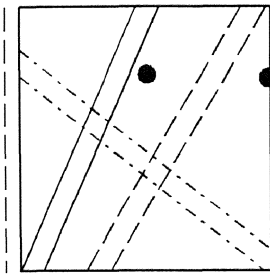
1. FFFF



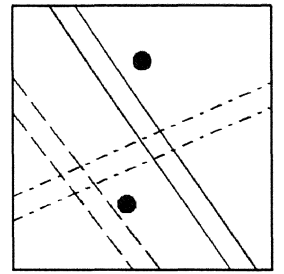
2. SFFF



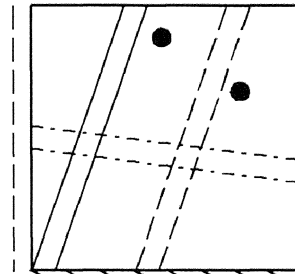
3. CFFF



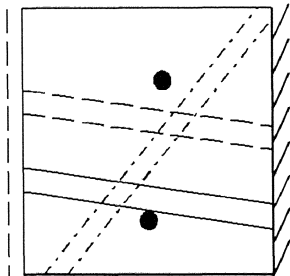
4. SSFF



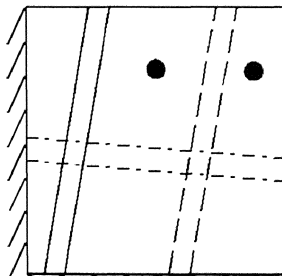
5. SFSF



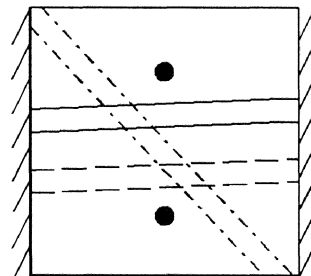
6. SCFF



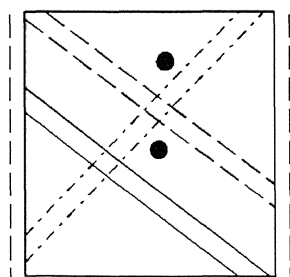
7. SFCF



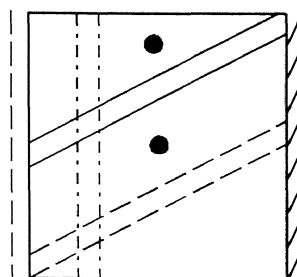
8. CCFF



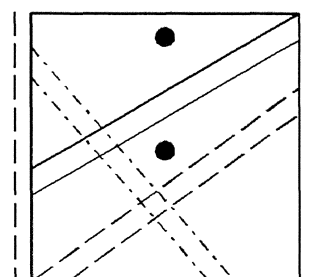
9. CFCF



10. SSSF



11. SSCF



12. SCSF

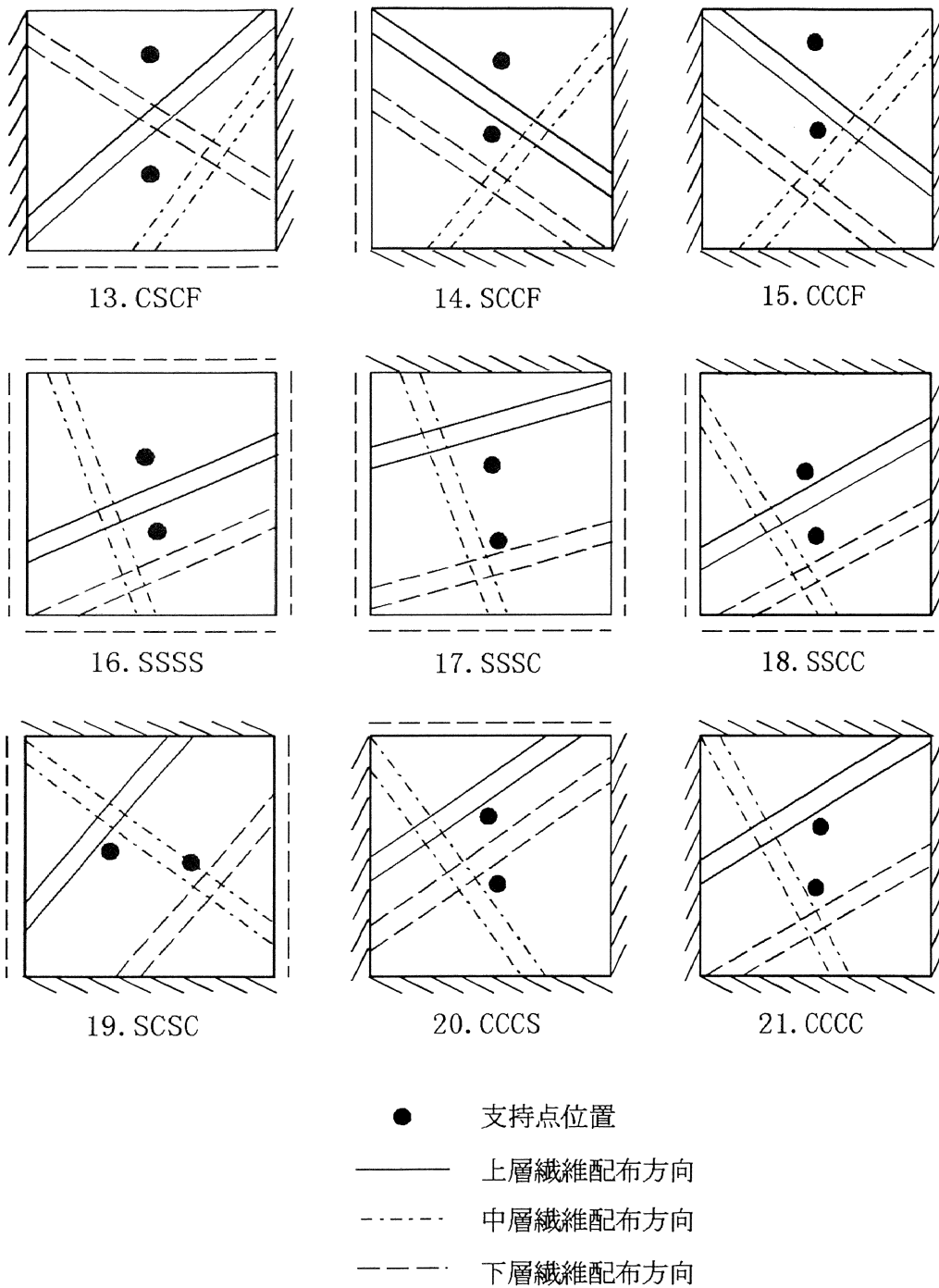


図5-6 点支持2の最適繊維配向角と支持位置

表5-9 2点支持3層正方形板最適解と他の結果比較

(Graphite/epoxy,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Point location	Frequency	Optimal
1.FFFF	[30/-30/75]	(0,-0.4), (0.2,-0.2)	4.969	5.139
	[45/-45/45]	(0.5,-0.5), (-0.5,0.5)	5.017	
2.SFFF	[0/0/0]	(0.3,0.5), (0.3,-0.5)	7.588	9.254
	[26/-80/-10]	(0.25,0.5), (0.35,-0.5)	9.129	
3.CFFF	[0/90/0]	(0.5,0.5), (0.5,-0.5)	9.855	11.31
	[-30/60/-30]	(0.5,0.5), (0.3,-0.3)	10.51	
4.SSFF	[45/-45/45]	(0.0,0.6), (0.6,0.0)	12.16	13.69
	[60/-30/60]	(0.0,0.5), (1.0,0.5)	12.93	
5.SFSF	[-60/30/-60]	(0.0,0.6), (0.0,-0.6)	14.52	16.88
	[0/0/0]	(0.0,0.6), (0.0,-0.6)	14.92	
6.SCFF	[90/0/90]	(0.0,0.6), (0.6,0.6)	16.08	18.21
	[70/-7/70]	(0.0,0.8), (0.6,0.4)	16.95	
7.SFCF	[-8/50/-8]	(-0.2,0.6), (0.2,-0.6)	19.86	20.22
	[-8/50/-8]	(0.2,0.5), (0.0,-0.6)	20.14	
8.CCFF	[90/0/90]	(0.0,0.6), (0.8,0.6)	20.48	21.18
	[80/-5/80]	(0.0,0.6), (0.8,0.6)	20.78	
9.CFCF	[0/90/0]	(0.0,-0.5), (0.0,0.5)	25.56	25.91
	[0/0/0]	(0.0,-0.5), (0.0,0.5)	25.57	
10.SSSF	[0/0/0]	(0.0,0.6), (0.0,0.0)	18.69	24.31
	[-30/45/-30]	(0.2,0.7), (0.0,0.0)	23.34	
11.SSCF	[0/90/0]	(-0.1,0.8), (0.0,0.0)	23.61	26.14
	[30/90/30]	(0.0,0.8), (0.0,0.0)	25.94	
12.SCSF	[0/0/0]	(0.8,0.0), (0.0,0.0)	21.82	26.55
	[30/-45/30]	(0.8,0.0), (0.0,0.0)	26.21	
13.CSCF	[0/0/0]	(0.0,0.7), (0.0,-0.1)	29.01	31.01
	[45/50/-30]	(0.0,0.7), (0.0,-0.1)	30.73	
14.SCCF	[45/-45/45]	(0.0,0.6), (0.0,0.0)	18.83	31.64
	[-35/50/-35]	(0.0,0.6), (0.0,0.0)	30.01	
15.CCCF	[0/90/0]	(0.0,0.75), (0.0,0.0)	32.45	35.09
	[-30/45/-30]	(0.0,0.75), (0.0,0.0)	34.15	
16.SSSS	[45/-45/45]	(0.2,-0.2), (-0.2,0.2)	33.47	36.18



	[30/-70/30]	(0.1,-0.3), (-0.1,0.3)	34.94	
17.SSSC	[0/90/0]	(0.0,-0.4), (0.0,0.2)	36.63	38.56
	[15/-70/15]	(0.1,-0.4), (0.0,0.2)	37.05	
18.SSCC	[45/-45/45]	(-0.1,0.1), (0.1,-0.1)	34.85	43.41
	[30/-60/30]	(0.0,-0.3), (-0.1,0.2)	41.38	
19.SCSC	[90/90/90]	(0.2,0.0), (-0.2,0.0)	32.66	44.57
	[50/-35/50]	(0.3,-0.1), (-0.3,0.1)	43.91	
20.CCCS	[0/0/0]	(0.0,0.2), (0.0,-0.2)	33.38	48.03
	[30/-60/30]	(0.1,-0.3), (-0.1,0.3)	44.29	
21.CCCC	[45/-45/45]	(0.2,-0.2), (-0.2,0.2)	49.19	51.57
	[30/-60/30]	(-0.1,0.2), (0.1,-0.2)	49.54	

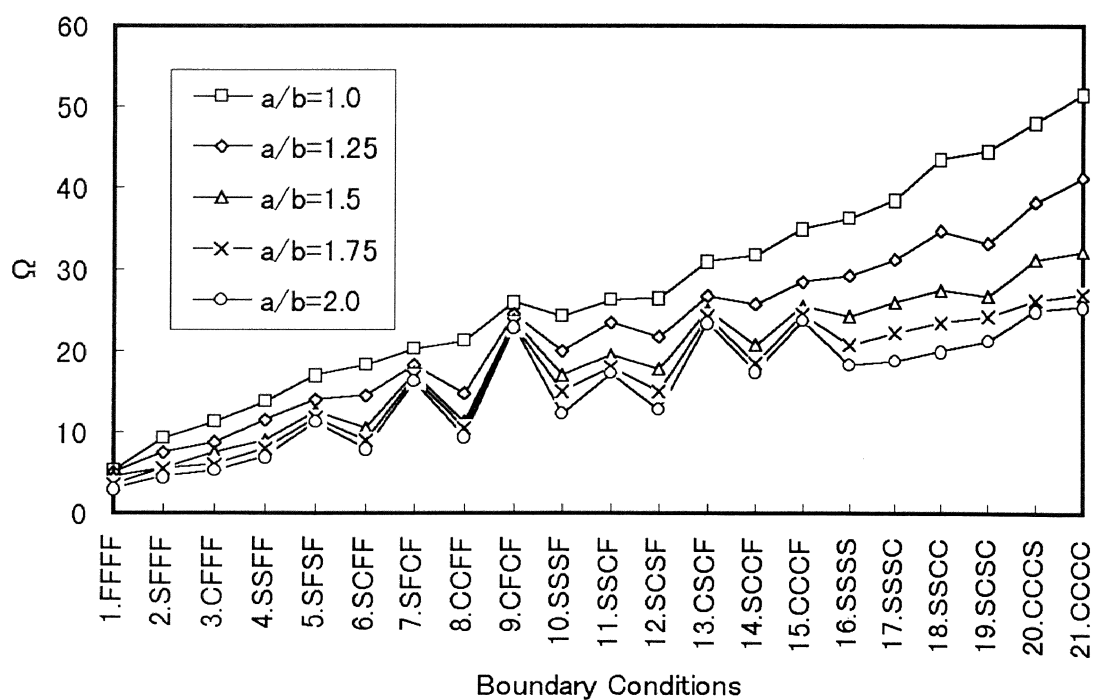


図5-7 2点支持3層正方形板の拘束条件と最適基本振動数

表5 - 1 0 2点支持3層長方形板最適解

(Graphite/epoxy,  $a/b=1.25$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Point location	frequency
1.FFFF	[90.0/-44.2/46.1]	(0.23,-0.39), (-0.06,0.66)	4.889
2.SFFF	[85.9/-37.6/-5.5]	(0.44,0.55), (0.46,-0.52)	7.516
3.CFFF	[40.1/-56.4/40.6]	(0.23,0.31), (0.45,-0.59)	8.737
4.SSFF	[2.2/-78.2/24.1]	(0.22,0.63), (0.55,-0.10)	11.41
5.SFSF	[56.0/-30.5/53.9]	(-0.13,-0.68), (0.10,0.67)	13.98
6.SCFF	[85.1/-35.8/85.3]	(-0.18,0.62), (0.75,0.56)	14.39
7.CCFF	[83.4/-29.0/83.1]	(0.05,0.59), (0.99,0.55)	14.63
8.SFCF	[-1.8/52.3/-0.03]	(0.06,0.55), (0.56,-0.55)	18.22
9.CFCF	[1.1/-36.1/1.3]	(0.03,-0.54), (0.24,0.53)	24.42
10.SSSF	[-47.2/33.9/-47.6]	(0.14,0.69), (-0.27,0.05)	19.98
11.SCSF	[-44.1/35.4/-44.1]	(0.12,0.73), (-0.16,0.12)	21.74
12.SSCF	[-51.9/34.7/-51.7]	(-0.01,0.66), (-0.22,-0.05)	23.55
13.SCCF	[-48.3/35.4/-48.2]	(0.01,0.67), (-0.26,0.08)	25.82
14.CSCF	[-4.1/59.5/-4.4]	(0.02,0.66), (0.10,-0.15)	26.72
15.CCCF	[-49.2/36.8/-49.0]	(0.06,0.69), (0.06,-0.02)	28.44
16.SSSS	[40.3/-53.3/40.8]	(0.07,-0.30), (-0.09,0.29)	29.21
17.SSSC	[36.0/-49.4/36.9]	(0.10,-0.34), (-0.08,0.20)	31.29
18.SCSC	[30.9/-59.6/31.8]	(0.07,-0.26), (-0.07,0.26)	33.35
19.SSCC	[41.0/-55.7/42.5]	(0.03,-0.32), (-0.18,0.19)	34.82
20.CCCS	[48.2/-38.3/45.5]	(0.07,-0.17), (-0.11,0.32)	38.22
21.CCCC	[42.2/-48.0/44.3]	(0.10,-0.22), (-0.07,0.26)	41.24

表 5 - 1 1 2 点支持 3 層長方形板最適解

(Graphite/epoxy,  $a/b=1.5$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Point location	frequency
1.FFFF	[46.3/-48.6/90.0]	(0.12,-0.49), (-0.04,0.61)	4.048
2.SFFF	[-16.4/89.8/37.7]	(0.08,-0.56), (0.15,0.49)	5.419
3.CFFF	[-81.9/-89.5/23.1]	(0.35,0.54), (0.65,-0.57)	7.427
4.SSFF	[46.8/-44.3/46.4]	(0.35,0.75), (0.89,0.02)	9.103
5.SCFF	[36.8/-62.6/36.9]	(0.27,0.72), (0.88,0.15)	10.59
6.CCFF	[28.2/-85.3/6.4]	(0.23,-0.11), (0.21,0.62)	11.22
7.SFSF	[3.3/-46.1/2.3]	(0.06,-0.53), (0.43,0.54)	12.41
8.SFCF	[1.9/-37.4/2.1]	(0.03,-0.51), (0.29,0.56)	17.28
9.CFCF	[0.89/-23.1/0.9]	(0.09,-0.53), (0.08,0.52)	23.69
10.SSSF	[-38.6/48.4/49.4]	(0.05,0.70), (0.05,-0.13)	16.98
11.SCSF	[-10.5/-89.5/67.1]	(0.00,0.72), (0.00,-0.03)	17.68
12.SSCF	[-13.1/49.5/-13.1]	(-0.03,0.61), (0.06,-0.20)	19.39
13.SCCF	[-42.3/49.9/-36.9]	(0.21,0.58), (-0.06,-0.05)	20.64
14.CSCF	[2.7/-44.9/2.9]	(0.04,-0.17), (-0.04,0.65)	25.01
15.CCCF	[-3.0/55.2/-2.8]	(0.01,0.68), (-0.06,-0.08)	25.58
16.SSSS	[50.1/-37.7/47.0]	(0.06,-0.30), (-0.06,0.30)	24.27
17.SSSC	[44.4/-44.6/42.5]	(0.01,0.24), (0.12,-0.33)	25.96
18.SCSC	[44.0/-89.3/40.4]	(-0.17,0.19), (0.10,-0.22)	26.86
19.SSCC	[51.16/90.0/50.7]	(0.05,-0.30), (-0.25,0.13)	27.54
20.CCCS	[-53.2/34.3/-48.1]	(0.06,-0.26), (0.15,0.31)	31.32
21.CCCC	[43.9/88.1/50.6]	(0.03,0.30), (0.20,-0.17)	32.26

表 5 - 1 2 2 点支持 3 层长方形板最適解

(Graphite/epoxy,  $a/b=1.75$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Point location	frequency
1.FFFF	[90.0/-60.5/47.0]	(0.19,-0.40), (0.05,0.70)	3.385
2.SFFF	[83.2/90.0/-29.7]	(0.50,-0.59), (0.56,0.55)	5.446
3.CFFF	[-38.6/48.4/-37.9]	(0.02,-0.28), (0.67,0.61)	6.077
4.SSFF	[89.7/35.4/4.5]	(0.51,0.72), (0.49,-0.12)	7.945
5.SCFF	[45.8/-44.0/45.9]	(0.19,0.63), (0.73,0.12)	9.034
6.CCFF	[39.5/-75.6/45.5]	(0.34,-0.08), (0.75,0.83)	10.56
7.SFSF	[2.7/-42.7/2.6]	(0.02,-0.53), (-0.04,0.53)	11.68
8.SFCF	[-1.6/35.0/-1.9]	(-0.03,-0.55), (0.00,0.51)	16.72
9.CFCF	[-0.1/-1.6/0.0]	(0.02,-0.53), (0.03,0.53)	23.31
10.SSSF	[-61.0/29.1/-61.1]	(-0.02,0.76), (-0.14,-0.07)	15.06
11.SCSF	[90.0/5.1/-49.9]	(0.08,0.69), (0.02,0.02)	15.11
12.SSCF	[-8.3/48.3/-8.5]	(0.07,-0.20), (0.27,0.59)	18.04
13.SCCF	[-8.6/50.5/-8.6]	(0.01,0.63), (-0.17,-0.10)	18.52
14.CSCF	[1.3/-34.7/1.7]	(0.03,-0.18), (0.08,0.65)	24.13
15.CCCF	[-1.3/42.1/-1.3]	(0.04,0.67), (0.02,-0.09)	24.45
16.SSSS	[53.5/-37.6/54.6]	(0.02,-0.33), (-0.13,0.27)	20.81
17.SSSC	[52.8/-42.4/47.0]	(0.00,-0.39), (-0.15,0.16)	22.24
18.SSCC	[-54.5/55.8/-42.9]	(0.03,-0.44), (0.08,0.14)	23.54
19.SCSC	[49.6/-35.8/47.4]	(0.06,-0.27), (-0.14,0.22)	24.13
20.CCCS	[-2.6/76.9/-1.9]	(0.01,-0.25), (0.16,0.37)	26.26
21.CCCC	[-2.1/77.3/-2.7]	(0.07,0.29), (0.18,-0.30)	27.07

表 5 - 1 3 2 点支持 3 層長方形板最適解

(Graphite/epoxy,  $a/b=2.0$ ,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	Point location	frequency
1.FFFF	[90.0/-58.3/52.7]	(0.26,-0.40), (0.17,0.75)	2.903
2.SFFF	[54.2/47.8/-47.2]	(0.30,-0.53), (0.17,0.44)	4.566
3.CFFF	[-36.8/46.5/-36.8]	(0.01,-0.30), (0.51,0.64)	5.346
4.SSFF	[66.3/-21.0/-38.2]	(0.56,0.66), (0.52,-0.14)	7.041
5.SCFF	[51.6/-29.0/52.3]	(0.21,0.62), (0.92,0.12)	7.939
6.CCFF	[2.6/89.9/-78.3]	(0.61,0.78), (0.68,0.00)	9.405
7.SFSF	[1.4/-38.4/1.6]	(0.04,-0.52), (0.23,0.53)	11.22
8.SFCF	[-0.1/-13.6/-0.8]	(0.03,-0.54), (0.16,0.51)	16.36
9.CFCF	[0.4/-1.1/0.3]	(0.03,-0.51), (0.16,0.52)	23.07
10.SSSF	[-6.4/45.3/-6.5]	(0.06,0.64), (-0.11,-0.16)	12.36
11.SCSF	[64.3/90.0/53.2]	(0.05,0.80), (-0.06,-0.05)	12.81
12.SSCF	[-2.0/-41.0/-1.5]	(0.03,-0.19), (0.14,0.62)	17.22
13.SCCF	[-2.0/-43.7/--2.8]	(0.03,-0.12), (-0.05,0.65)	17.51
14.CSCF	[-0.7/33.3/-0.1]	(0.02,0.64), (0.17,-0.17)	23.61
15.CCCF	[0.6/-7.2/0.76]	(-0.01,-0.10), (0.07,0.65)	23.81
16.SSSS	[59.6/-35.3/58.8]	(0.05,-0.31), (-0.17,0.27)	18.19
17.SSSC	[42.4/-53.7/-50.6]	(0.07,-0.38), (0.13,0.24)	18.79
18.SSCC	[-10.3/57.5/-10.2]	(0.04,0.25), (-0.13,-0.36)	19.09
19.SCSC	[54.4/-32.6/52.7]	(0.05,-0.27), (-0.14,0.23)	21.14
20.CCCS	[-1.7/55.2/-1.9]	(0.00,-0.25), (0.34,0.37)	24.95
21.CCCC	[-1.0/76.5/-1.0]	(-0.02,0.30), (0.08,-0.30)	25.44

表5-14 辺長比の変化により2点支持3層板の最適解の変化

(Graphite/epoxy,  $h/\sqrt{ab} = 0.01$ )

Boundary	a/b=1.0	a/b=1.25	a/b=1.5	a/b=1.75	a/b=2.0
1.FFFF	5.139	4.889	4.408	3.385	2.903
2.SFFF	9.254	7.516	5.419	5.446	4.566
3.OFFF	11.31	8.737	7.427	6.077	5.346
4.SSFF	13.69	11.41	9.103	7.945	7.041
5.SFSF	16.88	13.98	12.41	11.68	11.22
6.SCFF	18.21	14.39	10.59	9.034	7.939
7.SFCF	20.22	18.22	17.28	16.72	16.36
8.CCFF	21.18	14.63	11.22	10.56	9.405
9.CFCF	25.91	24.42	23.69	23.31	23.07
10.SSSF	24.31	19.98	16.98	15.06	12.36
11.SSCF	26.14	23.55	19.39	18.04	17.22
12.SCSF	26.55	21.74	17.68	15.11	12.81
13.CSCF	31.01	26.72	25.01	24.31	23.61
14.SCCF	31.64	25.82	20.64	18.52	17.51
15.CCCF	35.09	28.44	25.58	24.45	23.81
16.SSSS	36.18	29.19	24.27	20.81	18.19
17.SSSC	38.56	31.29	25.96	22.24	18.79
18.SSCC	43.41	34.82	27.54	23.54	19.97
19.SCSC	44.57	33.35	26.68	24.31	21.14
20.CCCS	48.03	38.22	31.32	26.26	24.95
21.CCCC	51.57	41.23	32.26	27.07	25.44

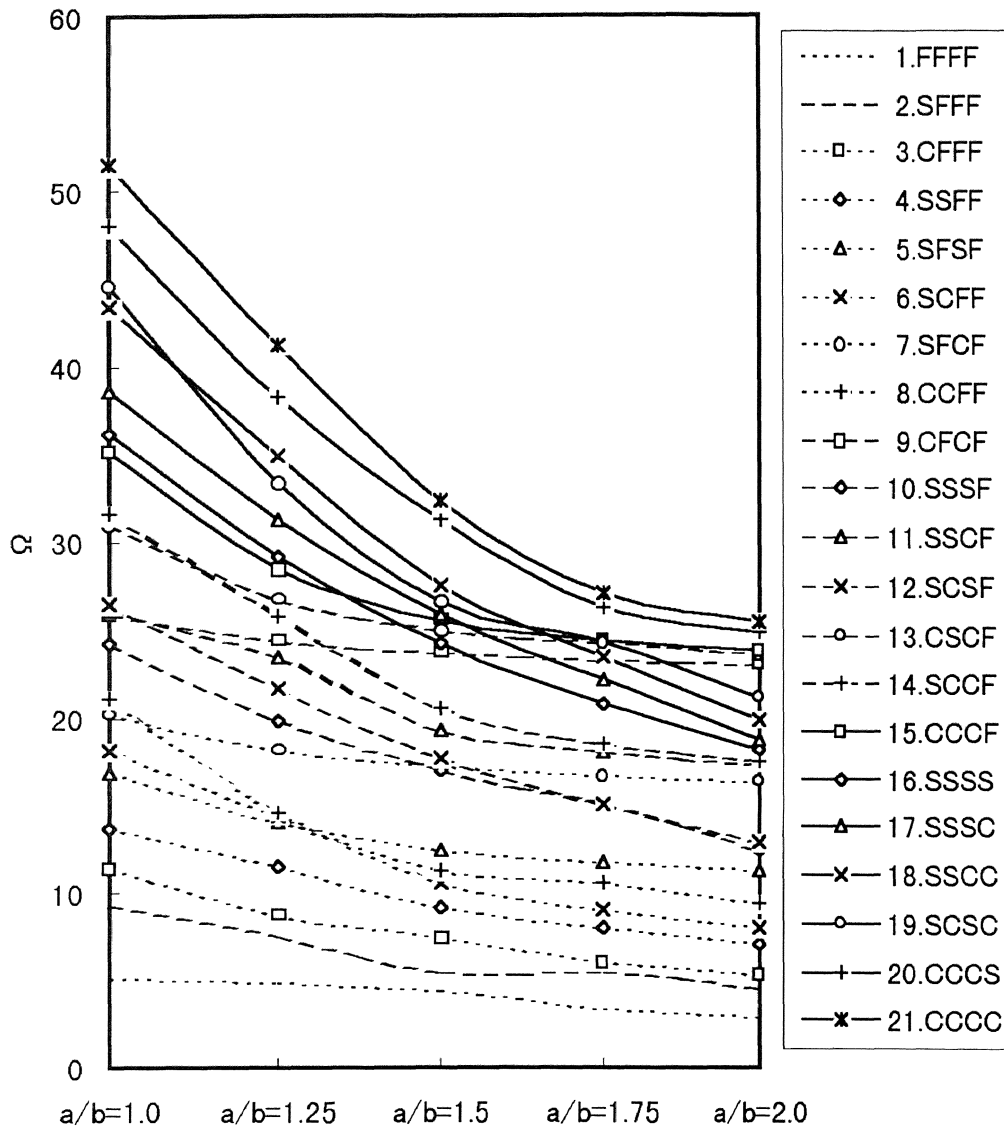


図5-8 2点支持3層正方形板の辺長比と最適基本振動数

表5-1の1つの支持点だけの最適化問題より、2つの点支持がある場合は、2つの点支持の連線方向に沿って強い曲げ剛性が生じてくるため、さらに複雑な結果を与えると予測できる。

2つの点支持の最適解の分類は、1つの点支持の場合と同様に、以下のような自由辺Fの数により特徴づけられる。

(1) 自由辺が4辺の場合 (1. FFFF)

1つの点支持の場合と同じように、2つの点支持があっても拘束条件がやはり不足して剛体

運動モードが存在する。このため、剛体運動モードを除いて最低次振動モードを最大化するように解を求めた結果、釣り合いを満足させるため節線のあるモードをもち、最適な点支持位置は板の中央からずれた位置で、対角線方向に繊維配向角がある解となった。ただし、1つの点支持の解と比べて、点支持の個数が増えたため、基本振動モードは6次から5次が変わったので、基本振動数の値は少し小さくなった。

## (2) 自由辺が3辺の場合 (2. SFFF, 3. CFFF)

4辺に沿った拘束条件は1辺だけに片持支持となるため、曲げ剛性が強い性格を示す上層と下層の繊維が拘束辺から対辺方向に配向されている。ただし、SFFFの場合は、拘束辺と垂直方向の曲げ剛性が比較的弱いので、 $x$ 軸に関する低いねじれ振動モードが生じないように上層と下層の繊維が $0^\circ$ から少しずれた角度で逆対称に近い積層構成となった。最適な支持位置は、ほぼ支持辺と平行し、支持辺から辺長の $2/3$ 位の距離だけ離れる。また、支持辺と平行する方向に沿って板の中央から境界までの真ん中に寄った位置の解となった。一方、CFFFの場合は、片持の拘束条件が比較的強いため、2つの自由コーナは同時に上下振動モードと逆上下運動のねじれモードの両方を補強するようにバランスを取るため、剛性の強い補強する方向が $0^\circ$ からずれている $-35^\circ$ 方向となり、最適な支持点の連線方向とほぼ垂直な解となった。

## (3) 自由辺が2辺の場合 (4. SSFF~9. CFCF)

1つの支持点の場合と同様に、さらに2つのグループに分けられる。5. SFSF, 7. SFCF, 9. CFCFのグループは、1組の対辺がCかSであり、対辺をつなぐ方向と垂直な中央線の近く、中心から自由辺までのほぼ真ん中の位置で最適な支持位置となった。ただし、拘束条件の強弱により、支持位置はやや斜めになる場合もある。それらの繊維配向角は、5. SFSFでは、対辺の単純支持と真ん中の二点支持により拘束られ、剛性の強く補強すべき方向が少し複雑になり、上層と下層の繊維がともに $-55^\circ$ 前後の角度の解となった。7. SFCFと9. CFCFは、ほぼ支持辺をつなぐ方向に繊維を配向された解となった。

隣接する2辺がCかSである4. SSFF, 6. SCFF, 8. CCFFのグループは、点支持位置はすべて拘束辺に挟まれているコーナの対向する自由コーナの中に最適な支持位置となった。対角線に関して対称する拘束条件を持つ4. SSFFと8. CCFFでは、2つの点支持の連線はほぼ1拘束辺と平行し、剛性の強い補強する方向とほぼ垂直となる解となった。6. SCFFでは、2つの点支持の連線は拘束辺に挟まれている対角線と垂直となるような位



置になり、拘束辺Cとその対向する自由辺とつなぐ方向からやや斜めの70°位の角度の最適解となった。

(4) 自由辺が1辺の場合 (10. SSSF~15. CCCF)

3辺から拘束を受けるため、自由辺に向かう中央線に寄った位置に最適な支持点がある。その位置は3辺の拘束の程度に依存する。一点はほぼ中央に、もう一点は中央から自由辺に寄った最適な位置となった。また、自由辺の隣辺に拘束Sがある場合、比較的拘束程度が弱いため、支持点の連線は中央線から少しずれた方が良いという傾向がある。層の繊維は、CかSの1組の拘束対辺をつなぐ方向から30°(-30°)程度の角度で、ほぼ対称または逆対称の積層構成となった。

(5) 自由辺がない場合 (16. SSSS~21. CCCC)

4辺から拘束を受けるため、2つの支持点は辺長の1/3位の距離だけ離れたほぼ中央に位置する。上層と下層の繊維は2つの支持点の連線方向と垂直な方向に配向された。また、支持点の連線方向および層の繊維配向方向は板の中央線よりややずれる方向に解を得た。

1つの点支持の場合と同様な理由で、支持点と境界条件による力学的な特徴に沿った定性的な説明がある程度可能である。しかし、定量的な説明は非常に難しいので、表5-9に、表5-8の解に近い設定条件に対する基本振動数との比較を示す。その結果、表5-8の最適解はすべて表5-9に求められた基本振動数より高い値を示し、その最適解の妥当性を裏付けた。

さらに、表5-10~表5-13は、同じく2個の支持点により拘束された21通りの境界条件を持つ3層長方形板(辺長比はそれぞれ  $a/b=1.25, 1.5, 1.75, 2.0$  とする)について、基本振動数の最大値を与える繊維配向角 $[\theta_l / \theta_m / \theta_u]$ 、点支持位置 $(2x_1/a, 2y_1/b)$ 、 $(2x_2/a, 2y_2/b)$ およびその基本振動数を表す。表5-14と図5-5は21通りの境界条件における長方形板の基本振動数の比較を示す。

これらの表と図により、辺長比  $a/b$  が大きくなるにつれて、すなわち板が正方形から長方形に細長くなるのにもなって、最大基本振動数は徐々に低くなるとみられる。

以上のように支持点を有する最大基本振動数解は、支持点と境界条件による力学的特徴に沿った定性的な観察がある程度可能である。しかし、定量的には、繊維配向角と支持点の最適値はかなりばらついており、最適解であることが明確でない。そこで、表5-2と表5-9に示したように最適解に近い条件に対する基本振動数と比較した結果、最適解はすべて高い値を示

し、本最適解の妥当性を裏付けた。すなわち、多峰性が予測される本問題においても、本章の解は最適解または最適解に近い結果を与えていることは明らかである。

## 5. 5 本章のまとめ

積層長方形板の基本振動数の最大化問題を、一般的な積層構成と境界条件の任意の組合せを考慮して検討した。とくに力学的性質の異なる設計変数である繊維配向角と支持点位置を組合せた問題に対して、改良したコンプレックス最適化方法を提案した。

数値例では、Graphite/Epoxy の 3 層長方形積層板（辺長比  $a/b = 1.0, 1.25, 1.75, 2.0$  とする）が、2 1 通りの境界条件において、1 つと 2 つの支持点により拘束される場合を取り上げ、数値結果の妥当性を検証した。本章の最適化方法は、積層板の最適化問題のみならず、性質の異なる設計変数を含む他の最適設計問題にも有効であると思われる。

# 第6章 一般的な積層長方形板の 座屈荷重の最大化設計

## 6. 1 まえがき

比強度・比剛性に優れた繊維強化複合材料を使用する構造物は航空宇宙分野に典型的に見られるように、厳しい制限重量のため薄肉化されており、その座屈強度を十分に考慮することが重要である。

F R P 積層板は、各層の繊維配向角方向の適切な選択により、特定の設計要求に対する力学特性を改善できることが知られている。このため、積層平板の最適設計に関する論文は多数あり、書籍や展望論文にまとめられている<sup>(51)~(53)</sup>。

しかし、固有値計算にともなう座屈問題に対する最適設計の論文の件数は比較的限られており、さらに過去の文献は全周単純支持や固定の境界条件を持つ積層板に限定され、任意の境界条件まで考慮した研究はほとんど見受けられない。

そこで、本章では、任意の境界条件を考慮する一般的な積層構成をもつ積層板の座屈解析法を利用して、積層板の臨界座屈荷重（以下、座屈荷重と称する）の最大化設計問題を扱う。すなわち非対称積層板も含む一般的な積層構成を持つ平板において、各ラミナが持つ繊維配向角を最適化する。積層板の座屈解析法は古典積層理論に基づいてリッツ法を使い、最適化アルゴリズムは第4章の積層板の振動特性の最適化問題と同様にコンプレックス法を適用する。

数値計算例では、異方性の程度がかなり大きい Graphite/Epoxy と、比較的小さい E-Glass/Epoxy の2種類の材料の長方形積層板を扱った。4辺に沿った自由、単純支持、固定の拘束を種々に配した1 1通りの境界条件を持つ8層板に関して最適な繊維配向角を求めた。また、それらの解の有用性も検証した。

## 6. 2 座屈解析モデルの設定

図6-1は、 $a \times b$ の辺長と厚さ $h$ の板厚を持つ長方形板の中央面を示す。座標系 $o-xyz$ の原点 $O$ を板の中心に取る。 $x$ 、 $y$ 方向の面内に加わる一様な荷重を $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_{xy}$ とする。

積層板の4辺における拘束条件は自由、単純支持、固定の3種類（以降、それぞれF、S、Cの記号により表す）を、各辺毎に独立に選択する。表記の順序は $x = -a/2$ 、 $y = -b/2$ 、 $x = a/2$ 、 $y = b/2$ の辺の順に対応させて表す。例えば、図6-1に示す境界条件は、自由—単純支持—自由—固定であるが、それをFSFCと表す。

層の構成は、非対称を含む一般的な積層である。図3-2(a)に示すように、板の中央面から第 $i$ 層ラミナの上面、下面までの距離をそれぞれ $z_i$ 、 $z_{i-1}$  ( $i=1,2,\dots,N$ 、 $N$ は層数である)とし、また、図3-2(b)に示すように、第 $i$ 層ラミナの面内に、それぞれ材料主軸となる1軸、2軸を取り、 $x$ 軸と1軸とのなす角度を繊維配向角 $\theta_i$ とする。なお各層の繊維配向角 $\theta_i$ の選択は互いに無関係で、一般的な積層とする。

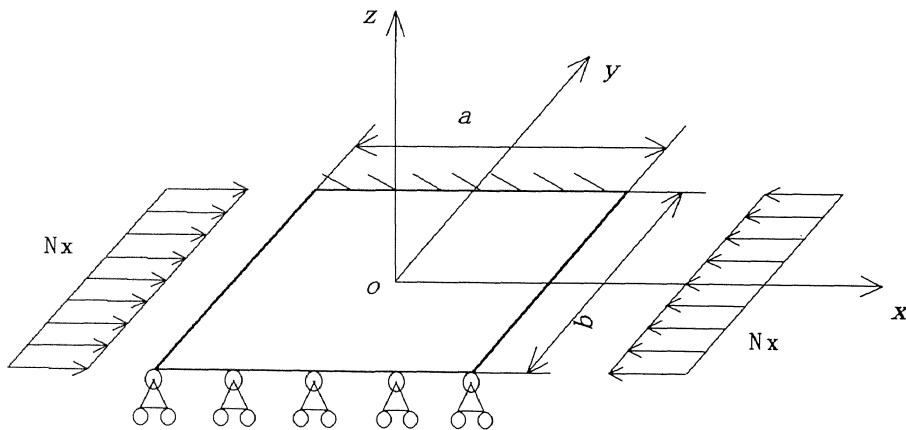


図6-1 任意境界条件をもつ積層長方形板と荷重

### 6. 3 積層板の座屈解析法

積層平板の座屈解析において、変位関数としてべき級数を用いたリッツ法を適用する。ここで、積層長方形板の任意境界条件を満足するために、第4章の振動解析と同様な方法を用い、下記の幾何学の境界条件を自動的に満足する境界条件インデックスを持つ変位関数を導入する。

$$\begin{aligned}
 u_0(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} p_{ij} X_i(\xi) Y_j(\eta) \\
 v_0(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^{I-1} \sum_{l=0}^{J-1} q_{kl} X_k(\xi) Y_l(\eta) \\
 w_0(\xi, \eta) &= \sum_{m=0}^{I-1} \sum_{n=0}^{J-1} r_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta)
 \end{aligned} \quad \dots (6-1)$$

ただし

$$\begin{aligned}
 X_i(\xi) &= \xi^i (\xi+1)^{bc11} (\xi-1)^{bc31} \\
 X_k(\xi) &= \xi^k (\xi+1)^{bc12} (\xi-1)^{bc32} \\
 X_m(\xi) &= \xi^m (\xi+1)^{bc13} (\xi-1)^{bc33} \\
 Y_j(\eta) &= \eta^j (\eta+1)^{bc21} (\eta-1)^{bc41} \\
 Y_l(\eta) &= \eta^l (\eta+1)^{bc22} (\eta-1)^{bc42} \\
 Y_n(\eta) &= \eta^n (\eta+1)^{bc23} (\eta-1)^{bc43}
 \end{aligned} \quad \dots (6-2)$$

である。ここで、 $p_{ij}, q_{kl}, r_{mn}$  は未定係数を表す。 $I, J$  は項数である。また、 $bcij$  は境界条件インデックスであり、 $i$  は長方形板の辺 ( $i=1,2,3,4$  : 順に  $x=-a/2, y=-b/2, x=a/2, y=b/2$ ) を示し、 $j$  はそれぞれの拘束条件の対象 ( $j=1,2,3$  : 順に  $u, v, w$ ) を表す。変位を自由にする場合は  $bcij=0$ 、並進変位を拘束する場合は  $bcij=1$ 、回転変位を拘束する場合は  $bcij=2$  とすればよい。

変位関数 (6-1) を積層板の弾性エネルギー汎関数の式 (3-82) に代入するが、ここで座屈特性を考察するため、積層板の運動エネルギー  $\bar{T}=0$  とする。さらに変位関数の未定係数  $p_{ij}, q_{kl}, r_{mn}$  により極小化を行う。

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial p_{ij}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_{kl}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial r_{mn}} = 0 \quad \dots \dots \dots (6-3)$$

$$i, k, m = 0, 1, 2, \dots, I-1 \quad j, l, n = 0, 1, 2, \dots, J-1$$

これより、次のような未定係数に関する座屈荷重方程式が得られる。

$$([K] - \lambda[L]) \begin{Bmatrix} p_{ij} \\ q_{kl} \\ r_{mn} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad \dots \dots \dots (6-4)$$

ここで

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{ij\bar{j}} & K_{k\bar{l}\bar{j}} & K_{m\bar{n}\bar{j}} \\ K_{k\bar{l}\bar{j}} & K_{k\bar{k}\bar{l}} & K_{m\bar{k}\bar{n}\bar{l}} \\ K_{m\bar{n}\bar{j}} & K_{m\bar{k}\bar{n}\bar{l}} & K_{m\bar{m}\bar{n}\bar{n}} \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (6-5)$$

であり

$$K_{ij\bar{j}} = a_{11} I_{ij\bar{j}}^{(1100)} + \alpha^2 a_{66} I_{ij\bar{j}}^{(0011)} + \alpha a_{16} (I_{ij\bar{j}}^{(0110)} + I_{ij\bar{j}}^{(1001)})$$

$$K_{k\bar{l}\bar{j}} = \alpha a_{66} I_{k\bar{l}\bar{j}}^{(1100)} + \alpha a_{12} I_{k\bar{l}\bar{j}}^{(0110)} + a_{16} I_{k\bar{l}\bar{j}}^{(1100)} + \alpha^2 a_{26} I_{k\bar{l}\bar{j}}^{(0011)}$$

$$K_{m\bar{n}\bar{j}} = -2 \left\{ b_{11} I_{m\bar{n}\bar{j}}^{(2100)} + 2\alpha^2 b_{66} I_{m\bar{n}\bar{j}}^{(1011)} + \alpha^2 b_{12} I_{m\bar{n}\bar{j}}^{(0120)} \right.$$

$$\left. + \alpha b_{16} (2I_{m\bar{n}\bar{j}}^{(1110)} + I_{m\bar{n}\bar{j}}^{(2001)}) + \alpha^3 I_{m\bar{n}\bar{j}}^{(0021)} \right\}$$

$$K_{k\bar{k}\bar{l}} = \alpha^2 a_{22} I_{k\bar{k}\bar{l}}^{(0011)} + a_{66} I_{k\bar{k}\bar{l}}^{(1100)} + \alpha a_{26} (I_{k\bar{k}\bar{l}}^{(0110)} + I_{k\bar{k}\bar{l}}^{(1001)})$$

$$K_{m\bar{k}\bar{n}\bar{l}} = -2 \left\{ \alpha^2 b_{22} I_{m\bar{k}\bar{n}\bar{l}}^{(0021)} + 2\alpha b_{66} I_{m\bar{k}\bar{n}\bar{l}}^{(1110)} + \alpha b_{12} I_{m\bar{k}\bar{n}\bar{l}}^{(2001)} \right.$$

$$\left. + 2b_{66} I_{m\bar{k}\bar{n}\bar{l}}^{(2100)} + \alpha^2 b_{26} (2I_{m\bar{k}\bar{n}\bar{l}}^{(1011)} + I_{m\bar{k}\bar{n}\bar{l}}^{(0120)}) \right\}$$

$$\begin{aligned}
K_{\overline{mnnn}} = & d_{11} I_{\overline{mnnn}}^{(2200)} + \alpha^4 d_{22} I_{\overline{mnnn}}^{(0022)} + \alpha^2 d_{12} \left( I_{\overline{mnnn}}^{(0220)} + I_{\overline{mnnn}}^{(2002)} \right) \\
& + 2\alpha d_{16} \left( I_{\overline{mnnn}}^{(1210)} + I_{\overline{mnnn}}^{(2101)} \right) + 2\alpha^3 d_{26} \left( I_{\overline{mnnn}}^{(1012)} + I_{\overline{mnnn}}^{(0121)} \right) \\
& + 4\alpha^2 d_{66} I_{\overline{mnnn}}^{(1111)} \\
& \dots \dots \dots (6-6)
\end{aligned}$$

となる。ここで、剛性比  $a_{ij}, b_{ij}, d_{ij}$  は

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \frac{\alpha^2}{D_0} A_{ij} & i, j = 1, 2, 6 \\
b_{ij} &= \frac{a}{D_0} B_{ij} & i, j = 1, 2, 6 \\
d_{ij} &= \frac{1}{D_0} D_{ij} & i, j = 1, 2, 6
\end{aligned} \dots \dots \dots (6-7)$$

である。次にマトリックス  $[L]$  は

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{\overline{mnnn}} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (6-8)$$

$$L_{\overline{mnnn}} = \lambda_x(\eta) I_{\overline{mnnn}}^{(1100)} + \lambda_y(\xi) I_{\overline{mnnn}}^{(0011)} + \lambda_{xy} \left\{ I_{\overline{mnnn}}^{(0110)} + I_{\overline{mnnn}}^{(1001)} \right\}$$

である。

以上の式において、 $\lambda_x, \lambda_y$  と  $\lambda_{xy}$  はそれぞれ  $x$  軸、 $y$  軸とせん断応力方向の座屈荷重である。また、積分表示  $I_{\overline{mnnn}}^{(abcd)}$  は、第4章の積層板の振動問題と同一であるので、式(4-10)～式(4-25)を参照する。

結局、式(6-4)の係数行列の固有値問題として、臨界座屈荷重パラメータが求められる。

## 6. 4 最適化アルゴリズム

任意境界条件を持つ一般的な積層板に対して座屈特性の最適化問題を考察する。目的関数は積層板の座屈荷重として、その最大化を設計の目的とする。設計変数は各ラミナにおける繊維配向角  $\theta_i$  ( $-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$ ) とする。この問題を数理的に表現すると

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T \\ \text{Maximize} \quad & \lambda = f(\theta) \quad \dots \dots (6-9) \\ \text{Subject to} \quad & -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

と定式化される。ここで、 $N$  は層の層数であり、 $\lambda$  は無次元化された座屈荷重パラメータであり、 $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$  とする。

この最適化問題に、第4章の積層板の振動特性最適化問題と同様に、コンプレックス法を適用する。その最適化アルゴリズムの詳細については、第4章の4.4節を参照する。

## 6. 5 数値計算例

以上までの任意境界条件を考慮した積層板の座屈解析法と、コンプレックス法の最適化アルゴリズムに基づき、一般的な積層構成を持つ長方形板の座屈荷重に関する最適化数値計算例の設定条件は、下記の1~6とする。

1. 積層長方形板の4辺における拘束条件は、F：自由，S：単純支持，C：固定の3種類とし、その組合せは任意である。本章の最適化計算例では、主に長方形板の11通りの境界条件の組合せについて最適化計算を行う。
2. 積層板の材質は、異方性の程度がかなり強い Graphite/epoxy 材と、異方性の程度が比較的弱い E-Glass/epoxy 材を扱い、それらの材料定数は

$$\text{Graphite/epoxy: } E_1 = 138.0 \text{ GPa} \quad E_2 = 8.96 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 7.10 \text{ Gpa} \quad \nu_{12} = 0.30$$

$$\text{異方比 } E_1 / E_2 = 15.40$$



$$\begin{aligned} \text{E-Glass/epoxy: } E_1 &= 60.7 \text{ GPa} & E_2 &= 24.8 \text{ GPa} \\ G_{12} &= 12.0 \text{ GPa} & \nu_{12} &= 0.23 \\ \text{異方比 } E_1 / E_2 &= 2.45 \end{aligned}$$

の値を用いた。

3. 最適化計算において、積層条件は任意の積層角度を持つ8層板として、積層配向角は下から順に $[\theta_1 / \theta_2 / \dots / \theta_8]$ と表示する。各層ラミナーの厚さは同一として、それぞれの繊維配向角 $\theta_i$  ( $-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$ ,  $i=1,2,\dots,8$ )は互いに独立に選択できるものとする。したがって設計変数の数も8となる。
4. 積層板の厚さと辺長の比は $h/a=0.01$ とする。辺長比は $b/a=0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5$ とする。
5. 積層板の座屈解析には、エネルギー原理に基づくリッツ法を使う。変位変数の二重べき級数の項数は、4桁の収束を示して本章の最適化計算に十分な精度を有する $8 \times 8$ 項とした。
6. 最適化アルゴリズムの中で使われるコンプレックスの頂点数は、設計変数の繊維配向角 $\theta_i$  ( $i=1,2,\dots,8$ )が8個であることを考慮した上で14個とした。初期コンプレックスの頂点 $\theta^j$  ( $j=1,2,\dots,14$ )は、ここでは乱数を用いず、入力データとして他の計算条件や材料データ等と一緒に入力した。

表6-1～表6-5は、本章の最適化方法により、11通りの境界条件の組合せに対して得られた Graphite/epoxy 材料の8層板の最適繊維配向角 $[\theta_1 / \theta_2 / \dots / \theta_8]$ と座屈荷重 $\lambda$ である。表6-6と図6-2および図6-3に、それぞれ辺長比と境界条件により最大座屈荷重値の変化を示す。結果を全体的に見ると、あらかじめ予測されるように、最適な積層はほぼ対称的、または一軸分布に近い積層構成になっている。

個別に見ると、片持板の1. C F F Fでは荷重方向に固定端があるため、すべての層の繊維配向角が $0^\circ$ 方向に揃う場合に最大の座屈荷重となる。一方、片持板の2. F C F Fでは、面内荷重に対向する自由辺から加えられるため、その最適解は、固定端から $\pm 50^\circ$ 前後に向うアングルプライ状の繊維配向により曲げ効果が拘束され、境界条件1. C F F Fよりも少し高い座屈荷重値を示している。

表6-1 8層長方形板の座屈荷重最適解

( Graphite/epoxy,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$ ,  $b/a = 0.5$  )

Boundary	Fiber angles	Buckling load
1.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	37.91
2.FCFF	[54.3/-39.9/55.0/-42.1/-37.3/57.0/-39.8/53.4]	228.2
3.CSFF	[34.3/-54.1/33.9/-53.7/-50.9/33.3/-54.3/34.5]	189.1
4.SCFF	[41.4/-54.1/44.5/-55.5/-53.4/42.9/-54.6/41.3]	282.8
5.CCFF	[34.2/-61.8/33.6/-56.8/-58.1/35.6/-61.6/33.6]	313.9
6.SSFS	[40.2/-49.5/38.2/-47.3/-45.4/35.4/-49.7/40.9]	679.5
7.CSFS	[39.9/-49.1/38.9/-44.9/-44.1/35.9/-49.0/40.8]	679.2
8.SCFS	[48.3/-41.1/48.0/-39.4/-39.8/46.0/-41.5/48.9]	939.2
9.CCFS	[48.2/-41.4/47.8/-41.4/-41.9/47.3/-41.5/48.6]	938.1
10.SCFC	[46.7/-43.1/48.6/-43.9/-43.9/48.5/-43.1/47.6]	1059
11.CCFC	[46.9/-43.8/46.9/-41.6/-41.2/46.5/-43.5/46.9]	1057

表6-2 8層長方形板の座屈荷重最適解

( Graphite/epoxy,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$ ,  $b/a = 0.75$  )

Boundary	Fiber angles	Buckling load
1.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	37.93
2.FCFF	[54.0/-43.0/88.1/-47.3/-50.9/64.8/-49.2/61.4]	101.5
3.CSFF	[29.8/-54.4/31.2/-53.7/-54.2/30.9/-54.9/30.1]	92.72
4.SCFF	[31.4/-45.6/32.7/-46.1/-48.4/31.8/-46.3/31.2]	137.9
5.CCFF	[34.4/-65.5/37.0/-62.7/-68.7/34.2/-64.0/35.7]	148.8
6.SSFS	[39.6/-48.6/39.5/-46.4/-46.9/38.4/-49.1/40.4]	302.1
7.CSFS	[40.3/-48.7/38.0/-47.9/-47.2/39.2/-49.1/40.2]	302.2
8.SCFS	[48.4/-41.6/48.5/-39.6/-41.4/47.8/-41.1/48.0]	416.4
9.CCFS	[47.6/-40.6/48.8/-45.1/-43.9/49.2/-40.9/47.7]	416.7
10.SCFC	[47.3/-43.3/46.8/-42.6/-42.7/47.2/-43.0/47.7]	469.2
11.CCFC	[45.1/-42.8/51.4/-45.1/-43.1/47.7/-43.5/47.8]	468.7

表6-3 8層長方形板の座屈荷重最適解

( Graphite/epoxy,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$ ,  $b/a = 1.0$  )

Boundary	Fiber angles	Buckling load
1.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	37.96
2.FCFF	[54.3/-48.6/55.8/-53.3/-51.3/58.1/-49.2/52.8]	50.82
3.CSFF	[24.7/-53.3/26.3/-51.4/-51.6/22.6/-53.8/26.2]	59.94
4.SCFF	[41.9/-51.1/45.1/-50.5/-52.1/43.6/-51.1/43.5]	81.24
5.CCFF	[35.5/-68.0/34.7/-68.6/-64.4/36.5/-68.3/34.8]	85.03
6.SSFS	[38.5/-48.8/46.6/-49.9/-49.2/41.7/-49.0/40.6]	169.87
7.CSFS	[39.5/-48.8/42.7/-46.3/-45.7/37.3/-49.0/41.2]	169.98
8.SCFS	[47.3/-40.7/48.5/-40.4/-39.6/48.4/-41.0/47.6]	234.49
9.CCFS	[49.1/-40.0/43.0/-36.0/-36.8/43.9/-39.1/48.5]	236.57
10.SCFC	[48.0/-43.4/44.4/-42.5/-4.23/46.2/-43.6/47.1]	263.29
11.CCFC	[45.9/-43.0/45.8/-41.6/-42.6/44.6/-43.3/45.5]	264.38

表6-4 8層長方形板の座屈荷重最適解

( Graphite/epoxy,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$ ,  $b/a = 1.25$  )

Boundary	Fiber angles	Buckling load
1.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	37.96
2.FCFF	[50.9/-49.1/50.2/-48.6/-47.2/53.2/-49.1/50.0]	30.12
3.CSFF	[19.9/-49.9/19.5/-51.3/-49.2/20.6/-50.8/19.7]	45.92
4.SCFF	[52.4/-60.1/50.7/-60.1/-60.0/49.4/-89.6/53.0]	48.71
5.CCFF	[27.7/-66.9/30.9/-64.3/-68.3/26.6/-66.0/29.3]	56.48
6.SSFS	[42.1/-49.1/40.3/-48.6/-49.7/41.3/-49.4/42.1]	107.8
7.CSFS	[39.6/-47.6/35.6/-44.4/-46.1/37.5/-47.8/38.9]	109.5
8.SCFS	[47.0/-39.1/49.0/-37.6/-39.5/46.9/-38.9/48.4]	152.1
9.CCFS	[51.0/-38.0/41.7/-37.5/-38.5/48.3/-37.9/48.9]	153.3
10.SCFC	[45.1/-43.5/46.2/-42.2/-41.8/44.4/-43.3/45.4]	169.3
11.CCFC	[44.9/-42.2/46.7/-42.5/-42.8/46.6/-42.4/45.8]	171.1

表6-5 8層長方形板の座屈荷重最適解

( Graphite/epoxy,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$ ,  $b/a = 1.5$  )

Boundary	Fiber angles	Buckling load
1.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	37.97
2.FCFF	[49.1/-48.6/49.2/-47.3/-47.8/50.1/-48.5/49.4]	19.85
3.CSFF	[4.4/9.7/10.0/10.3/5.9/7.7/6.5/8.3]	43.59
4.SCFF	[54.7/-55.1/53.0/-56.0/-56.7/52.7/-54.7/54.9]	30.19
5.CCFF	[9.8/7.5/9.7/2.1/5.5/8.8/8.9/8.7]	46.45
6.SSFS	[43.2/-49.7/43.6/-49.4/-51.6/42.5/-49.7/43.8]	73.69
7.CSFS	[36.1/-44.5/38.0/-45.2/-45.9/38.3/-44.9/36.1]	78.11
8.SCFS	[49.2/-37.0/52.2/-40.8/-41.3/53.3/-36.7/49.1]	106.8
9.CCFS	[50.4/-36.7/52.2/-36.0/-39.3/50.0/-36.1/50.9]	107.1
10.SCFC	[43.6/-42.6/48.2/-43.0/-43.3/46.1/-43.0/45.2]	119.1
11.CCFC	[47.2/-41.3/48.0/-42.5/-41.8/49.0/-41.0/47.4]	119.9

表6-6 8層長方形板の座屈荷重最適解

( Graphite/epoxy,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$  )

Boundary	a/b=0.5	a/b=0.75	a/b=1.0	a/b=1.25	a/b=1.5
1.CFFF	37.91	37.93	37.96	37.96	37.97
2.FCFF	228.2	101.5	50.82	30.12	19.85
3.CSFF	189.1	92.72	59.94	45.92	43.59
4.SCFF	282.8	137.9	81.24	48.71	30.19
5.CCFF	313.9	148.8	85.03	56.48	46.45
6.SSFS	679.5	302.1	169.87	107.8	73.69
7.CSFS	679.2	302.2	169.98	109.5	78.11
8.SCFS	939.2	416.4	234.49	152.1	106.8
9.CCFS	938.1	416.7	236.57	153.3	107.1
10.SCFC	1059	469.2	263.29	169.3	119.1
11.CCFC	1057	468.7	264.38	171.1	119.9

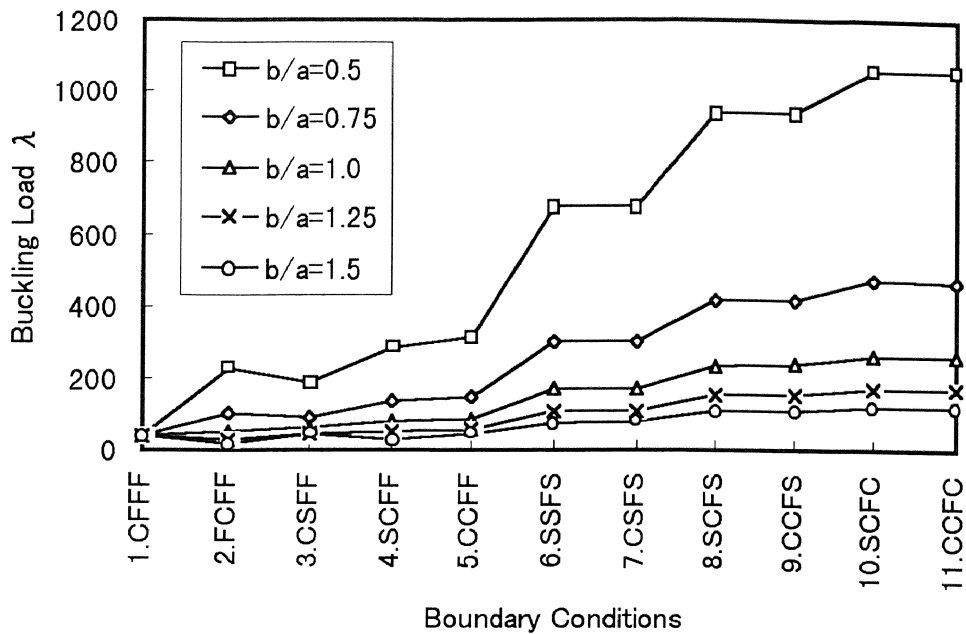


図6-2 Graphite/Epoxy 積層板の境界条件と最大座屈荷重

境界条件3. CSFFと4. SCFFの場合は、SとCが入れ替っただけの同一の拘束といえるが、その最適な座屈荷重値には大きな差がある。辺長比 $b/a$ が小さい場合は、固定辺が荷重方向にある3. CSFFと比べ、固定辺が側面に位置する4. SCFFのほうが高くなり、逆に辺長比 $b/a$ が大きい場合は結果も逆になった。

一方、境界条件4. SCFFと5. CCFFの結果を比較すると、固定辺が増えているにもかかわらず座屈荷重値に大きな開きが見られない。これから、荷重方向にある辺の境界条件よりも、側面部の辺の拘束条件が座屈荷重の増加に影響を与えていることがわかる。これは、SとCが入れ替った6. SSFSと7. CSFS；8. SCFSと9. CCFS；10. SCFCと11. CCFCの比較からも裏付けられ、荷重方向にある単純支持辺が固定辺に変わっても、ほぼ同一の荷重値を与えている。

また、2. FCFF、6. SSFC、7. CSFS、10. SCFC、11. CCFCは、境界条件の組合せに対称軸があり、最適解もその対称軸に関して対称なアングルプライ積層に近い解に収束している。

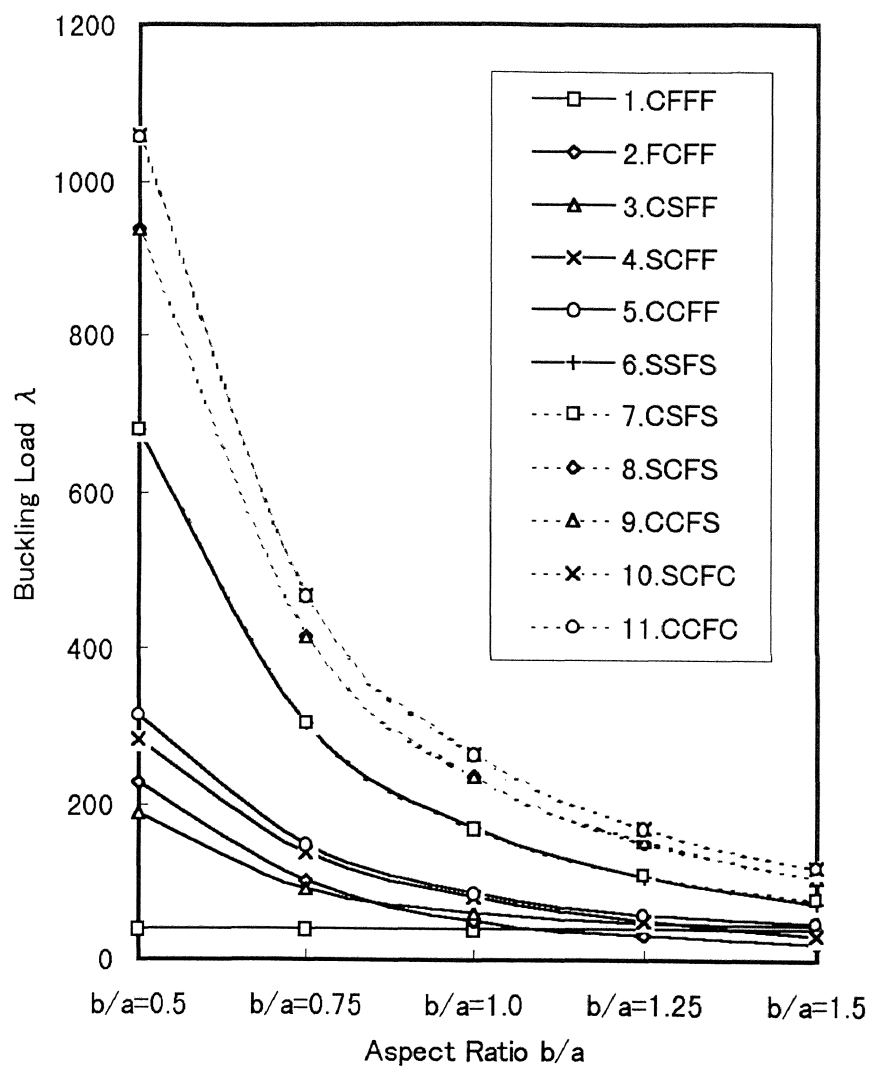


図6-3 Graphite/Epoxy 積層板の辺長比と最大座屈荷重値

表6-7 8層長方形板の座屈荷重最適解

(E-Glass /epoxy,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$ ,  $b/a = 0.5$ )

Boundary	Fiber angles	Buckling load
1.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	5.965
2.FOFF	[53.8/-40.0/48.7/-39.1/-38.4/52.6/-39.6/53.7]	56.58
3.CSFF	[36.7/-53.0/36.4/-51.6/-52.6/32.6/-51.5/35.9]	37.59
4.SOFF	[39.7/-53.1/36.3/-54.1/-62.4/43.3/-63.3/40.9]	65.22
5.COFF	[33.1/32.9/36.2/33.8/31.4/30.1/34.1/33.9]	71.37
6.SSFS	[42.7/-47.5/42.7/-46.5/-47.1/42.9/-46.9/43.5]	165.9
7.CSFS	[43.1/-47.4/42.6/-46.6/-45.8/42.3/-46.8/43.8]	165.9
8.SCFS	[48.5/-39.6/48.7/-44.9/-42.0/51.9/-39.3/47.5]	220.2
9.CCFS	[48.0/-39.9/48.3/-41.2/-42.6/48.9/-40.6/47.8]	220.2
10.SCFC	[45.8/-44.3/45.6/-44.5/-44.5/45.9/-44.6/45.9]	262.1
11.CCFC	[45.0/-45.0/45.0/-45.0/-45.0/45.0/-45.0/45.0]	261.9

表6-8 8層長方形板の座屈荷重最適解

(E-Glass /epoxy,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$ ,  $b/a = 0.75$ )

Boundary	Fiber angles	Buckling load
1.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	5.982
2.FOFF	[57.5/-50.3/59.4/-53.3/-52.1/58.6/-49.9/56.4]	23.64
3.CSFF	[28.1/27.8/27.3/29.0/28.6/26.7/27.5/27.8]	18.43
4.SOFF	[27.6/27.2/30.8/27.7/28.3/26.8/28.2/28.4]	33.15
5.COFF	[38.1/38.9/40.3/39.4/39.0/38.3/38.8/38.7]	34.59
6.SSFS	[43.1/-46.2/42.2/-46.9/-46.4/43.1/-46.2/42.7]	73.75
7.CSFS	[42.0/-45.9/39.0/-45.1/-45.1/40.7/-45.8/41.9]	74.43
8.SCFS	[48.5/-40.9/48.8/-41.0/-41.6/49.7/-40.5/48.4]	97.69
9.CCFS	[47.9/-39.0/47.0/-39.7/-40.6/49.5/-40.6/48.7]	97.95
10.SCFC	[45.0/-45.0/45.0/-45.0/-45.0/45.0/-45.0/45.0]	116.4
11.CCFC	[45.3/-44.6/45.5/-44.5/-44.1/45.5/-43.9/45.3]	116.4

表6-9 8層長方形板の座屈荷重最適解

(E-Glass /epoxy,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$ ,  $b/a = 1.0$ )

Boundary	Fiber angles	Buckling load
1.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	5.993
2.FCFF	[52.7/-50.6/54.0/-50.0/-50.3/52.6/-51.6/52.8]	11.54
3.CSFF	[22.7/22.2/24.4/23.9/26.1/20.8/22.2/23.3]	12.52
4.SCFF	[45.6/90.0/44.0/90.0/90.0/45.5/90.0/45.1]	18.41
5.COFF	[38.1/38.2/37.9/33.8/33.2/37.8/38.0/39.8]	19.63
6.SSFS	[40.8/-45.9/43.2/-45.9/-46.8/41.1/-45.7/40.3]	42.21
7.CSFS	[42.7/-45.7/40.9/-44.7/-44.2/41.9/-47.3/42.5]	42.44
8.SCFS	[47.2/-38.2/46.7/-40.4/-41.8/47.3/-39.4/47.1]	54.96
9.CCFS	[46.4/-35.9/50.6/-38.4/-34.4/49.1/-35.1/47.5]	56.18
10.SCFC	[45.0/-45.0/45.0/-45.0/-45.0/45.0/-45.0/45.0]	65.13
11.CCFC	[42.1/-43.5/43.3/-43.7/-43.2/43.3/-43.1/43.5]	65.88

表6-10 8層長方形板の座屈荷重最適解

(E-Glass /epoxy,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$ ,  $b/a = 1.25$ )

Boundary	Fiber angles	Buckling load
1.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	6.001
2.FCFF	[50.6/-51.2/52.3/-50.5/-49.1/50.3/-49.0/50.4]	6.718
3.CSFF	[18.9/19.8/14.0/20.5/19.2/17.5/18.1/18.9]	9.929
4.SCFF	[54.6/90.0/55.1/90.0/90.0/53.5/90.0/55.7]	10.28
5.COFF	[30.0/30.0/30.0/30.0/30.0/30.0/30.0/30.0]	13.21
6.SSFS	[44.6/-48.5/44.0/-48.1/-48.0/43.3/-47.3/43.9]	27.17
7.CSFS	[42.7/-46.5/43.1/-47.8/-47.1/43.7/-46.5/42.5]	27.21
8.SCFS	[46.1/-34.6/45.8/-33.0/-34.9/45.6/-33.8/45.8]	36.12
9.CCFS	[49.2/-32.4/48.6/-34.1/-32.7/48.7/-32.6/48.4]	36.89
10.SCFC	[41.0/-41.8/45.7/-38.7/-41.6/40.7/-41.8/41.4]	41.98
11.CCFC	[39.5/-41.3/42.9/-43.1/-42.8/39.9/-41.1/38.8]	43.32



表6-11 8層長方形板の座屈荷重最適解

(E-Glass /epoxy,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$ ,  $b/a = 1.5$ )

Boundary	Fiber angles	Buckling load
1.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	6.008
2.FCFF	[49.8/-49.2/48.0/-48.8/-48.7/49.0/-49.3/49.5]	4.369
3.CSFF	[14.5/14.1/13.2/11.9/15.7/15.3/14.4/13.1]	8.616
4.SCFF	[53.8/-56.9/53.2/-56.7/-56.0/54.2/-57.6/54.0]	6.305
5.CCFF	[21.9/20.9/19.8/16.9/18.6/21.5/21.2/21.9]	10.31
6.SSFS	[49.3/-49.5/48.6/-49.7/-49.8/49.6/-49.6/49.3]	18.45
7.CSFS	[39.6/-43.5/40.3/-43.4/-42.6/39.3/-43.8/39.9]	19.06
8.SCFS	[48.6/-32.9/49.0/-24.8/-29.9/43.3/-30.9/50.6]	25.76
9.CCFS	[51.2/-32.0/50.7/-32.8/-35.5/51.4/-31.7/51.4]	25.86
10.SCFC	[37.4/-41.4/31.4/-40.7/-39.5/35.9/-39.7/36.5]	30.12
11.CCFC	[42.2/-42.3/41.5/-44.6/-44.2/41.9/-42.6/39.6]	30.79

表6-12 8層長方形板の座屈荷重最適解

(E-Glass /epoxy,  $h/a = 0.01$ ,  $\lambda_x = a^2 N_x / D_0$ )

Boundary	a/b=0.5	a/b=0.75	a/b=1.0	a/b=1.25	a/b=1.5
1.CFFF	5.965	5.982	5.993	6.001	6.008
2.FCFF	56.58	23.64	11.54	6.718	4.369
3.CSFF	37.59	18.43	12.52	9.929	8.616
4.SCFF	65.22	33.15	18.41	10.28	6.305
5.CCFF	71.37	34.59	19.63	13.21	10.31
6.SSFS	165.9	73.75	42.21	27.17	18.45
7.CSFS	165.9	74.43	42.44	27.21	19.06
8.SCFS	220.2	97.69	54.96	36.12	25.76
9.CCFS	220.2	97.95	56.18	36.89	25.86
10.SCFC	262.1	116.4	65.13	41.98	30.12
11.CCFC	261.9	116.4	65.88	43.32	30.79

他方、辺長比 $b/a$ の増加にともない1. C F F Fの最適な座屈荷重はほぼ同一の値となり、これに対して、他の境界条件における最適な座屈荷重は全体的に減少する傾向が見える。

表6-7~表6-11は、本章の方法により、11通りの境界条件の組合せに対して得られたE-Glass/epoxy材料の8層板の最適繊維配向角 $[\theta_1/\theta_2/\dots/\theta_8]$ と座屈荷重 $\lambda$ である。表6-12と図6-4および図6-5には、それぞれ辺長比と境界条件により最大座屈荷重値の変化を示す。前例のGraphite/Epoxy材と比較し異方性がかなり弱いから、その最適解に及ぼす影響もある程度あると予測される。

境界条件の1. C F F Fでは、荷重方向に固定端があるため、すべての層の繊維配向角が $0^\circ$ 方向に揃う最大座屈荷重値となった。境界条件2. F C F Fでは、面内荷重に対向する自由辺から加えられるため、その最適解は、固定端からアングルプライ状の繊維配向により曲げ効果が拘束され、境界条件1. C F F Fより高い座屈荷重値を示す。

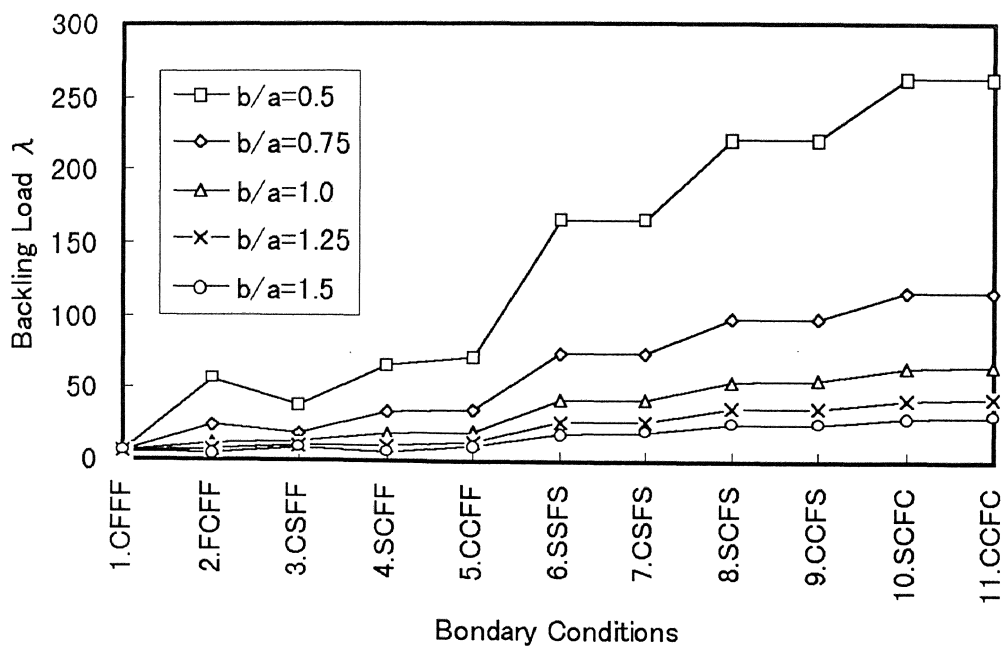


図6-4 E-Glass/Epoxy積層板の境界条件と最大座屈荷重

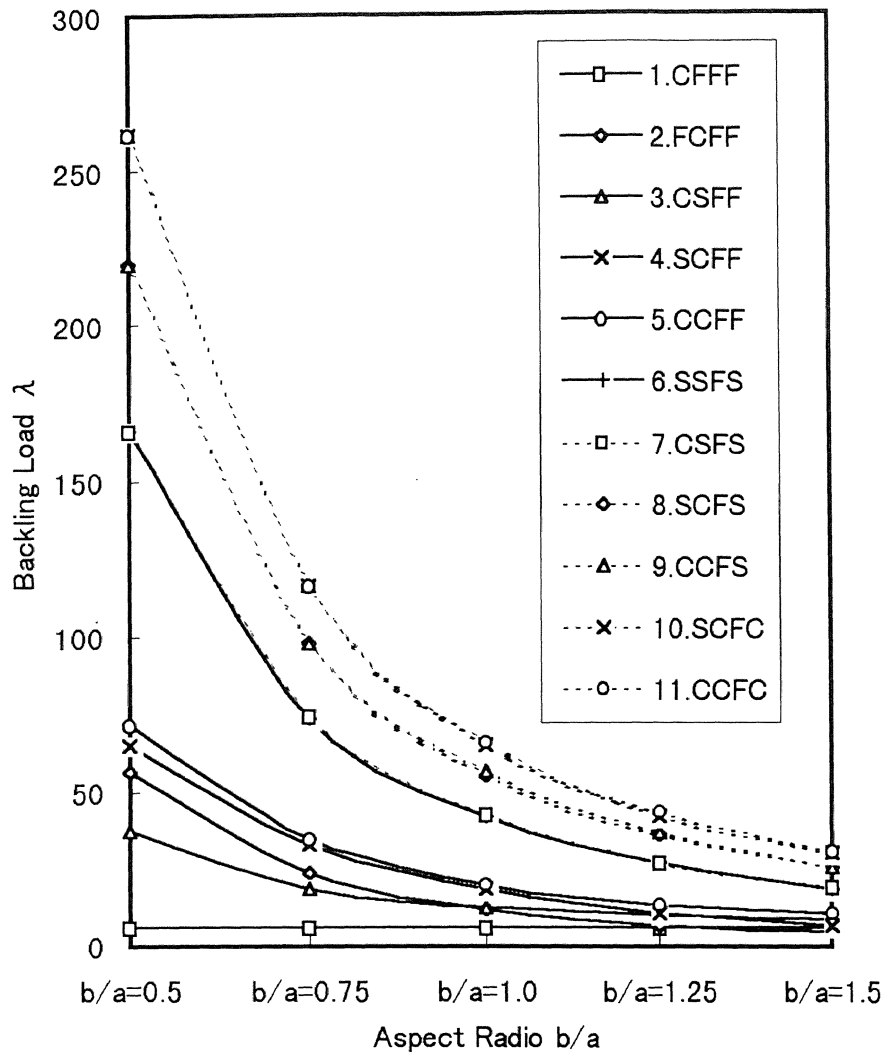


図6-5 E-Glass/Epoxy 積層板の辺長比と最大座屈荷重値

境界条件3. CSFF, 4. SCFFと5. CCFFの場合は, 荷重方向と拘束辺の関係, および辺長比 $b/a$ の変化により, 最適な積層構成は一軸方向に集中するか対称積層に近い解が得られた。

3辺を拘束する境界条件を有する6. SSFS~7. CSFSの場合は, 荷重と板の幾何学的対称性のため, その最適解は, 荷重方向に関して対称的またはほぼ対称的な積層構成になった。また, 結果を全体的に見ると, 前例の Graphite/Epoxy 材より低い最適座屈荷重値を示す。

## 6. 6 本章のまとめ

本章では、コンプレックス法を種々の境界条件の組合せをもつ積層長方形板の座屈荷重の最大化問題に適用した。設計変数には、各積層ラミナにおける繊維配向角を用いた。

最適化計算例として、異方性の程度の異なる2種類の繊維強化複合材料の8層長方形板を扱い、11種類の境界条件の組合せに対して最適な繊維配向角の計算をした。

その結果、最適な配向角は境界条件によりかなり影響を受けるが、全体的傾向として、荷重と向かい合う辺の境界条件の影響は側面部の境界条件に比べて小さいことがわかる。

本章で用いた最適化法により、座屈荷重を最大化する繊維配向角の最適化が可能となった。ここでは、簡単な一軸均一圧縮を取り上げたため、最適な繊維配向角もほぼ予測のつく結果となった。しかし、せん断荷重や組合せ荷重などの複雑な条件では、積層の対称性や規則性は崩れて物理的な考察が難しくなり、本方法の適用性は検討する必要がある。

# 第7章 一般的な積層長方形板の 静変形剛性の最大化設計

## 7.1 まえがき

航空宇宙分野に典型的に見られるように、機械構造物の軽量化のため、比強度と比剛性に優れた繊維強化複合材料を使用する例は数多い。特にFRP積層材は、層の繊維配向角と層厚の選択により設計要求に対して力学特性を最適化できることが知られており、書籍や展望論文にまとめられている<sup>(51)~(53)</sup>。

しかし、過去の研究は全周単純支持や固定の境界条件をもつ積層板にほぼ限られており、任意の境界条件を考慮する静変形剛性の最適化の研究はほとんど見受けられない。そこで、本章では、任意の境界条件を考慮する一般的な積層長方形板の静変形剛性の最大化設計問題を扱う。この場合、最適化問題を「構造物の最大変位の最小化」としてモデル化する例が多いが、本章の最適化問題では、自由辺を含む任意の境界条件を考慮しており、最大変位の位置は自明でない、または設計変数の変化によりしばしば最大変位の位置が変わると考える。

この問題をふまえて、本章では、平均的な剛性を示す外部仕事を目的関数として、その最大化を図る。設計変数は各積層ラミナがもつ繊維配向角とする。積層板の静変形解析には古典積層理論に基づいてリッツ法を使い、最適化アルゴリズムには第4章の積層板振動特性の最適化と同様なコンプレックス法を適用する。

数値計算例では、異方性の程度がかなり大きい Graphite/Epoxy と、比較的小さい E-Glass/Epoxy の2種類の材料の長方形積層板を扱う。4辺に沿った自由、単純支持、固定の拘束を種々に配した17通りの境界条件を持つ8層板に関して最適な繊維配向角を求めた。また、本方法の有効性および解の有用性も検証した。

## 7. 2 静変形解析モデルの設定

図7-1は、 $a \times b$ の辺長と厚さ $h$ の板厚を持つ長方形板の中央面を示す。座標系 $o-xyz$ の原点 $o$ を板の中心に取る。

積層板の4辺における拘束条件は自由、単純支持、固定の3種類（以降、それぞれF, S, Cの記号により表す）を、各辺毎に独立に選択する。表記の順序は $x = -a/2$ ,  $y = -b/2$ ,  $x = a/2$ ,  $y = b/2$ の辺の順に対応させて表す。例えば、図6-1に示す境界条件は、自由-単純支持-自由-固定であるが、それをF S F Cと表す。

層の構成は、非対称を含む一般的な積層である。図3-2 (a)に示すように、板の中央面から第 $i$ 層ラミナの上面、下面までの距離をそれぞれ $z_i$ ,  $z_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$ は層数である)とし、また、図3-2 (b)に示すように、第 $i$ 層ラミナの面内に、それぞれ材料主軸となる1軸, 2軸を取り、 $x$ 軸と1軸とのなす角度を繊維配向角 $\theta_i$ とする。なお各層の繊維配向角 $\theta_i$ の選択は互いに無関係で、一般的な積層とする。

横方向の板への外力としては、分布荷重, 集中荷重を含む一般的な荷重条件の設定が可能である。

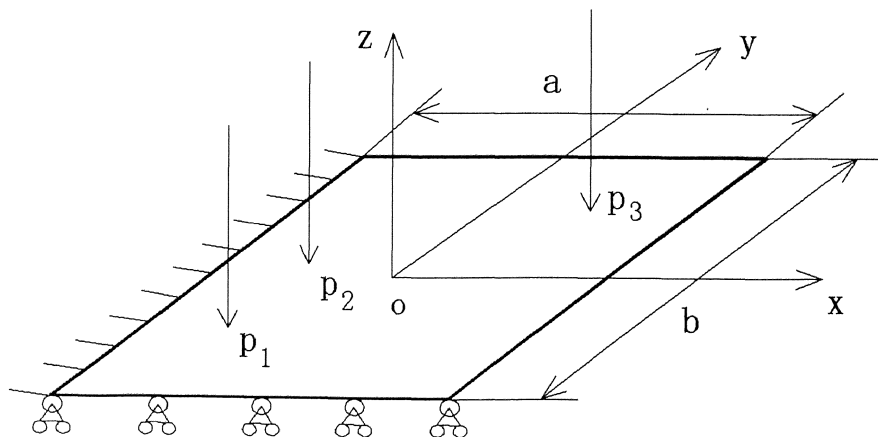


図7-1 任意境界条件をもつ積層長方形板と荷重

### 7. 3 積層板の静変形解析法

積層平板の静変形解析において、変位関数としてべき級数を用いたリッツ法を適用する。ここで、積層長方形板の任意境界条件を満足するために、第4章の振動解析と同様な方法を用い、下記の幾何学的境界条件を自動的に満足する境界条件インデックスを持つ変位関数を導入する。

$$\begin{aligned}
 u_0(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} p_{ij} X_i(\xi) Y_j(\eta) \\
 v_0(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^{I-1} \sum_{l=0}^{J-1} q_{kl} X_k(\xi) Y_l(\eta) \quad \dots \dots (7-1) \\
 w_0(\xi, \eta) &= \sum_{m=0}^{I-1} \sum_{n=0}^{J-1} r_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta)
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 X_i(\xi) &= \xi^i (\xi+1)^{bc11} (\xi-1)^{bc31} \\
 X_k(\xi) &= \xi^k (\xi+1)^{bc12} (\xi-1)^{bc32} \\
 X_m(\xi) &= \xi^m (\xi+1)^{bc13} (\xi-1)^{bc33} \\
 Y_j(\eta) &= \eta^j (\eta+1)^{bc21} (\eta-1)^{bc41} \quad \dots \dots (7-2) \\
 Y_l(\eta) &= \eta^l (\eta+1)^{bc22} (\eta-1)^{bc42} \\
 Y_n(\eta) &= \eta^n (\eta+1)^{bc23} (\eta-1)^{bc43}
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $p_{ij}$ ,  $q_{kl}$ ,  $r_{mn}$  は未定係数を表す。 $I$ ,  $J$  は項数である。また、 $bcij$  は境界条件インデックスであり、 $i$  は長方形板の辺 ( $i=1,2,3,4$ : 順に  $x=-a/2$ ,  $y=-b/2$ ,  $x=a/2$ ,  $y=b/2$ ) を示し、 $j$  はそれぞれの拘束条件の対象 ( $j=1,2,3$ : 順に  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) を表す。変位を自由にする場合は  $bcij=0$ 、並進変位を拘束する場合は  $bcij=1$ 、回転変位を拘束する場合は  $bcij=2$  とすればよい。

変位関数 (7-1) を積層板の弾性エネルギー汎関数の式 (3-82) に代入するが、静的な特性を考察するため、積層板の運動エネルギー  $\bar{T}=0$  とする。さらに変位関数の未定係数  $p_{ij}$ ,

$q_{kl}$ ,  $r_{mn}$  により極小化を行う。

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial p_{ij}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_{kl}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial r_{mn}} = 0 \quad \dots \dots \dots (7-3)$$

$$i, k, m = 0, 1, 2, \dots, I-1 \quad j, l, n = 0, 1, 2, \dots, J-1$$

これより、次のような未定係数に関する釣り合い方程式が得られる。

$$[K] \begin{Bmatrix} p_{ij} \\ q_{kl} \\ r_{mn} \end{Bmatrix} = \{Q\} \quad \dots \dots \dots (7-4)$$

ここで

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{\dot{i}\dot{i}\dot{j}\dot{j}} & K_{\dot{k}\dot{l}\dot{j}\dot{j}} & K_{\dot{m}\dot{i}\dot{n}\dot{j}} \\ K_{\dot{k}\dot{l}\dot{j}\dot{j}} & K_{\dot{k}\dot{k}\dot{l}\dot{l}} & K_{\dot{m}\dot{k}\dot{n}\dot{l}} \\ K_{\dot{m}\dot{i}\dot{n}\dot{j}} & K_{\dot{m}\dot{k}\dot{n}\dot{l}} & K_{\dot{m}\dot{m}\dot{n}\dot{n}} \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (7-5)$$

であり

$$K_{\dot{i}\dot{i}\dot{j}\dot{j}} = \alpha_{11} I_{\dot{i}\dot{i}\dot{j}\dot{j}}^{(1100)} + \alpha^2 a_{66} I_{\dot{i}\dot{i}\dot{j}\dot{j}}^{(0011)} + \alpha a_{16} \left( I_{\dot{i}\dot{i}\dot{j}\dot{j}}^{(0110)} + I_{\dot{i}\dot{i}\dot{j}\dot{j}}^{(1001)} \right)$$

$$K_{\dot{k}\dot{l}\dot{j}\dot{j}} = \alpha a_{66} I_{\dot{k}\dot{l}\dot{j}\dot{j}}^{(1100)} + \alpha a_{12} I_{\dot{k}\dot{l}\dot{j}\dot{j}}^{(0110)} + a_{16} I_{\dot{k}\dot{l}\dot{j}\dot{j}}^{(1100)} + \alpha^2 a_{26} I_{\dot{k}\dot{l}\dot{j}\dot{j}}^{(0011)}$$

$$K_{\dot{m}\dot{i}\dot{n}\dot{j}} = -2 \left\{ b_{11} I_{\dot{m}\dot{i}\dot{n}\dot{j}}^{(2100)} + 2\alpha^2 b_{66} I_{\dot{m}\dot{i}\dot{n}\dot{j}}^{(1011)} + \alpha^2 b_{12} I_{\dot{m}\dot{i}\dot{n}\dot{j}}^{(0120)} \right.$$

$$\left. + \alpha b_{16} \left( 2I_{\dot{m}\dot{i}\dot{n}\dot{j}}^{(1110)} + I_{\dot{m}\dot{i}\dot{n}\dot{j}}^{(2001)} \right) + \alpha^3 I_{\dot{m}\dot{i}\dot{n}\dot{j}}^{(0021)} \right\}$$

$$K_{\dot{k}\dot{k}\dot{l}\dot{l}} = \alpha^2 a_{22} I_{\dot{k}\dot{k}\dot{l}\dot{l}}^{(0011)} + a_{66} I_{\dot{k}\dot{k}\dot{l}\dot{l}}^{(1100)} + \alpha a_{26} \left( I_{\dot{k}\dot{k}\dot{l}\dot{l}}^{(0110)} + I_{\dot{k}\dot{k}\dot{l}\dot{l}}^{(1001)} \right)$$

$$K_{\dot{m}\dot{k}\dot{n}\dot{l}} = -2 \left\{ \alpha^2 b_{22} I_{\dot{m}\dot{k}\dot{n}\dot{l}}^{(0021)} + 2\alpha b_{66} I_{\dot{m}\dot{k}\dot{n}\dot{l}}^{(1110)} + \alpha b_{12} I_{\dot{m}\dot{k}\dot{n}\dot{l}}^{(2001)} \right.$$



$$\begin{aligned}
& + 2b_{66}I_{m\bar{k}n\bar{l}}^{(2100)} + \alpha^2 b_{26} \left( 2I_{m\bar{k}n\bar{l}}^{(1011)} + I_{m\bar{k}n\bar{l}}^{(0120)} \right) \Big\} \\
K_{m\bar{m}n\bar{n}} = & d_{11}I_{m\bar{m}n\bar{n}}^{(2200)} + \alpha^4 d_{22}I_{m\bar{m}n\bar{n}}^{(0022)} + \alpha^2 d_{12} \left( I_{m\bar{m}n\bar{n}}^{(0220)} + I_{m\bar{m}n\bar{n}}^{(2002)} \right) \\
& + 2\alpha d_{16} \left( I_{m\bar{m}n\bar{n}}^{(1210)} + I_{m\bar{m}n\bar{n}}^{(2101)} \right) + 2\alpha^3 d_{26} \left( I_{m\bar{m}n\bar{n}}^{(1012)} + I_{m\bar{m}n\bar{n}}^{(0121)} \right) \\
& + 4\alpha^2 d_{66}I_{m\bar{m}n\bar{n}}^{(1111)} \\
& \dots \dots \dots (7-6)
\end{aligned}$$

である。ここで、剛性比  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $d_{ij}$  は

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \frac{a^2}{D_0} A_{ij} & i, j = 1, 2, 6 \\
b_{ij} &= \frac{a}{D_0} B_{ij} & i, j = 1, 2, 6 & \dots \dots \dots (7-7) \\
d_{ij} &= \frac{1}{D_0} D_{ij} & i, j = 1, 2, 6
\end{aligned}$$

である。また  $\{Q\}$  は

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{m\bar{m}n\bar{n}} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (7-8)$$

$$Q_{m\bar{m}n\bar{n}} = \alpha\beta \bar{F}_c^{(j)} X_m(\xi_j) Y_n(\eta_j) + \left(\frac{\beta}{4}\right) \bar{F}_d I_{m\bar{m}n\bar{n}}^{(0000)}$$

である。ここで、 $\bar{F}_c$ ,  $\bar{F}_d$  はそれぞれ無次元化された集中荷重と分布荷重 (式 3-40, 式 3-41) を示す。

以上の式の積分表示  $I_{m\bar{m}n\bar{n}}^{(abcd)}$  は、第 4 章の振動問題と同一であるので、式 (4-10) ~ 式 (4-25) を参照する。

結局，連立一次方程式（7-4）を解いて，変位関数の未定変数  $p_{ij}$ ， $q_{kl}$ ， $r_{mn}$  を求め，さらに変位関数（7-1）に代入して簡単に変位値が求められる。

#### 7. 4 最適化アルゴリズム

任意境界条件を持つ一般的な積層板に対して静変形特性の最適化問題を考察する。目的関数は積層板の外部仕事として，その最小化を設計の目的とする。設計変数は各ラミナにおける繊維配向角  $\theta_i$  ( $-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$ ) とする。この問題を数理的に表現すると

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N] \\ \text{Maximize} \quad & W = f(\theta) \quad \dots \dots (7-9) \\ \text{Subject to} \quad & -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

と定式化される。ここで， $N$  は層の層数であり， $W$  は無次元化された外部仕事パラメータ

$$W = \iint_A p w(\theta) dx dy \quad \dots \dots (7-10)$$

である。ただし， $p$  は無次元化外力であり， $w(\theta)$  は無次元化された中央面たわみである。

この最適化問題に第4章の積層板の振動特性最適化問題と同様にコンプレックス法を適用する。その最適化アルゴリズムの詳細については，第4章の4. 4節を参照する。

#### 7. 5 数値計算例

以上の任意境界条件を考慮した積層板の静変形解析法と，コンプレックス法の最適化アルゴリズムに基づき，一般的な積層構成を持つ長方形板の静変形剛性に関する最適化数値計算例の設定条件は，下記の1~7とする。

1. 積層長方形板の4辺における拘束条件は，F：自由，S：単純支持，C：固定の3種類とし，その組合せは任意である。本章の最適化計算例では，主に長方形板の17通

りの境界条件の組合せについて最適化計算を行う。

2. 積層板の材質は、異方性の程度がかなり強い Graphite/epoxy 材と、異方性の程度が比較的弱い E-Glass/epoxy 材を扱い、それらの材料定数は

$$\text{Graphite/epoxy: } E_1 = 138.0 \text{ GPa} \quad E_2 = 8.96 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 7.10 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.30$$

$$\text{異方比 } E_1 / E_2 = 15.40$$

$$\text{E-Glass/epoxy: } E_1 = 60.7 \text{ GPa} \quad E_2 = 24.8 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 12.0 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.23$$

$$\text{異方比 } E_1 / E_2 = 2.45$$

の値を用いた。

3. 最適化計算において、積層条件は任意の積層角度を持つ8層板として、積層配向角は下から順に  $[\theta_1 / \theta_2 / \dots / \theta_8]$  と表示する。各層ラミナの厚さは同一として、それぞれの繊維配向角  $\theta_i$  ( $-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ ) は互いに独立に選択できるものとする。

したがって設計変数の数も8となる。

4. 積層板の厚さと辺長の比は  $h/a = 0.01$  とする。
5. 荷重は簡単な等分布荷重を与えた。
6. 積層板の静変形解析には、エネルギー原理に基づくリッツ法を使う。変位変数の二重べき関数の項数は、4桁の収束を示して本章の最適化計算に十分な精度を有する  $8 \times 8$  項とした。
7. 最適化アルゴリズムの中で使われるコンプレックスの頂点数は、設計変数の繊維配向角  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) が8個であることを考慮した上で14個とした。初期コンプレックスの頂点  $\theta^j$  ( $j = 1, 2, \dots, 14$ ) は、ここでは乱数を用いず、入力データとして、他の計算条件や材料データ等と一緒に入力した。

表7-1と図7-2は、本章の方法により、17通りの境界条件の組合せに対して得られた Graphite/epoxy 材料の8層板の最適繊維配向角  $[\theta_1 / \theta_2 / \dots / \theta_8]$  と最大剛性解である。これらの最適解は外部仕事の大きい（静変形の大きい）順に並べた。

表7-1 8層正方形板の静変形剛性の最適解

(Graphite/epoxy,  $h/a = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	External Work	Deflection
1.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	173.1	108.5
2.SCFF	[71.5/-43.7/73.3/-48.8/-42.8/72.3/-43.4/71.5]	103.9	96.64
3.CCFF	[45.0/-45.0/45.0/-45.0/-45.0/45.0/-45.0/45.0]	70.68	72.35
4.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	23.52	11.88
5.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	20.77	11.95
6.SSSS	[45.0/-45.0/45.0/-45.0/-45.0/45.0/-45.0/45.0]	11.51	6.841
7.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.81	4.864
8.SSCF	[-2.2/-2.3/-3.2/-2.6/-1.9/-2.0/-2.5/-2.3]	9.312	7.723
9.SCCF	[-2.2/-2.8/-2.9/-1.0/-1.5/-4.2/-2.3/-2.1]	8.403	4.737
10.SSSC	[65.8/-56.2/66.0/-58.6/-54.9/64.2/-56.7/67.0]	7.448	4.761
11.SSCC	[45.0/-45.0/45.0/-45.0/-45.0/45.0/-45.0/45.0]	5.996	4.188
12.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	4.805	2.323
13.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	4.296	2.321
14.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	3.922	2.319
15.SCSC	[90.0/90.0/90.0/90.0/90.0/90.0/90.0/90.0]	3.791	2.347
16.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	3.417	2.343
17.CCCC	[0.0/90.0/0.0/90.0/90.0/0.0/90.0/0.0]	2.965	2.505

ここでは、単純な等分布荷重を仮定したため、積層板の変形は領域内で同符号の曲率を持ち、「面内-面外の連成剛性  $B_{ij}$ 」の影響により、一般に最適解は対称積層板となる。表7-1の結果では、それが明確に出る第1パターンと、やや不明確な第2パターンの2つに大別される。

第1パターンでは、最適な繊維配向角は $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $45^\circ$ と $-45^\circ$ の角度の組合せで表され、積層板の中央面に対称な積層構成を与えた。このパターンは境界条件に特徴があり、少なくとも1組の対辺が単純支持か固定で剛性の強化すべき方向が明白で、積層板の境界条件に対称性がある。表7-1では、1. CFFF, 3. CCFF~7. SFCF, 11. SSCC~17. CCCCがこのパターンに相当する。

第2のパターンは境界条件の2. SCFF, 8. SSCF, 9. SCCF, 10. SSSC

に見られ、静変形剛性を増加させるために効果的な強化の方向が明白でなく、10. SSSCを除くと境界条件に対称軸が見られない。また、最適な繊維配向角も $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $45^\circ$ と $-45^\circ$ の角度と異なる値をとる。しかし、前述の理由により、対称積層に近い構成になっている。

一方、表7-2は同じく17通りの境界条件の組合せに対して計算したE-Glass/Epoxy積層板の最大剛性解である。また、最適解を外部仕事の大きい(変形の大きい)順に並べた。前例のGraphite/Epoxy( $E_1/E_2 = 15.40$ )と比較して、本例のE-Glass/epoxy( $E_1/E_2 = 2.45$ )の異方性が $1/6$ 以下であり、その影響が最適解に現れていると思われる。

表7-2の最適解は前例と同じく2つのパターンに分類される。第1のパターンは、最適な繊維配向角は $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $45^\circ$ と $-45^\circ$ の角度の組合せで表され、積層板の中央面に対称な積層構成を与えた。表中では、1. CFFF, 3. CCFF~7. SFCHF, 11. SSCC~17. CCCCがこのパターンに相当する。

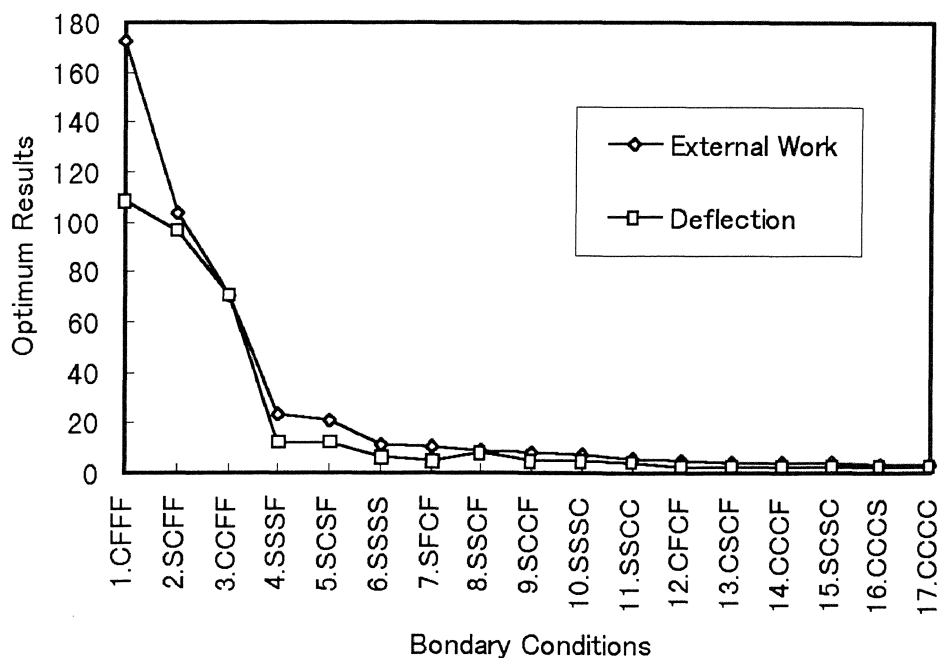


図7-2 Graphite/epoxy 8層正方形板の最大剛性解と境界条件

表7-2 8層正方形板の静変形剛性の最適解

(E-Glass/epoxy,  $h/a = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	External Work	Deflection
1.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	388.5	243.9
2.SCFF	[73.9/90.0/72.7/90.0/90.0/75.5/90.0/73.3]	177.1	168.6
3.CCFF	[45.0/-45.0/45.0/-45.0/-45.0/45.0/-45.0/45.0]	101.2	112.1
4.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	43.12	26.32
5.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	34.58	24.92
6.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	24.31	11.14
7.SSSS	[45.0/-45.0/45.0/-45.0/-45.0/45.0/-45.0/45.0]	18.82	11.23
8.SSCF	[-3.3/-2.4/-3.6/-2.0/-4.2/-4.5/-3.3/-3.1]	18.33	11.21
9.SCCF	[-4.2/-4.7/-4.0/-5.6/-4.7/-3.2/-4.1/-4.3]	15.52	11.18
10.SSSC	[67.9/-61.0/66.0/-59.8/-59.9/65.9/-61.3/68.8]	12.08	7.861
11.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	10.78	5.314
12.SSCC	[45.0/-45.0/45.0/-45.0/-45.0/45.0/-45.0/45.0]	9.031	6.387
13.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	8.788	5.386
14.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	7.684	5.434
15.SCSC	[90.0/90.0/90.0/90.0/90.0/90.0/90.0/90.0]	6.744	4.672
16.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	5.603	4.264
17.CCCC	[0.0/90.0/0.0/90.0/90.0/0.0/90.0/0.0]	4.474	3.753

第2のパターンは境界条件の2. SCFF, 8. SSCF, 9. SCCF, 10. SSSCに見られ、静変形剛性を増加させるために効果的な強化の方向が明白でなく、10. SSSCを除くと境界条件に対称性が見られない。にもかかわらず、その最適な繊維配向角も0°、90°、45°と-45°の角度と異なる値をとり、全体的に対称積層に近い構成になっている。

一方、表7-1と表7-2の最適解を比較して、異方性が強い Graphite/Epoxy 板の剛性解は E-Glass/epoxy 板より2倍前後の高い数値を示している。また、剛性解をそれぞれ外力仕事(変形)の大きい順に並べてみると、両方の境界条件の組合せに並べる順序がだいたい同じと見られるが、ただし、6. SSSSと7. SFCF, および11. SSCCと12. CFCFの順序は逆になっている。これは両方の材料異方性の影響と考えられる。

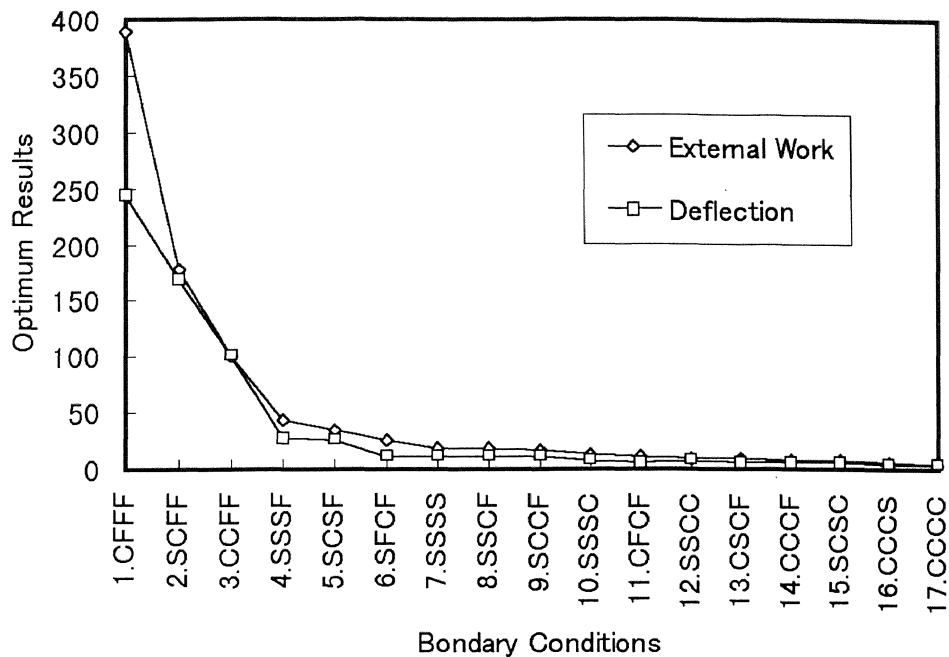


図7-3 E-Glass/epoxy 8層正方形板の最大剛性解と境界条件

境界条件の6. S S S Sは4辺に沿って均一な支持条件を持ち、それに対して7. S F C Fは1組対辺が拘束し、1組が自由であり、静変形剛性を強化すべき方向が明白である。結局、異方性が強い Graphite/Epoxy 板の場合、7. S F C Fの最大剛性は6. S S S Sより大きくなった値をとった。逆に、異方性が弱い E-Glass/epoxy 板の場合は、6. S S S Sの最大剛性は7. S F C Fより大きい値をとった。同様な理由によって、11. S S C Cと12. C F C Fの場合も似た最大剛性解を示している。

## 7.6 本章のまとめ

本章では、制約条件付き非線型最適化法のコンプレックス法を、種々の境界条件の組合せをもつ積層長方形板の静変形剛性の最大化問題に適用した。設計変数には、各積層ラミナにおける繊維配向角を用いた。

最適化計算例として、異方性の程度の異なる2種類の繊維強化複合材料の8層正方形板を扱

い、17種類の境界条件の組合せに対して最適な繊維配向角の計算をした。

その結果、最適な配向角は材料の異方性によりかなり影響を受けるが、全体的傾向として、異方性が強い積層板のほうが各積層ラミナの繊維配向角を調節することにより高い剛性が得られることがわかった。また、境界条件による特徴があり、すなわち1組対辺が拘束で剛性の強化すべき方向が明白で、境界条件に对称性がある場合、最適な積層構成は完全に対称積層となり、他の境界条件でも対称積層に近い構成になっている。

本章で用いた最適化法により、積層板の静変形剛性を最大化する繊維配向角分布の最適化が可能となった。ここでは、簡単な均一荷重を取り上げたため、最適な繊維配向角もほぼ予測のつく結果となった。



## 第8章 2レベル最適化法による振動数制約

### 付き積層長方形板の最小重量設計

#### 8. 1 まえがき

近年、様々な工業分野において、高性能化や作業効率の向上のため、構造物の軽量化が進んでいる。そこで、比強度と比剛性が優れたFRPなど繊維強化複合材料が繊維配向角などを設計変数とする最適設計が可能となる材料として、非常に注目されている<sup>(51)~(53)</sup>。

一方、厳しい振動環境下での複合材料構造物の設計に当たって、固有振動数を始めとする動特性の最適化を十分に考慮することが重要である。このため、FRP複合材料の基本的な構造要素である積層平板の種々の力学特性に関する最適化の研究が行なわれており、振動問題については設計変数を繊維配向角とする報告がよく見られる<sup>(64), (69)</sup>。

本論文の第4章では、任意境界条件を考慮する振動解析法とコンプレックス法を利用して、一般的な積層構成を持つ積層長方形板の基本振動数の最大化設計法について検討し、さらに、その数値計算結果をまとめた。しかし、特定の構造に対して、こうした基本振動数の最大化を追求した結果、ほとんどの積層板の厚さが最大限に厚くなるため、経済的に単位面積当たりの製造コストが増加する問題が存在している。

他方、実際的な構造において、もし外部加振荷重の振動数がある程度把握できれば、積層板の振動特性の最適化の目的は、基本振動数の最大化よりも、むしろ基本振動数を外部加振荷重の振動数より、ある程度離れた制約条件を満足したうえで、経済的な立場から積層板の重量最小化を追求するのが良いであろう。

このため、本章では、任意境界条件を持つ一般的な積層構成の長方形板を対象にして、指定された基本振動数制約条件付きの積層板の最小重量設計問題を扱い、設計変数は板厚及び各種

層ラミナの繊維配向角とする。振動解析法は第4章と同様に任意境界条件を考慮したリッツ法を用いる。最適化方法は2種類の設計変数の間に互いに連性効果が十分弱いことを考慮したうえで、2レベル最適化アルゴリズムを適用した。

2レベル最適化アルゴリズムとは、2種類の設計変数を分離し2つのサブ最適化問題に分解して、2段階に分けて最適解を求める。具体的には、1レベルの最適化に対して、基本振動数の最大化を目的関数とし繊維配向角度の最適化のみを行なう。次に、2レベルの最適化に対して、すでに1レベルの最適化で求めた最適な繊維配向角を一定にして、指定された積層板の基本振動数の制約条件を付けさせたうえで、板厚の最適化を行なう。

数値計算例では、異方性がかなり強い Graphite/Epoxy ( $E_1/E_2 = 15.40$ ) と異方性が比較的弱い E-Glass/Epoxy ( $E_1/E_2 = 2.45$ ) の2種類の材料を扱った。4辺に沿って自由、単純支持と固定の拘束を種々に配した21通りの境界条件の8層正方形板に対して、指定された基本振動数の制約条件を付けさせたうえで、それぞれ最適な繊維配向角と板厚を求めた。計算例の結果によって、本章の最適法の有効性を検証した。また、最適解に及ぼす境界条件など要素の影響についても検討した。

## 8.2 最適化問題の設定

図8-1に示した一般的な積層構成を持つ積層長方形板を考え(図8-1に示すのは板中央面のみである)、板の寸法を $a \times b \times h$ とし、座標系 $o-xyz$ の原点 $o$ を積層板の中心にとる。4辺における拘束条件は自由、単純支持、固定の3種類(以下それぞれF, S, Cの記号により表す)を各辺ごとに独立に選択することにする。表記の順序は、 $x = -a/2$ ,  $y = -b/2$ ,  $x = a/2$ ,  $y = b/2$ の辺の順に対応させて表す。

図8-2は、積層平板の $x$ 軸に沿った厚さ方向の断面図(a)と第 $i$ 層ラミナの平面図(b)を表す。板の中央面から第 $i$ 層ラミナの上、下面までの距離をそれぞれ $z_i$ ,  $z_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )とし、 $N$ は層数である。また、この第 $i$ 層ラミナの繊維方向および平面内の直角方向に、それぞれ材料主軸となる1軸, 2軸をとり、 $x$ 軸と1軸のなす角度を繊維配向角 $\theta_i$ とする。なお本章の最適化問題では、積層順序に対称積層などの制限は加えず、各層ラミナの $\theta_i$ の選択は互いに無関係で、一般的な積層構成とする。

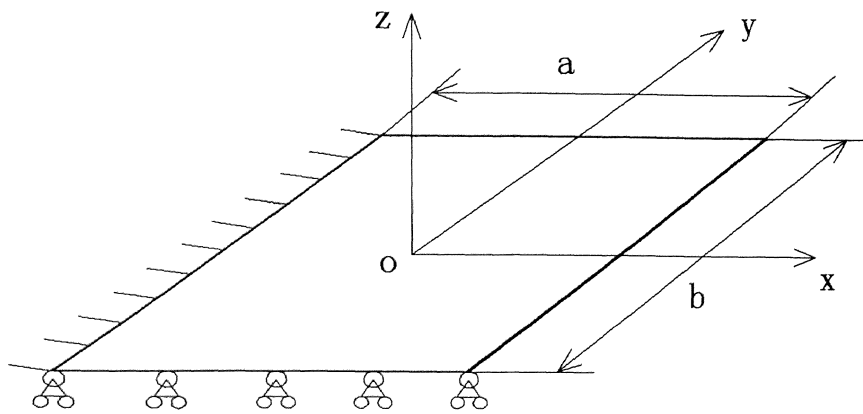
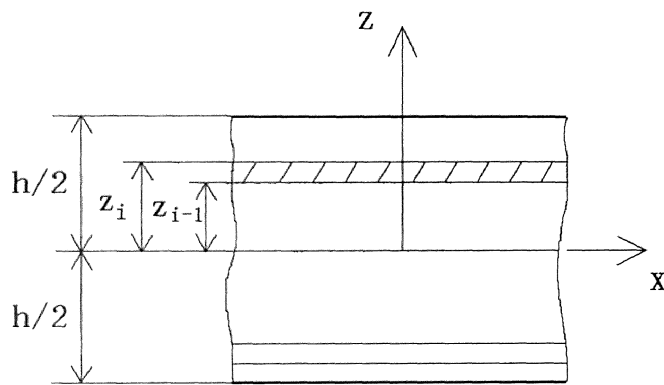
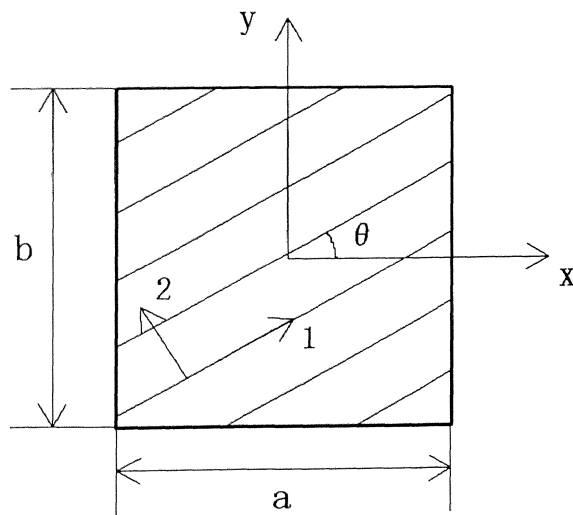


図8-1 任意境界条件を持つ積層長方形板と境界条件



(a)



(b)

図8-2 板の積層構成 (a) 横断面 (b) 第*i*層ラミナ

本章では、境界条件の任意組合せを考慮した一般的な積層構成を持つ長方形板を対象とし、2レベル最適化法を利用して、指定された基本振動数の制約条件付きの積層長方形板の最小重量（板面積を固定するので板厚の最小化となった）設計解を求めることを目的とする。

### 8.3 最適化アルゴリズム

本章の最適化問題には、板厚と繊維配向角の2種類の設計変数を含んでいるが、積層板の振動特性に及ぼす影響から見れば、板厚と繊維配向角の互いの連成効果が小さいと考えられ、より高い計算精度と効率で最適解を求めるために、問題を独立に2段階で扱う2レベル最適化アルゴリズムを適用した。

1レベルの最適化問題では、積層平板の基本振動数の最大化を目的関数とし、各層ラミナの繊維配向角を設計変数とする。これを数理的に表すと

$$\begin{aligned}
 &\text{Find } \theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T \\
 &\text{Maximize } \Omega = f(\theta) \quad \dots \dots \dots (8-1) \\
 &\text{Subject to } -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ \quad i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

と定式化される。ここで、 $N$ は総層数で、 $\Omega$ は無次元化された基本振動数である。

さらに、2レベルの最適化問題では、積層板の基本振動数とその指定値の差を最小化することを目的関数とし、板厚を設計変数とする。それを数理的に表すと

$$\begin{aligned}
 &\text{Find } h \\
 &\text{Minimize } W = |f(\theta^*, h) - f_0| \quad \dots \dots \dots (8-2) \\
 &\text{Subject to } h_1 \leq h \leq h_2
 \end{aligned}$$

と定式化される。ここで、 $f(\theta^*, h)$ は無次元された基本振動数、 $\theta^*$ は1レベルで得られた $\theta$ の最適解、 $f_0$ は指定された基本振動数、 $h_1$ 、 $h_2$ はそれぞれ板厚の下限値と上限値である。

本章の最小重量設計問題は，上記の2つの問題に分解される．1レベルの問題については，第4章に扱ったコンプレックス法を適用し解を求める．次に，その解を式(8-2)に代入し，2レベルの最適化問題が形成される．2レベルの最適化問題に対しては，設計変数が1個しかないため，通常二分法<sup>(58)</sup>を改良した方法により最適解が求められる．

まず，1レベル最適化問題(8-1)に対して，第4章の積層板の基本振動数最大化設計問題と同様にコンプレックス法を適用するため，コンプレックスの各頂点 $\theta^j$  ( $j=1,2,\dots,M$ )について，下記の記号を導入する．

最小点 $\theta^h$

$$f(\theta^h) = \text{Min}_j \{ f(\theta^j) \} \quad \dots \dots \dots (8-3)$$

次小点 $\theta^s$

$$f(\theta^s) = \text{Min}_j \{ f(\theta^j) | j \neq h \} \quad \dots \dots \dots (8-4)$$

最大点 $\theta^l$

$$f(\theta^l) = \text{Max}_j \{ f(\theta^j) \} \quad \dots \dots \dots (8-5)$$

コンプレックスの最小点 $\theta^h$ を除いた $k-1$ 次元の部分空間におけるサブコンプレックスの図心 $\theta^o$

$$\theta^o = \frac{1}{k-1} \left( \sum_{j=1}^k \theta^j - \theta^h \right) \quad \dots \dots \dots (8-6)$$

図心 $\theta^o$ に関する鏡像点 $\theta^r$

$$\theta^r = (1.0 + \alpha)\theta^o - \alpha\theta^h \quad 0 < \alpha < 2 \quad \dots \dots \dots (8-7)$$

図心 $\theta^o$ から鏡像点 $\theta^r$ を越える拡張点 $\theta^e$

$$\theta^e = (1.0 - \gamma) + \gamma\theta^r \quad 1 < \gamma < 3 \quad \dots \dots \dots (8-8)$$

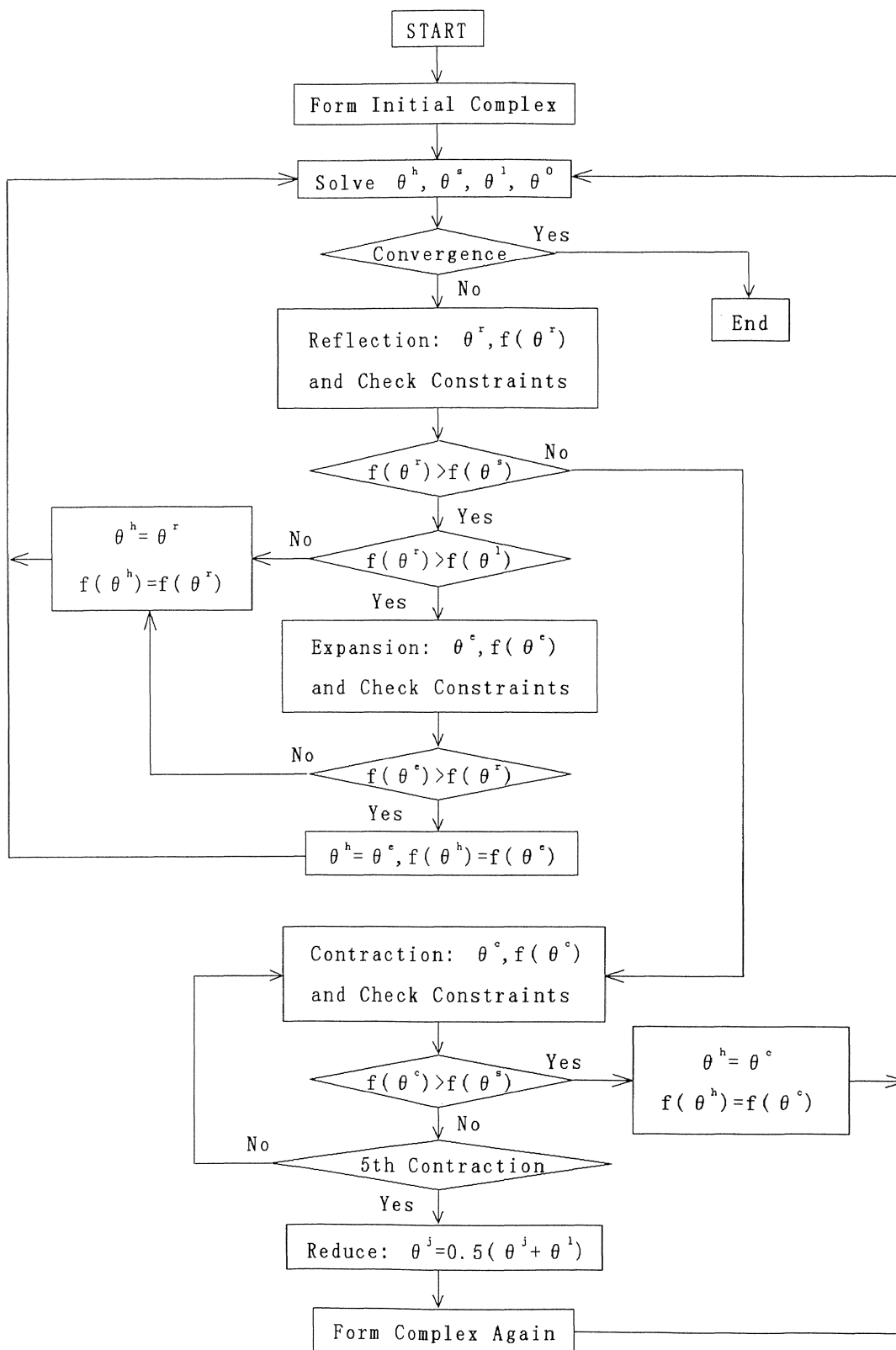


図8-3 1レベル最適化アルゴリズム

鏡像点  $\theta^r$  から図心  $\theta^o$  に向かう収縮点  $\theta^c$

$$\theta^c = (1.0 - \beta) + \beta\theta^r \quad 0 < \beta < 1 \quad \dots \dots \dots (8-9)$$

すべての頂点を図心  $\theta^o$  に向かう縮小コンプレックス

$$\theta^j = \frac{1}{2}(\theta^j + \theta^o) \quad j = 1, 2, \dots, k \quad \dots \dots \dots (8-10)$$

上記に定義した記号を用い、図8-3に示す計算流れに基づいて、1レベル最適化問題(8-1)の最適解が求められる。

次に、1レベル最適解を式(8-2)に代入して、第2段階の2レベル最適化問題が形成される。2レベル最適化問題(8-2)では、設計変数が1個しかいないため、制約条件  $h_1 \leq h \leq h_2$  を考慮し、下記の二分法に基づいた簡易な最適化法を適用する。

1. 領域  $[h_1, h_2]$  の端点での基本振動数  $f_1 = f(\theta^*, h_1)$  と  $f_2 = f(\theta^*, h_2)$  を計算する。
2. 基本振動数の制約条件  $h_1 \leq h \leq h_2$  を確認する。制約条件を満足すれば、計算手順3に進む。もし、制約条件を満足しなければ、今回の最適化計算は設定条件などの不適合のために失敗とみなし終了させて、制約条件  $h_1 \leq h \leq h_2$  を調節し直してから、再び1レベル最適化問題(8-1)から計算を再開する。
3. 領域  $[h_1, h_2]$  の中心点  $h_3 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$  での基本振動数  $f_3 = f(\theta^*, h_3)$  を求める。
4. 条件  $h_2 - h_1 \leq \varepsilon$  を用い、収束判定を行なう。 $\varepsilon$  は任意指定した収束基準値である。もし、条件  $h_2 - h_1 \leq \varepsilon$  を満足すれば、 $h_3$  を最適解として最適化計算を終了する。逆に満足しなければ、計算を次の手順に進む。
5.  $f_3$  を  $f_0$  と比較する。もし、 $f_3 \leq f_0$  であれば、 $h_3$  を  $h_1$  に置き換える。逆に、 $f_3 > f_0$  となる場合、 $h_3$  を  $h_2$  に置き換える。いずれも置き換えたら、手順3に戻し、繰返し計算を続ける。

2レベル最適化問題に対する計算流れを図8-4に示す。

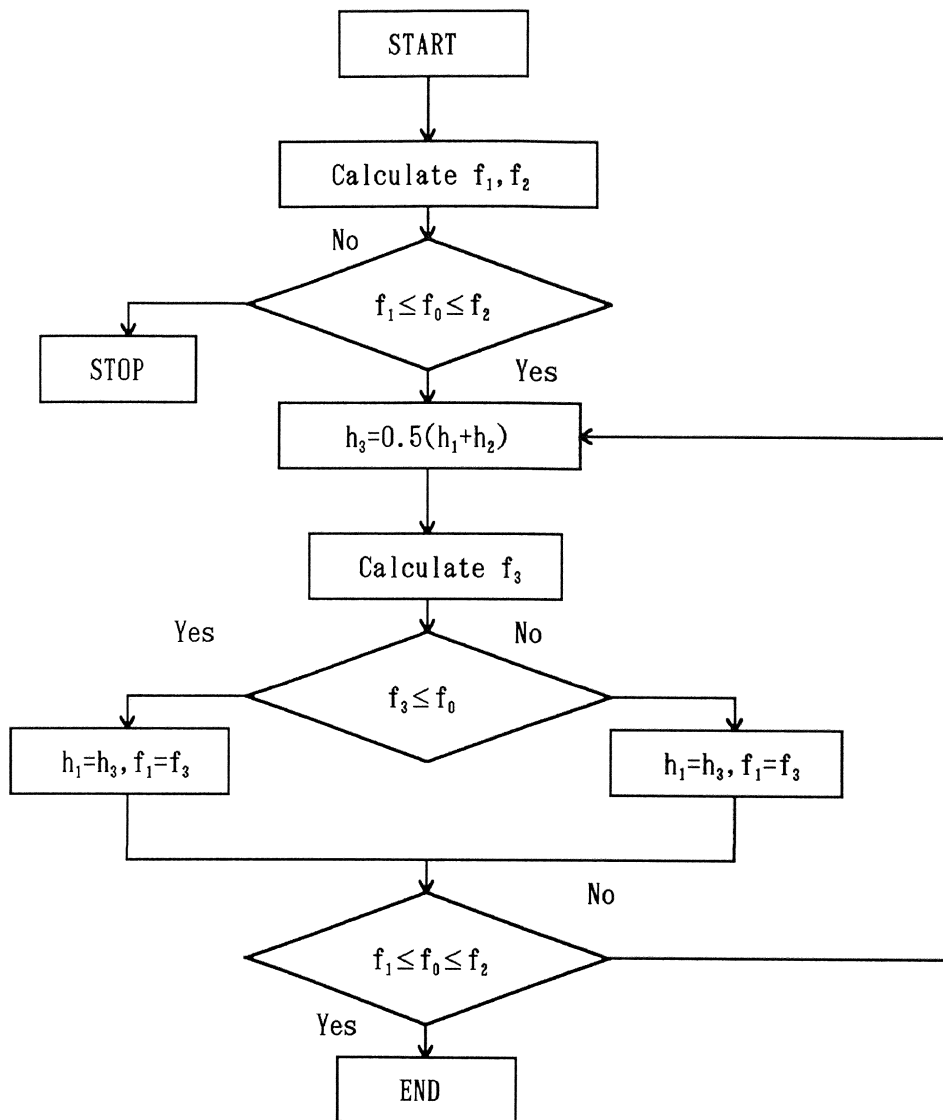


図8-4 2レベル最適化アルゴリズム

このような2段階に分けた最適化法により、結果的には基本振動数制約条件付きの積層板の最小重量設計解が求められる。

#### 8. 4 数値計算例

上記の2レベル最適化アルゴリズムに基づき、境界条件の任意組合せを考慮した一般的な積層構成を持つ長方形板に対し、基本振動数制約条件付き重量最小化設計プログラムを作成した。



数値計算例の設定条件は下記のとおりである。

1. 積層長方形板の4辺における拘束条件は、自由F、単純支持S、固定Cの3種類に分けて任意組合せとする。本章の計算は、主に正方形板の21とおりの境界条件に対して最適化計算を行なう。
2. 積層板の材質は、異方性がかなり強い Graphite/Epoxy ( $E_1/E_2 = 15.40$ ) と異方性が比較的弱い E-Glass/Epoxy ( $E_1/E_2 = 2.45$ ) の二種類の材料を扱い、具体的な材料定数は

$$\text{Graphite/Epoxy : } E_1 = 138.0 \text{ GPa} \quad E_2 = 8.96 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 7.10 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.30$$

$$\text{E-Glass/Epoxy : } E_1 = 60.7 \text{ GPa} \quad E_2 = 24.8 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 12.0 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.23$$

とする。

3. 積層数は下から上まで8層とし、各層ラミナの厚さが同じで、繊維配向角は互いに独立に選択できるものとし、したがって1レベル最適化問題(8-1)における設計変数の数は8となる。
4. 振動解析には、第4章と同様に任意境界条件を考慮したリッツ法を用い、変位関数の二重べき関数の項数は、4桁までの収束を示す十分な精度を有する $8 \times 8$ 項とした。また、直接に設計変数になる板厚と関連しないために、無次元化基本振動数パラメータは  $\Omega = \omega a \sqrt{\rho(1 - \nu_{12}\nu_{21})} / E_2$  とする。
5. 1レベル最適化アルゴリズムを用い計算するコンプレックスの頂点数は、8個の設計変数を考慮したうえで、14個とする。初期コンプレックスの頂点 $\theta^j$  ( $j = 1, 2, \dots, 14$ ) は、計算設定条件により入力データとして、他のデータと一緒に入力する。
6. 指定する基本振動数パラメータ $\Omega = 0.01$ とする。

表8-1と表8-2は、全周自由から全周固定までの21通りの境界条件の組合せに対して、得られた Graphite/Epoxy 材料と E-Glass/Epoxy 材料の基本振動数制約条件付きの積層正方形板の最小設計解である。表中より、最適な繊維配向角の分布は、4辺に渡り境界条件の組合せにより大体2つのパターンに大別される。

表 8 - 1 基本振動数制約条件付きの 8 層正方形板の最適解

(Graphite/Epoxy,  $\Omega = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	h/a (%)
1.FFFF	[26.0/-47.3/62.5/-10.9/-41.9/88.3/-40.0/52.7]	0.3527
2.SFFF	[48.0/-41.1/49.3/-39.2/-40.1/47.8/-41.3/48.3]	0.6519
3.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.9856
4.SSFF	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	1.3541
5.SCFF	[68.3/-45.4/66.6/-57.8/-52.7/67.7/-45.3/67.6]	0.8287
6.CCFF	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	0.7142
7.SFSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.3514
8.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.2248
9.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.1549
10.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.3413
11.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.3375
12.SSCF	[-2.1/-3.6/-1.9/-4.7/-1.1/-1.4/-2.4/-3.7]	0.2209
13.SCCF	[-3.3/-3.0/-4.3/-2.7/-0.5/-4.3/-3.9/-2.6]	0.2195
14.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.1537
15.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.1534
16.SSSS	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	0.2459
17.SSSC	[66.8/-57.3/71.7/-57.9/58.0/73.4/-56.4/67.1]	0.2053
18.SSCC	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	0.1909
19.SCSC	[90/90/90/90/90/90/90/90]	0.1496
20.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.1478
21.CCCC	[0/90/0/90/90/0/90/0]	0.1485

表 8 - 2 基本振動数制約条件付きの 8 層正方形板の最適解

(E-Glass/Epoxy,  $\Omega = 0.01$ )

Boundary	Fiber angles	h/a (%)
1.FFFF	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	0.2482
2.SFFF	[45.6/-42.5/45.4/-41.9/-42.6/46.0/-42.8/46.3]	0.5701
3.CFFF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.9876
4.SSFF	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	1.1551
5.SCFF	[69.2/90/69.7/-88.8/-89.9/69.7/-89.9/69.4]	0.7243
6.CCFF	[45.6/46.3/47.2/42.2/38.2/46.4/43.3/46.4]	0.5786
7.SFSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.3528
8.SFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.2253
9.CFCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.1551
10.SSSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.3175
11.SCSF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.3029
12.SSCF	[-5.3/-5.3/-6.3/-3.0/-1.4/-8.6/-5.8/-4.1]	0.2131
13.SCCF	[-6.3/-6.5/-2.9/-7.9/-9.1/-3.5/-6.6/-6.1]	0.2078
14.CSCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.1509
15.CCCF	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.1491
16.SSSS	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	0.2101
17.SSSC	[66.1/-58.9/67.4/-62.1/-59.8/68.1/-60.2/65.9]	0.1751
18.SSCC	[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]	0.1571
19.SCSC	[90/90/90/90/90/90/90/90]	0.1352
20.CCCS	[0/0/0/0/0/0/0/0]	0.1282
21.CCCC	[0/90/0/90/90/0/90/0]	0.1191

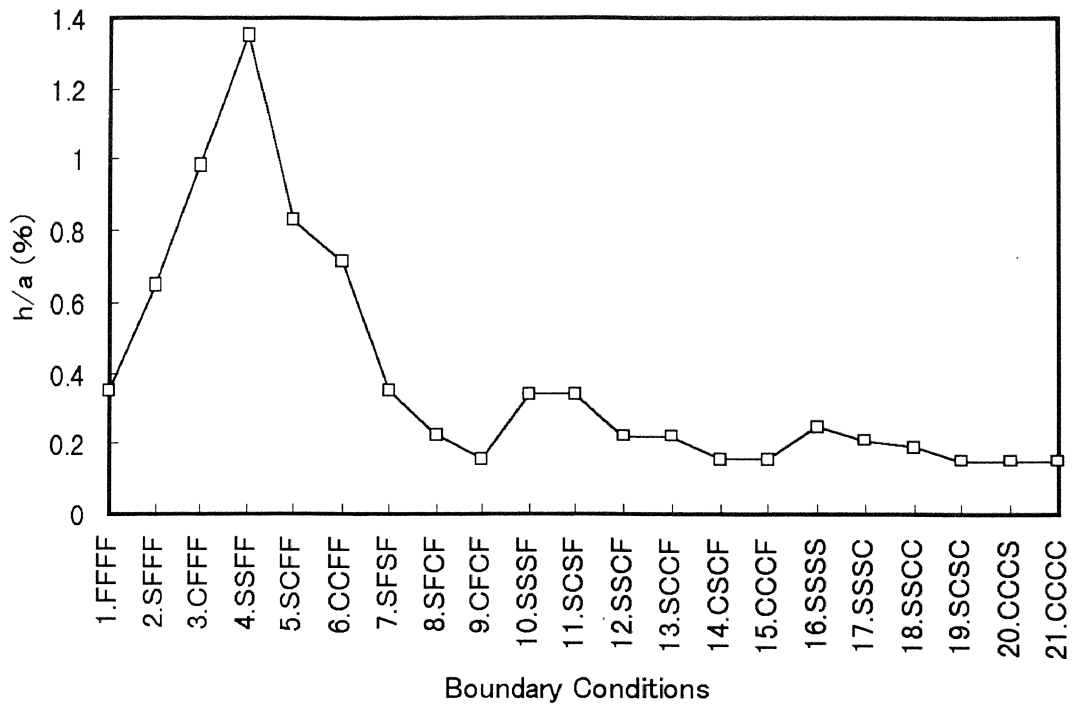


図8-5 境界条件と Graphite/Epoxy 板の最適解

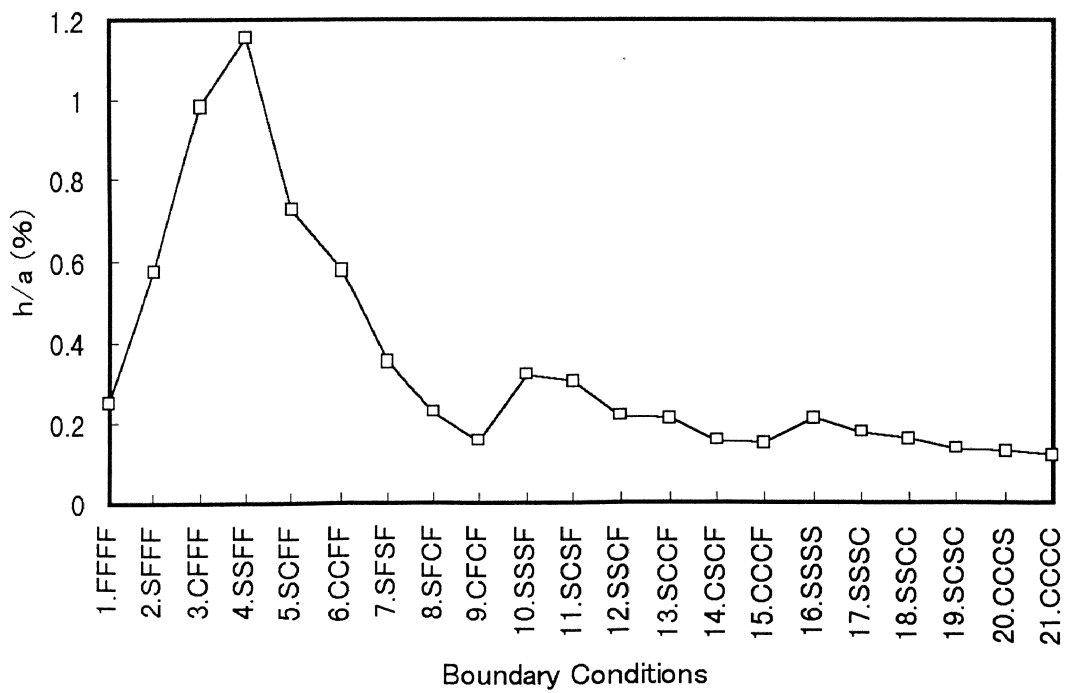


図8-6 境界条件と E-Glass/Epoxy 板の最適解

第1のパターンでは、3. CFFF, 4. SSFF, 6. CCFF, 7. SFSF, 8. SFCF, 9. CFCF, 10. SSSF, 11. SCSF, 14. CSCF, 15. CCCF, 16. SSSS, 18. SSCC, 19. SCSC, 20. CCCS, 21. CCCCに当たり、1組の対辺が単純支持や固定で強化すべき方向が明白か、あるいは板の境界条件に対称性がある場合で、その最適な繊維配向角は、 $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $-45^\circ$ の角度の組合せで表され、板の中央面に対称的な積層構成を与えた。

第2のパターンでは、第1パターンの他の境界条件に見られるように、基本振動数を増加させるための強化方向が明白でなく、その最適な繊維配向角は $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $-45^\circ$ の角度と異なる値を採り、中央面に関する対称積層と似た構成になっている。

図8-5と図8-6には、21通りの境界条件における基本振動数制約条件付きの最適な板厚分布を示す。図8-5の Graphite/Epoxy 積層板の結果と図8-6の E-Glass/Epoxy 積層板の結果を比べると、最適な板厚分布の変化がかなり似通っている。板厚が最も大きい境界条件は4. SSFF, 逆に板厚が一番小さい境界条件は21. CCCCを示している。

## 8.5 本章のまとめ

本章では、積層板の振動解析法と2レベルの最適化法を用い、使用条件により提出され基本振動数制約条件付き、各層ラミナの繊維配向角を調節することにより最小重量の積層板を求める最適設計法を提案した。

最適化計算例として、異方性の程度の異なる2種類の繊維強化複合材料の8層正方形板を扱い、21種類の境界条件の組合せに対して、それぞれ最小重量に当たる積層板の最適な繊維配向角を計算した。

その結果、最適な配向角は材料の異方性によりかなり影響を受けるが、全体の傾向として、境界条件による特徴があり、すなわち1組対辺が拘束で剛性の強化すべき方向が明白で、境界条件に対称性がある場合、最適な積層構成は完全に対称積層となり、他の境界条件でも対称積層に近い構成になっている。

本章で用いた最適化法により、基本振動数の制約条件付きの積層板の重量を最小化する繊維

配向角の最適化が可能となった。また、異なる種類の設計変数が同時に存在する場合に、設計変数の性質あるいは互いの連成効果により、2レベル最適化法を適当に利用することが有効であることが明らかになった。

## 第9章 積層偏平シェルの振動特性の最適設計

### 9.1 まえがき

繊維強化プラスチック（FRP）のラミナを積層したFRP積層材は、各層の繊維方向や厚さを適切に選択することで、設計要求に対して力学特性を改善できることが知られている。このため、積層材は最適設計の対象として適しており、おもに剛性や強度に関する静的問題の最適化の研究が行われてきた<sup>(62)</sup>。さらに固有値問題では積層平板の振動と座屈問題についても、いくつかの研究が見られる<sup>(64)</sup>, <sup>(72)</sup>。

いずれにせよ従来の研究は、形状に曲率をもたない平板にかかわるものであり、曲率をもつ積層シェルの最適化について研究した文献はほとんど見受けられない。この理由としては、曲率に起因するシェルの構造解析上の困難さなどがあると思われる。

本章では、シェルのうち比較的曲率の小さい偏平シェルの振動について最適化問題を考察する。このため全周に沿って単純支持され、中央面に関して対称に積層された偏平シェルの固有振動数の解を導く。次に各層の繊維配向角度を設計変数として導入し、積層シェルの最低次の振動数（基本振動数）を目的関数とおき、その最大化を目的とする最適化問題を設定する。この問題に直接に Kuhn-Tucker の最適性の条件を適用して数理的に最適解を導くが、特に設計変数の変化により基本振動数が異なる波数をもつ振動モード形へと遷移する場合にも対応可能な最適化アルゴリズムを提案する。

数値計算例では、アングルプライ対称積層の偏平シェルについて、その基本振動数を最大化する繊維配向角を求める。この数値例により本方法の有効性を示すとともに、とくにシェルの曲率が最適な繊維配向角に与える影響について考察した。

## 9.2 積層偏平シェルの振動解析

図9-1に示す偏平シェルは、上から見て $a \times b$ の長方形であり一様な厚さ $h$ をもち、 $x$ 軸と $y$ 軸方向にそれぞれ十分小さい曲率 $1/R_x$ と $1/R_y$ をもつ。また、積層シェルの厚さ $h$ と辺長 $a, b$ の比が十分小さいとする。このような偏平シェルに関する理論は、一般的なシェル理論に「浅いシェル」という近似を導入したもので、Donnell理論とも呼ばれている。なお本章では、シェルのねじれの曲率は考慮しないものとする( $1/R_{xy} = 0$ )。図9-2は、3種類のシェルの幾何学形状を示す。

図9-3は、積層シェルの厚さ方向の断面図と第 $k$ 層ラミナの平面図を示す。シェルの中央面から第 $k$ 層ラミナの上面、下面までの距離をそれぞれ $z_k, z_{k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ 。  $N$ は総数である)とする。この第 $k$ 層の繊維方向と $x$ 軸のなす角度を繊維配向角 $\theta_k$ とする。

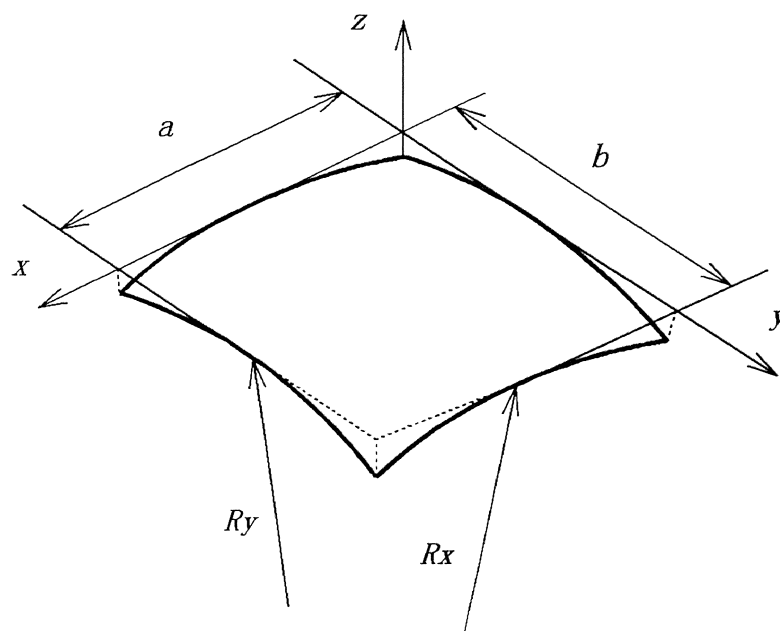


図9-1 積層偏平シェルと座標系

さらに、本章で扱う積層シェルは、対称積層されたからシェルの面内変形と面外変形の間にある連性剛性を $B_{ij} = 0$ とする。積層数が多いため、シェルのクロスエラスティシティ効果は十



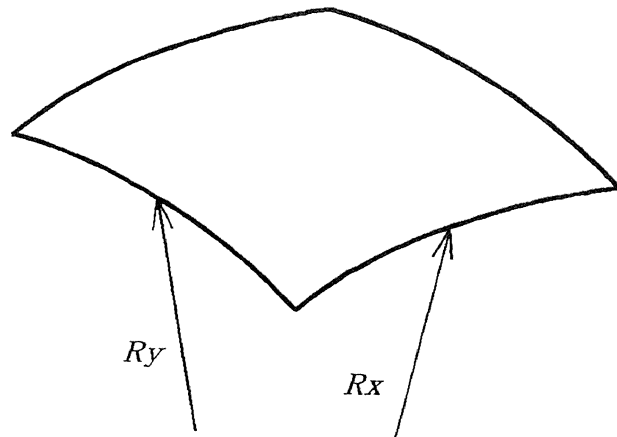
分に小さいと仮定する。面内変形の伸びせん断連性剛性は  $A_{16} = A_{26} = 0$  とし、面外変形の曲げねじれ連性剛性は  $D_{16} = D_{26} = 0$  とする。

以上の設定条件の場合、扁平シェル一般的な運動方程式は簡単化され、以下の運動方程式が得られる。

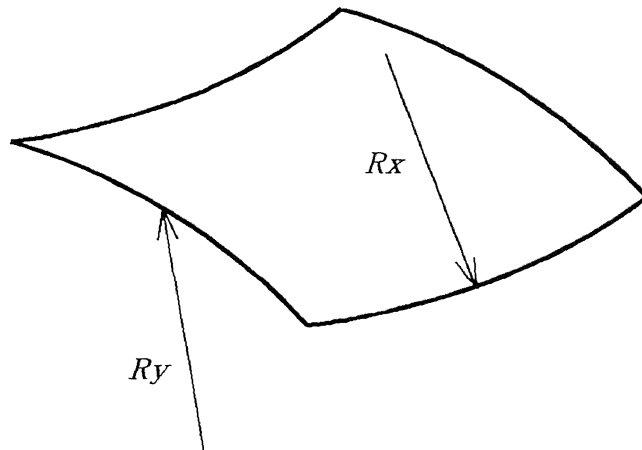
$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\rho & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots (9-1)$$

ここで、 $u$  と  $v$  はシェルの中央面上の点のそれぞれ  $x$  と  $y$  軸方向の面内変位で、 $w$  は  $z$  軸方向の面外変位である。また、 $\rho$  はシェルの単位面積当たりの平均質量とする。式 (9-1) 中の行列要素  $L_{ij}$  は

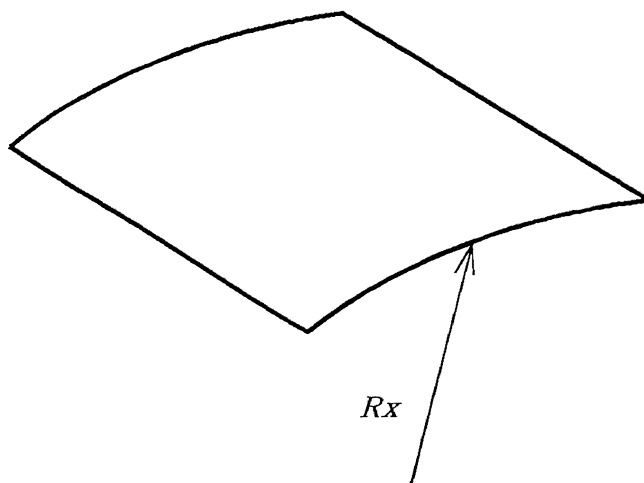
$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{12} &= (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ L_{13} &= \left( \frac{A_{11}}{R_x} + \frac{A_{12}}{R_y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ L_{22} &= A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{23} &= \left( \frac{A_{12}}{R_x} + \frac{A_{22}}{R_y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \quad \dots \dots \dots (9-2) \\ L_{33} &= \left\{ D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right\} \\ &\quad + \left( \frac{A_{11}}{R_x^2} + 2 \frac{A_{12}}{R_x R_y} + \frac{A_{22}}{R_y^2} \right) \end{aligned}$$



(a). 球形シェル ( $Rx/Ry=1$ )



(b). 鞍型シェル ( $Rx/Ry=-1$ )



(c). 円筒シェル ( $Rx/Ry=0$ )

図9-2 偏平シェルの幾何学形状

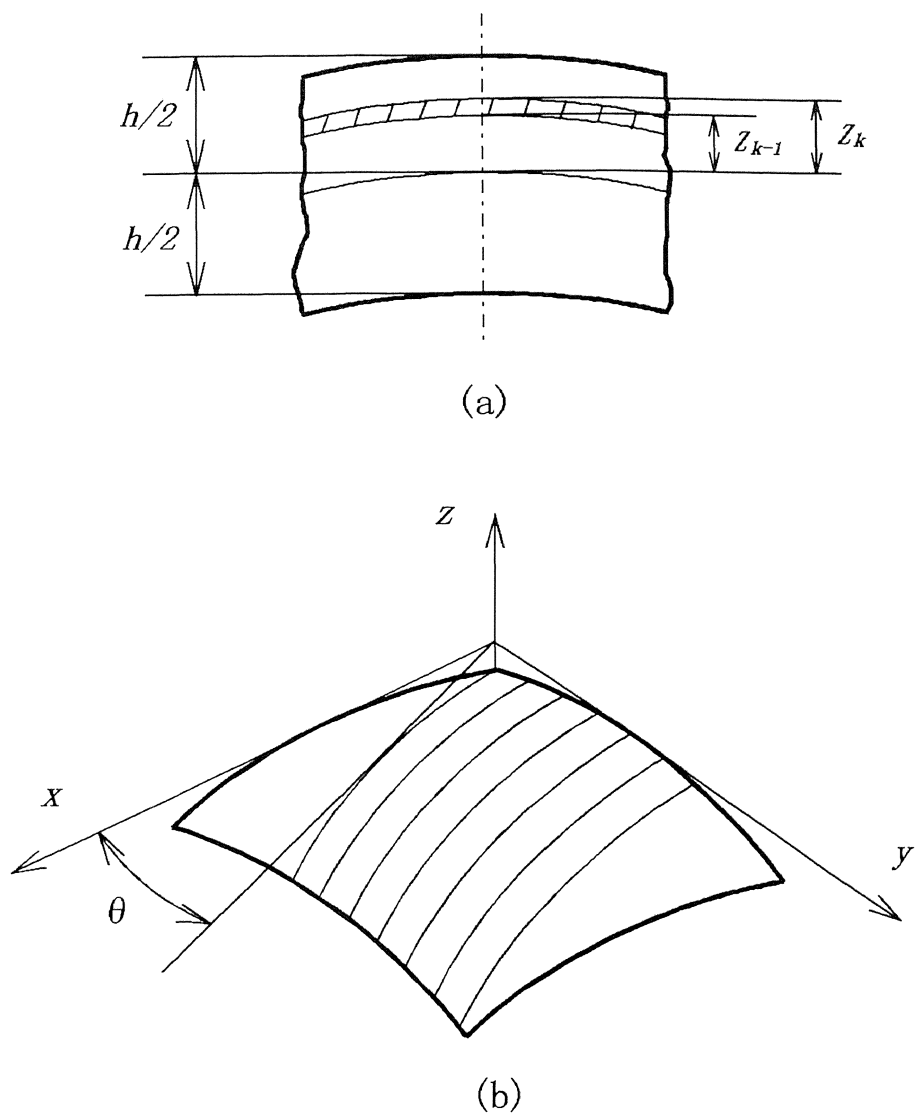


図9-3 積層偏平シェルの横断面と繊維配向角

の演算子で表される。式(9-2)中の面内剛性  $A_{ij}$  と  $D_{ij}$  は

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1})$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad \dots \dots \dots (9-3)$$

により得られる。ここで  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  は  $k$  番目の層の  $x, y$  軸に対する剛性であり，材料主軸に関する材料定数  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$  からなる定数

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \quad \dots \dots \dots (9-4) \end{aligned}$$

を繊維配向角  $\theta_k$  により変換して

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}C^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{22}S^4 \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12}(C^4 + S^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})C^2S^2 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}S^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{22}C^4 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})C^2S^2 + Q_{66}(C^4 + S^4) \quad \dots \dots (9-5) \end{aligned}$$

で得られる弾性定数である。ここで， $C = \cos\theta_k$ ， $S = \sin\theta_k$  を表す。

次に，シェルの中央面の変位を表す関数

$$u(x, y, t) = U_{mn} h \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t}$$

$$v(x, y, t) = V_{mn} h \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t}$$

$$w(x, y, t) = W_{mn} h \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{j\omega t} \quad \dots \dots (9-6)$$

を与える。ここで、 $m$ と $n$ はそれぞれ $x$ と $y$ 軸方向の振動モード（半波数）であり、 $U_{mn}$ 、 $V_{mn}$ 、 $W_{mn}$ は未定係数で無次元振幅を表す。

式（9-6）の変位関数は、全周に沿って単純支持の境界条件

$$v = w = M_x = 0 \quad (x=0, a \text{ の場合})$$

$$u = w = M_y = 0 \quad (y=0, b \text{ の場合})$$

を満足している。なお $M_x$ 、 $M_y$ は、それぞれ $y$ 軸、 $x$ 軸まわりの曲げモーメントである。

次に、変位関数（9-6）を運動方程式（9-1）に代入して、固有振動数に関する固有値方程式

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \Omega^2 \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix}$$

$$[K]\{u\} = \Omega^2 \{u\} \quad \dots \dots (9-7)$$

が得られる。ただし、

$$\{u\} = [U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}]^T \quad \dots \dots (9-8)$$

であり、行列 $[K]$ の角要素は

$$K_{11} = \bar{A}_{11} \bar{m}^{-2} + \bar{A}_{66} \bar{n}^{-2}$$

$$K_{12} = (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66}) \bar{m} \bar{n}$$

$$K_{13} = -(\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12} \gamma) \beta \bar{m}$$

$$\begin{aligned}
K_{22} &= \bar{A}_{66} \bar{m}^2 + \bar{A}_{22} \bar{n}^2 \\
K_{23} &= -(\bar{A}_{12} + \bar{A}_{22} \gamma) \beta \bar{n} \quad \dots \dots \dots (9-9) \\
K_{33} &= \bar{D}_{11} \bar{m}^4 + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) \bar{m}^2 \bar{n}^2 \\
&\quad + \bar{D}_{22} \bar{n}^4 + \beta^2 (\bar{A}_{11} + 2\bar{A}_{12} \gamma + \bar{A}_{22} \gamma^2)
\end{aligned}$$

で与えられる。式(9-9)中の無次元量は

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{a}{R_x}, \quad \gamma = \frac{R_x}{R_y} \\
\bar{m} &= m\pi, \quad \bar{n} = \alpha n\pi \\
\bar{A}_{ij} &= \frac{A_{ij} a^2}{D_0}, \quad \bar{D}_{ij} = \frac{D_{ij}}{D_0} \\
\Omega^2 &= \frac{\rho \omega^2 a^4}{D_0} \\
D_0 &= \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \quad \dots \dots \dots (9-10)
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\Omega$ は固有振動数パラメータ、 $D_0$ は基準剛性である。

次に、式(9-7)で示された固有値方程式に対する  $j$  次の正規化された固有ベクトルを  $\{u\}_j$  とすると、それに対応する固有振動数パラメータは

$$f_j = \Omega^2 = \{u\}_j^T [K] \{u\}_j \quad \dots \dots \dots (9-11)$$

と表すことができる。

### 9.3 最適化のモデル設定

設計変数として繊維配向角を  $N$  種類採った対称アングルプライ積層の偏平シェルの基本振動数を最大化する問題を考える。したがって、目的関数は偏平シェルの基本振動数の最大化とし、設計変数は各積層ラミナにおける繊維配向角とする。

なお、基本振動モードとは、与えた設定条件に対してもっとも固有振動数が低いモードとする。このため基本振動モード形を示す半波数は  $(m, n) = (1, 1)$  とは限らず、特に本章で扱うシェル問題では曲率などの影響により  $(1, 1)$  以外の基本振動モードが生じることがある。

次に、設計変数を

$$x_k = \cos(\pm 2\theta_k) \quad \dots \dots \dots (9-12)$$

$(k = 1, 2, \dots, N)$  とおくと、この最適化問題は

$$\begin{aligned} \text{Find } & x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \\ \text{Maximize } & f = \underset{(j,m,n)}{\text{Min}} \left( \{u\}_j^T [K] \{u\}_j \right) \quad \dots \dots \dots (9-13) \\ \text{Subject to } & -1 \leq x_k \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

と定式化できる。式 (9-13) の第2式は、 $j, m, n$  に関する最小の固有振動数  $f_j$  を最大化することを意味する。

これは制約条件付きの非線形数理計画問題であり、もし設計変数  $x$  が最適解であるならば、以下に示す Lagrange 乗数  $\lambda$  付きの Kuhn-Tucker 最適性条件を満足する。

$$\begin{aligned} \Delta f(x) + \lambda \Delta g(x) &= 0 \\ \lambda g(x) &= 0 \quad \dots \dots \dots (9-14) \\ g(x) &\geq 0, \quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

ただし,

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}]^T$$

$$g(x) = [1 - x_1, 1 + x_1, \dots, 1 - x_k, 1 + x_k, \dots, 1 - x_N, 1 + x_N]^T$$

次に式(9-14)を解くと,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad (-1 \leq x_k \leq 1)$$

$$x_k = -1 \quad (x_k \leq -1) \quad \dots \dots \dots (9-15)$$

$$x_k = 1 \quad (x_k \geq 1) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

が式(9-14)を満たす解として与えられる。

#### 9.4 感度解析と最適化アルゴリズム

固有値方程式(9-11)を微分して整理すると, 固有振動数パラメータの感度の計算式は

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \{u\}_j^T \left[ \frac{\partial K}{\partial x_k} \right] \{u\}_j \quad \dots \dots \dots (9-16)$$

で与えられる。

積層シェル各層ラミナの材質が同じとすると, 式(9-4)の弾性定数 $Q_{ij}$ により表した不変量

$$U_1 = \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})$$



$$\begin{aligned}
U_2 &= \frac{1}{8}(4Q_{11} - 4Q_{22}) \\
U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\
U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \\
U_5 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \quad \dots \dots \dots (9-17)
\end{aligned}$$

を用いて，積層セルの面内剛性と面外剛性が

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (U_1 - U_3)h + \sum_{k=1}^N (2U_3 x_k^2 + U_2 x_k)(z_k - z_{k-1}) \\
A_{22} &= (U_1 - U_3)h + \sum_{k=1}^N (2U_3 x_k^2 - U_2 x_k)(z_k - z_{k-1}) \\
A_{12} &= (U_3 + U_4)h - 2 \sum_{k=1}^N U_3 x_k^2 (z_k - z_{k-1}) \\
A_{66} &= (U_3 + U_5)h - 2 \sum_{k=1}^N U_3 x_k^2 (z_k - z_{k-1}) \quad \dots \dots (9-18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \frac{h}{3}(U_1 - U_3)(h^2 - z_k z_0) + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (2U_3 x_k^2 + U_2 x_k)(z_k^3 - z_{k-1}^3) \\
D_{22} &= \frac{h}{3}(U_1 - U_3)(h^2 - z_k z_0) + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (2U_3 x_k^2 - U_2 x_k)(z_k^3 - z_{k-1}^3) \\
D_{12} &= \frac{h}{3}(U_3 + U_4)(h^2 - z_k z_0) - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^N U_3 x_k^2 (z_k^3 - z_{k-1}^3) \\
D_{66} &= \frac{h}{3}(U_3 + U_5)(h^2 - z_k z_0) - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^N U_3 x_k^2 (z_k^3 - z_{k-1}^3)
\end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots (9-19)$$

と表される。

次に、式(9-9)、(9-10)および式(9-16)～(9-19)をそれぞれ式(9-15)に代入して整理すると、振動モード $(m,n)$ に対する最適繊維配向角パラメータ $x_k$ の方程式

$$P_1(z_k - z_{k-1}) + P_2(z_k^3 - z_{k-1}^3) + x_k [P_3(z_k - z_{k-1}) + P_4(z_k^3 - z_{k-1}^3)] = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (9-20)$$

が得られる。ここで

$$P_1 = q_1 [v_m^2 u_1^2 - \delta_n^2 u_2^2 - 2v_m u_1 u_3 + 2\gamma \delta_n u_2 u_3 + (1 - \gamma^2) u_3^2]$$

$$P_2 = q_2 (v_m^4 - \delta_n^4) u_3^2$$

$$P_3 = q_3 [(v_m^2 - \delta_n^2)(u_1^2 - u_2^2) - 4v_m \delta_n u_1 u_2 + 2v_m(\gamma - 1)u_1 u_2 + 2\delta_n(1 - \gamma)u_2 u_3 + (1 - \gamma)^2 u_3^2]$$

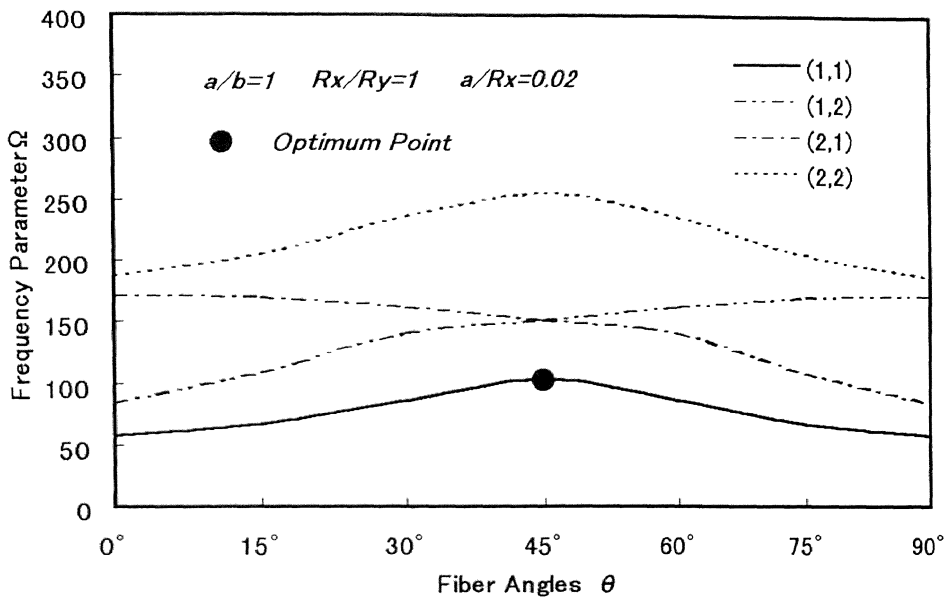
$$P_4 = q_4 (v_m^4 + \delta_n^4 - 6v_m \delta_n) u_3^2 \quad \dots\dots\dots (9-21)$$

ただし

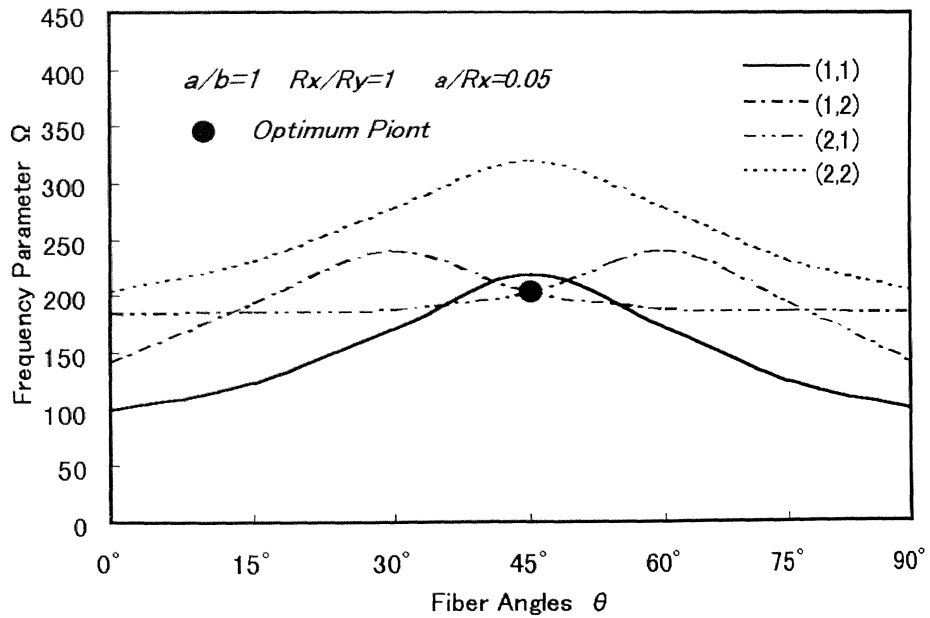
$$q_1 = \frac{U_2 h^2}{12D_0}, \quad q_2 = \frac{U_2 h^2}{36D_0 R_x^2}$$

$$q_3 = \frac{U_3 h^2}{3D_0}, \quad q_4 = \frac{U_3 h^2}{9D_0 R_x^2}$$

$$v_m = \frac{m\pi}{\beta}, \quad \delta_n = \frac{\alpha n \pi}{\beta} \quad \dots\dots\dots (9-22)$$



(a)



(b)

図9-4 2種類の積層シェルの最適振動モード

である。また  $u_1, u_2, u_3$  は正規化された固有ベクトルの成分である。

方程式 (9-20) は、固有ベクトル  $u_1, u_2, u_3$  を含み、設計変数  $x_k$  についての陽形式で表されないため、ある振動モード  $(m, n)$  に対応する最適な繊維配向角のパラメータ  $x_k$  は数値的に求める。

しかし、基本振動数を与えるモード (半波数) が自明でないため、上述の式のみではシェルのすべてのモードを考慮した大域的な最適解を定めることができない。

例えば、図 9-4 は横軸の繊維配向角  $\theta$  に対して、縦軸に振動モードを  $m, n \leq 2$  に仮定して得られた異なる曲率シェルの振動数パラメータ  $\Omega$  の例を表している。図 9-4 (a) では、モード (1,1) の最大値点 A が積層シェルの最適解となり、図 9-4 (b) では、異なるモード (1,2) と (2,1) との交点が積層シェルの最適解となる。

この例を含めて積層シェルの最適解の存在するパターンを調べると、下記の 2 つの場合に分類される。

Case.1 固定された振動モード  $(m, n)$  の極大値に、最適解が存在する場合

Case.2 異なる振動モード  $(m, n)$  と  $(\bar{m}, \bar{n})$  の交点に最適解が存在する場合、ただし

$$\frac{\partial f(x)^{(m,n)}}{\partial x} \frac{\partial f(x)^{(\bar{m},\bar{n})}}{\partial x} \leq 0 \quad \dots \dots \dots (9-23)$$

結局、上記の 2 種類の条件を満足する解の集合から、最も小さい振動数を大域的な最適解とする。

## 9. 5 数値計算例

前節の積層シェル振動解析法と最適化アルゴリズムに基づいて、全周単純支持された積層偏平シェルの自由振動特性に関する最適化プログラムを作成した。

数値計算例に扱う積層シェルは単一の複合材料からなり、各層の厚さは等しいとした。さらに他の数値計算条件は以下のように設定した。

(1) 複合材料の異方性がかなり大きい CFRP を考え、その材料定数は

$$E_1 = 181.0 \text{ GPa} \quad E_2 = 10.3 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 7.17 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.3$$

を用いた。

- (2) 積層構成は、対称に積層された12層シェルを考え、その辺長厚さ比を  $a/h = 400$  とした。
- (3) 曲率比は円筒形の  $R_x/R_y = 0$  ( $R_x \neq 0, R_y = \infty$ )、球形の  $R_x/R_y = 1$  と、鞍型の  $R_x/R_y = -1$  の3つを対象とした。

表9-1～表9-3は、寸法比  $a/b$  と寸法曲率比  $a/R_x$  の種々の値に対する、それぞれ円筒形、球形、鞍型の偏平シェルの最適解  $\theta^*$  と基本振動数  $\Omega^*$  を示す。各表において、前述の最適解の存在パターンが Case.1 の場合は対応する半波数  $(m,n)$  が1つ、Case.2では半波数  $(m,n)$  が2つ示されている。図9-5～図9-7はそれぞれ辺長比  $a/b$  の変化にともなって円筒、球形と鞍型シェルの最適な基本振動数の変化を示す。

表9-1と図9-5の円筒形シェルでは、どの寸法比でも曲率が小さくなるにつれ最適振動数  $\Omega$  が減少し、寸法比  $a/b$  の増加につれ最適振動数  $\Omega$  が増大する。最適繊維配向角  $\theta$  もかなり変化する。最適解は Case.1 の (1,1), (2,1) 場合と、Case.2 の (1,1), (2,1) あるいは (3,1) の交点に最適解が存在する両方のパターンが混在する。こうした特徴は円筒の一方向にのみ存在する曲率と、振動により生じるたわみ変形の曲率との相互関係により生じると思われる。

表9-2と図9-6の球形シェルでは、最適解はほとんど複数の相異なる振動モードの交点に最適解が存在する Case.2 の場合である。正方形 ( $a/b = 1$ ) では、寸法と曲率の対称性により常に最適繊維配向角は  $45^\circ$  となるが、長方形では少しずつ変化する。最適基本振動数  $\Omega$  は曲率の減少に対して減少し、寸法比  $a/b$  増加に対してやや増加が見られる。

表9-3と図9-7の鞍型シェルでは、寸法比  $a/b = 1.5$  以上の長方形シェルを除いて、すべて (1,1) と (1,2) の単一モードの極値に最適解が存在する Case.1 の形式となり、円筒形と球形と著しく異なっている。 $a/b = 1$  と  $a/b = 0.5$  の最適振動数が互いに一致するのは、 $a/b = 0.5$  における (1,2) モードがもつ節直線がその直線に沿って単純支持されているのと同じ効果を与え、 $a/b = 1$  のシェルと同一の振動数を与えるからである。

なお球形シェルと同様に寸法と曲率の対称性により、正方形の鞍型シェルでは最適繊維配向

角は常に  $45^\circ$  となった, また最適振動数は寸法曲率比  $a/R_x$  の値にあまり関係がなく  $\Omega = 60^\circ$  前後の一定値となった。

表9-1 12層円筒シェルの振動特性最適解

( $a/h = 400, R_x/R_y = 0$ )

a/b	a/Rx	$\Omega$	$\theta$	(m,n)
2	0.2	439.8	49.7	(1,1), (3,1)
	0.1	311.1	39.2	(1,1), (2,1)
	0.05	203.4	30.2	(1,1)
1.75	0.2	385.1	39.6	(2,1), (3,1)
	0.1	275.3	43.8	(1,1), (2,1)
	0.05	187.9	32.3	(1,1)
1.5	0.2	333.2	45.5	(2,1), (3,1)
	0.1	234.1	50.1	(1,1), (2,1)
	0.05	170.1	35.3	(1,1)
1.25	0.2	272.8	52.4	(2,1), (3,1)
	0.1	188.6	51.5	(2,1)
	0.05	148.6	39.4	(1,1)
1	0.2	203.3	59.9	(2,1)
	0.1	163.6	28.2	(1,1), (2,1)
	0.05	121.4	44.9	(1,1)
0.75	0.2	161.6	20.9	(1,1), (2,1)
	0.1	131.2	40.6	(1,1), (2,1)
	0.05	87.91	52.1	(1,1)
0.5	0.2	114.5	42.1	(1,1), (2,1)
	0.1	85.38	55.7	(1,1), (2,1)
	0.05	50.85	59.8	(1,1)

表9-2 12層球形シェルの振動特性最適解

( $a/h = 400$ ,  $R_x/R_y = 1$ )

a/b	a/Rx	$\Omega$	$\theta$	(m,n)
2	0.2	693.8	37.4	(1,2), (3,1)
	0.1	422.2	33.6	(1,1), (2,1)
	0.05	240.1	29.3	(1,1)
1.75	0.2	653.1	38.9	(1,2), (3,1)
	0.1	408.9	37.3	(1,1), (2,1)
	0.05	233.9	31.5	(1,1)
1.5	0.2	618.8	40.8	(1,2), (3,1)
	0.1	379.2	39.4	(1,2), (2,1)
	0.05	228.5	34.7	(1,1)
1.25	0.2	593.5	43.3	(1,2), (3,1)
	0.1	348.9	41.6	(1,2), (2,1)
	0.05	222.8	40.6	(1,1), (2,1)
1	0.2	565.3	45	(1,3), (3,1)
	0.1	327.7	45	(1,2), (2,1)
	0.05	203.3	45	(1,2), (2,1)
0.75	0.2	546.7	46.9	(1,4), (3,1)
	0.1	308.3	48.1	(1,3), (2,1)
	0.05	185.6	48.9	(1,2), (2,1)
0.5	0.2	527.6	48.3	(1,5), (2,1)
	0.1	293.2	50.5	(1,4), (2,1)
	0.05	173.5	52.6	(1,3), (2,1)

表9-3 12層鞍型形シェルの振動特性最適解

( $a/h = 400$ ,  $R_x/R_y = -1$ )

a/b	a/Rx	$\Omega$	$\theta$	(m,n)
2	0.2	240.4	44.9	(2,1)
	0.1	239.7	41.3	(1,1), (2,1)
	0.05	175.3	83.9	(1,1)
1.75	0.2	238.1	46.1	(2,1)
	0.1	218.2	39.9	(1,1), (2,1)
	0.05	146.9	34.5	(1,1)
1.5	0.2	284.3	45.6	(1,1), (2,1)
	0.1	184.2	34.9	(1,1)
	0.05	119.6	37.8	(1,1)
1.25	0.2	199.1	39.1	(1,1)
	0.1	118.7	39.9	(1,1)
	0.05	88.04	42.6	(1,1)
1	0.2	59.91	45	(1,1)
	0.1	60.09	45	(1,1)
	0.05	60.14	45	(1,1)
0.75	0.2	293.5	52.7	(1,1)
	0.1	126.1	52.6	(1,1)
	0.05	73.81	51.6	(1,1)
0.5	0.2	59.91	45	(1,2)
	0.1	60.09	45	(1,2)
	0.05	60.14	45	(1,2)



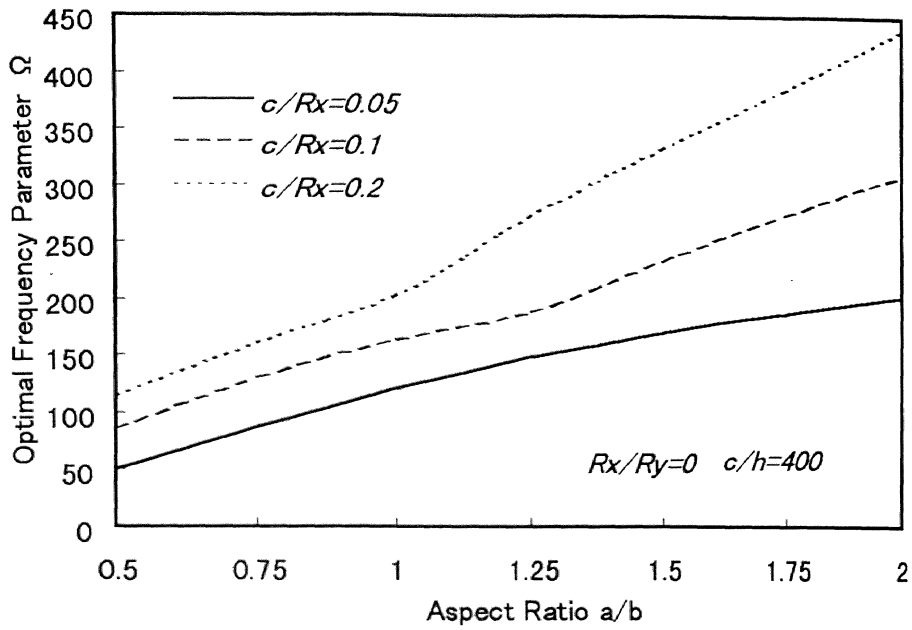


図9-5 12層円筒シェルの最適基本振動数

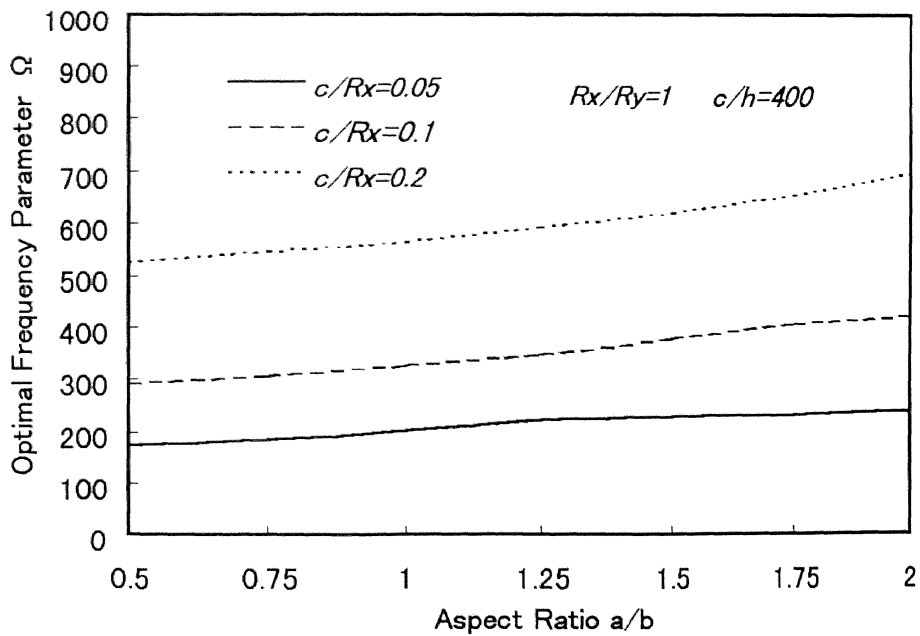


図9-6 12層球形シェルの最適基本振動数

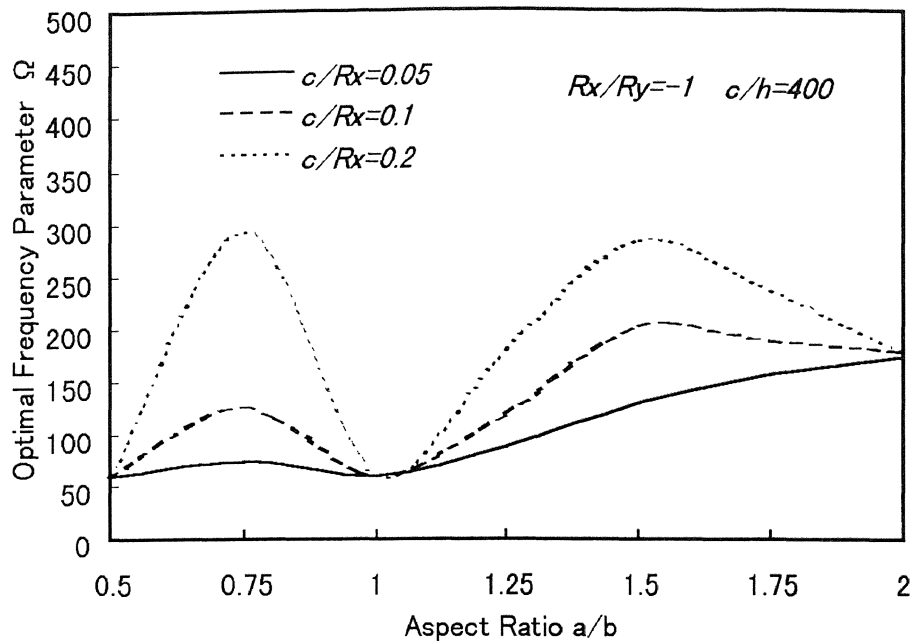


図9-7 12層鞍型シェルの最適基本振動数

## 9.6 本章のまとめ

対称にアングルプライ積層された偏平シェルの自由振動特性に関する最適化法と計算アルゴリズムを提案した。数値計算例で検証した上で、結論が以下のようにまとめられた。

1. 積層偏平シェルについて、全周単純支持の仮定の下に固有振動数の厳密解を与えた。次に各層ラミナの繊維配向角  $\theta_k$  を設計変数と、基本振動数を目的関数とする最適化問題を設定した。この基本振動数の最大化を目的とするが、この場合に Kuhn-Tucker な最適性条件が満足されることを利用して最適繊維配向角の計算式を導いた。

2. 偏平シェルの自由振動では、積層角度の変化に対応して種々の半波数  $(m,n)$  をもつモードが入替えて基本振動数となる。こうした基本振動モードの自明でない問題に対して、最適解の存在するすべてのパターンを検討して二つに分類した。これにより大域的な最適解を求める計算方法を提案した。

3. 円筒形、球形、鞍型の3種類の形状をもつ対称積層偏平シェルについて、材料定数は一

定として、種々の寸法比と曲率をもつ場合の最適解を求めた。これらの計算例から、本方法が適用性にすぐれ、数値計算上の問題もないことが明らかになった。

4. 数値計算結果から、円筒形と球形シェルでは「積層角度－固有振動数曲線」における二つのモードの交点に最適解が存在するが、鞍型ではほとんど単一モードの極値に最適解があることが示された。また正方形の円筒形と鞍型シェルでは対角線に関する対称性から最適積層角度が $45^\circ$ になることなど、積層平板では得られない曲率が最適繊維配向角へ与える影響が明らかになった。

## 第10章 結 論

本研究においては、FRP積層ラミナから構成される積層平板と積層偏平シェルの最適設計問題について検討することを目的とした。まず、任意の境界条件をもつ一般的な積層平板に対して、振動、座屈や静変形など力学特性に関連する最適化設計モデルを設定し、直接探索法のコンプレックス法を用い、それぞれの力学特性に対する最適な積層構成を求めた。次に、全周単純支持の境界条件をもつ積層偏平シェルの振動問題に対して、シェルの運動方程式と境界条件を厳密的に満足する固有振動数の理論解を求め、数理計画法のKuhn-Tucker最適性条件を適用し、数理的に積層シェルの基本振動数を最大化にする最適な繊維配向角の公式を導いた。各章における数値計算例によって、積層平板と積層偏平シェルの最適な積層構成を明らかにして、また、拘束条件と寸法比などの影響も明らかにした。

本研究の成果を要約すると以下ようになる。

第1章は緒論であり、本研究の意義と目的及び各章の概要を述べた。

第2章では、本研究で扱う種々の積層板の最適設計問題に対して、それぞれの目的関数、設計変数および制約条件について詳細な検討を行ったうえで、積層板の基本振動数の最大化設計モデル、積層板の座屈荷重の最大化設計モデル、積層板の静変形剛性の最大化設計モデル及び基本振動数制約条件付きの積層板の重量最小化設計モデルを数理的に与えた。また、これらの最適化問題の解を求めるために、Kuhn-Tucker条件式とコンプレックス法について、詳細な検討を行った。本章の内容は以下の各章で用いられる最適化手法に理論的基礎を与える。

第3章では、任意の境界条件をもつFRP積層板の力学解析問題にリッツ法を適用するため

に、積層板の座標系，構成方程式，運動方程式，種々の剛性係数および各エネルギーの表現式などについて検討を行った。本章の内容は，次の各章における積層板の振動，座屈，静変形など力学特性の解析の中で重要な理論基礎となっている。

第4章では，制約条件付き非線形最適化問題の直接探索法の1つであるコンプレックス法を，任意の境界条件の組合せを持つ積層長方形板の基本振動数の最大化設計問題に適用した。設計変数には，各層ラミナの繊維配向角を用いた。目的関数である基本振動数の計算には，任意の境界条件の組合せをとれるように変位関数を工夫したりツツ法を適用した。

最適化計算例として，異方性がかなり強い Graphite/epoxy 材料と比較的弱い E-Glass/epoxy 材料の8層正方形板を扱い，それぞれ21種類の境界条件の組合せに対して最適繊維配向角を計算した。その結果，最適な繊維配向角の分布は境界条件の組合せによりかなり影響を受けるが，全体の傾向として2つのパターンに分類されることが明らかになった。また，用いたコンプレックス最適化方法は，積層板振動解析の部分から独立した手法であり，感度解析が不要なことから今後も広い範囲の最適化問題に拡張可能である。とくに基本振動のモード形が自明でないような他の問題にも効果的な適用が可能であると思われる。

第5章では，積層長方形板の基本振動数の最大化問題を，非対称を含む一般的な積層構成と境界条件の自由な組合せを考慮して検討した。とくに力学的性質の異なる設計変数である繊維配向角と支持点位置を組合せた問題に対して，改良したコンプレックス最適化法を提案した。数値例では，Graphite/Epoxy の3層長方形積層板が，21通りの境界条件において，1つと2つの支持点により拘束される場合を取り上げ，数値結果の妥当性を検証した。本方法は，積層板の最適化問題のみならず，性質の異なる設計変数を含む他の最適設計問題にも有効であると思われる。

第6章では，制約条件付きのコンプレックス法を，任意の境界条件の組合せをもつ積層長方形板の座屈荷重の最大化問題に適用した。設計変数には，各積層ラミナにおける繊維配向角を用いた。

最適化計算例として，異方性の程度の異なる2種類の繊維強化複合材料の8層板を扱い，1

1種類の境界条件の組合せに対して最適な繊維配向角の計算をした。その結果、最適な配向角は境界条件によりかなり影響を受けるが、全体的傾向として、荷重と対辺の境界条件の影響は側面部の境界条件に比べて小さいことがわかった。

第7章では、制約条件付きのコンプレックス法を、任意の境界条件の組合せをもつ積層長方形板の静変形剛性の最大化問題に適用した。設計変数には、各積層ラミナにおける繊維配向角を用いた。最適化計算例としては、異方性の程度の異なる2種類の繊維強化複合材料の8層正方形板を扱い、17種類の境界条件の組合せに対して最適な繊維配向角の計算をした。その結果、最適な配向角は材料の異方性によりかなり影響を受けるが、全体の傾向として、異方性が強い積層板のほうが各積層ラミナの繊維配向角を調節することにより高い剛性が得られることがわかった。また、境界条件による特徴があり、1組の対辺が拘束され剛性の強化すべき方向が明白で、かつ境界条件に対称性がある場合、最適な積層構成は中央面について完全に対称積層となり、他の境界条件でも対称積層に近い構成になった。

第8章では、積層板の振動解析法と2レベルの最適化法を用い、使用条件により設計者が課した基本振動数の制約条件の下で、各層ラミナの繊維配向角を調節することにより最小重量の積層板を求める最適設計法を提案した。具体的には、連成効果が低い2種類の設計変数を分離し、2段階に分けて最適解を求めた。1レベルの最適化に対して、基本振動数の最大化を目的関数とし繊維配向角度の最適化のみを行なう。次に、2レベルの最適化に対して、すでに1レベルの最適化で求めた最適な繊維配向角を一定にして、指定された積層板の基本振動数の制約条件を付けさせたうえで、板厚の最適化を行なう。

最適化計算例として、異方性の程度の異なる2種類の繊維強化複合材料の8層正方形板を扱い、21種類の境界条件の組合せに対して、それぞれ最小重量に当たる積層板の最適な繊維配向角を計算した。その結果、最適な配向角は材料の異方性によりかなり影響を受けるが、全体的傾向として、境界条件による特徴があり、1組の対辺が拘束され剛性の強化すべき方向が明白で、境界条件に対称性がある場合、最適な積層構成は完全に対称積層となり、他の境界条件でも対称積層に近い構成になった。

2レベル最適化法により、基本振動数の制約条件付きの積層板の重量を最小化する繊維配向

角の最適化が可能となった。また、異なる種類の設計変数が同時に存在する場合に、設計変数の性質あるいは互いの連成効果により、2レベル最適化法を適切に利用することが有効であることが明らかになった。

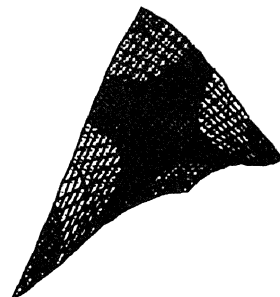
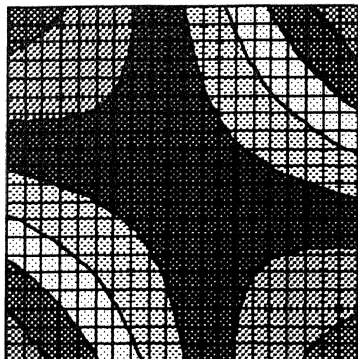
第9章では、対称にアングルプライ積層された偏平シェルの自由振動特性に関する最適化法と計算アルゴリズムを提案した。積層偏平シェルについて、全周単純支持の仮定の下に固有振動数の厳密解を与えた。次に各層ラミナの繊維配向角 $\theta_k$ を設計変数と、基本振動数を目的関数とする最適化問題を設定した。この基本振動数の最大化を目的とするが、この場合に Kuhn-Tucker の最適性条件が満足されることを利用して最適繊維配向角の計算式を導いた。

偏平シェルの自由振動では、積層角度の変化に対応して種々の半波数 $(m,n)$ をもつモードが入替って基本振動数となる。こうした基本振動モードの自明でない問題に対して、最適解の存在するすべてのパターンを検討して二つに分類した。これにより大域的な最適解を求める計算方法を提案した。

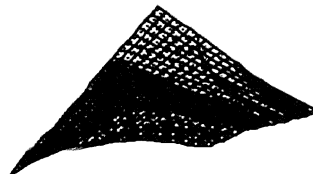
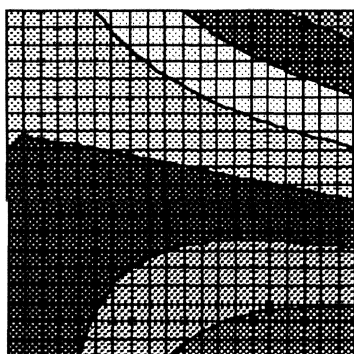
円筒形、球形、鞍型の3種類の形状をもつ対称積層偏平シェルについて、材料定数は一定として、種々の寸法比と曲率をもつ場合の最適解を求めた。これらの計算例から、本方法が適用性にすぐれ、数値計算上の問題もないことが明らかになった。数値計算結果から、円筒形と球形シェルでは「積層角度-固有振動数曲線」における二つのモードの交点に最適解が存在するが、鞍型ではほとんど単一モードの極値に最適解があることが示された。また正方形の円筒形と鞍型シェルでは対角線に関する対称性から最適積層角度が $45^\circ$ になることなど、過去の積層平板の研究では求められなかった構造のもつ曲率が最適繊維配向角へ与える影響が明らかになった。

以上が本研究で得られた研究成果を要約したものであり、ここで得られたFRP積層平板と積層偏平シェルの最適設計に関する研究成果は、今後益々増加する複合材料構造物の構造設計において、有益な設計指針として十分な価値があり、有用な知見を提供するものと確信している。

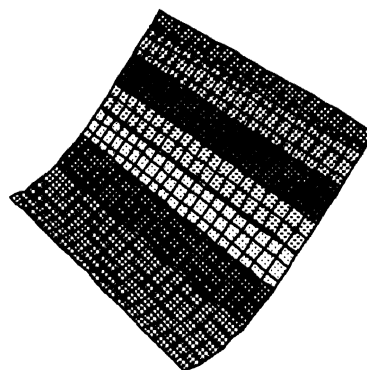
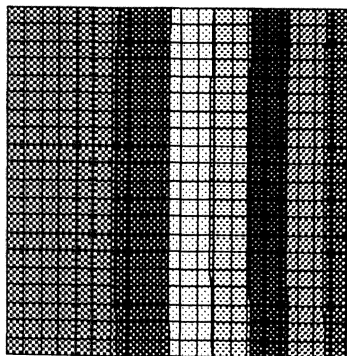
付録 1 : Graphite/Epoxy 材料 8 層正方形板最適振動モード図



付 1 - 1 FFFF

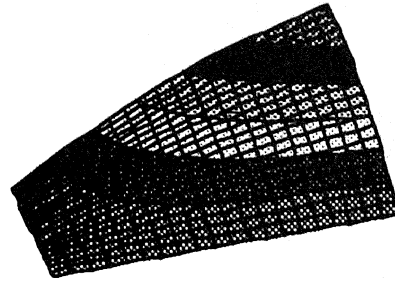
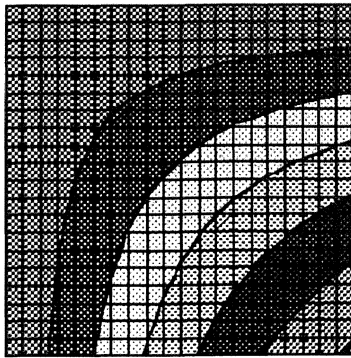


付 1 - 2 SFFF

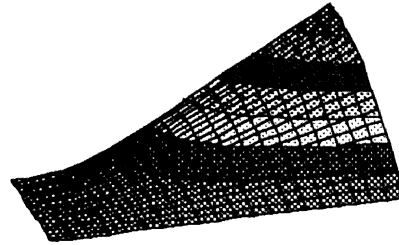
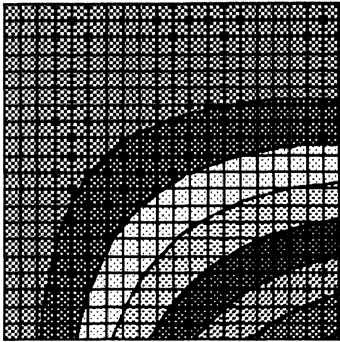


付 1 - 3 CFFF

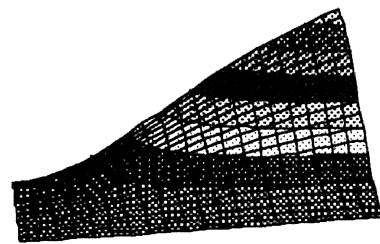
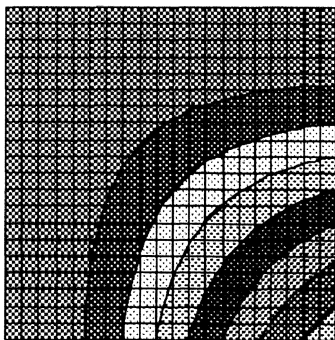




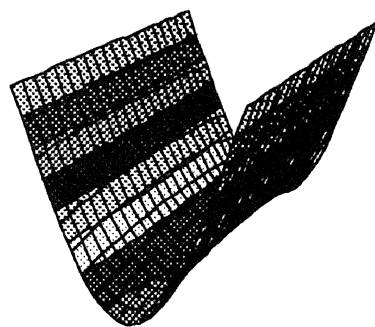
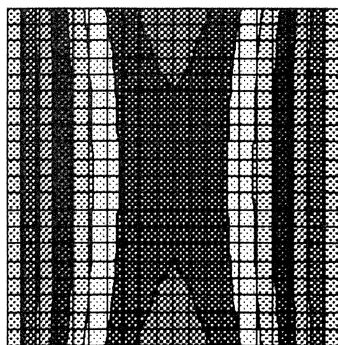
付 1 - 4 SSFF



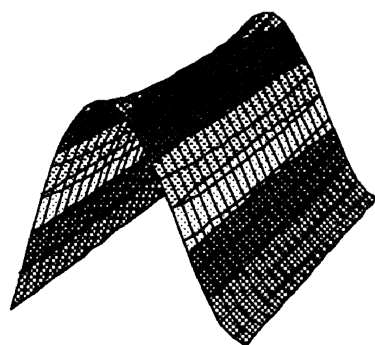
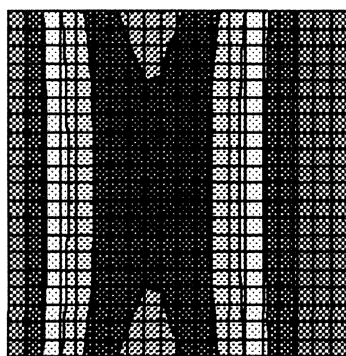
付 1 - 5 SCFF



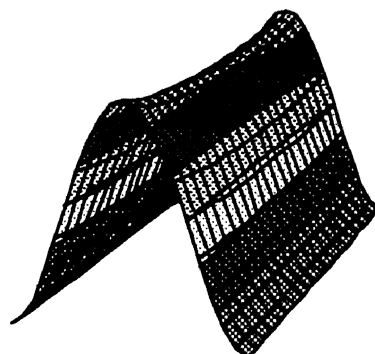
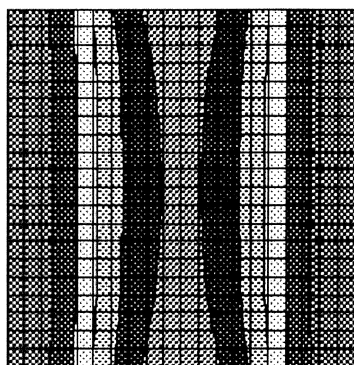
付 1 - 6 CCFE



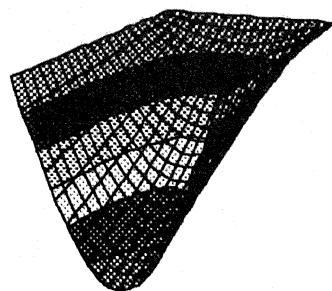
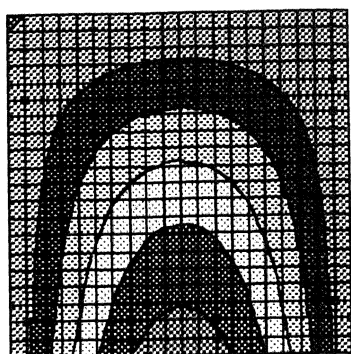
付 1 - 7 SFSF



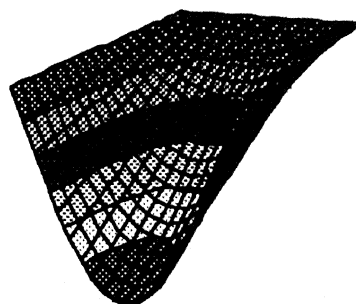
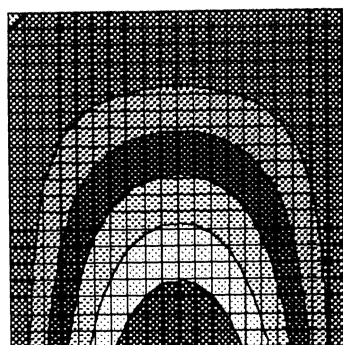
付 1 - 8 SFCE



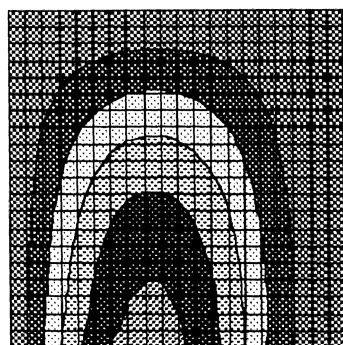
付 1 - 9 CFCE



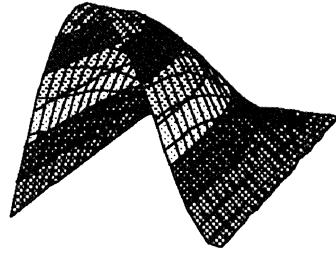
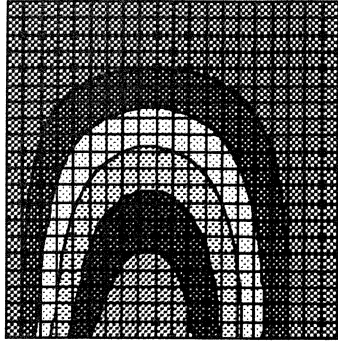
付1-10 SSSF



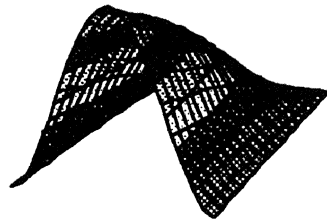
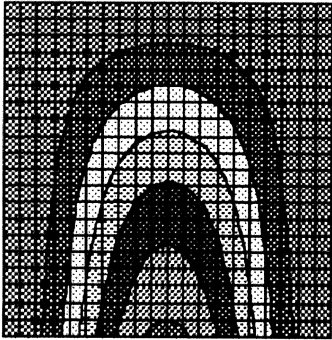
付1-11 SCSF



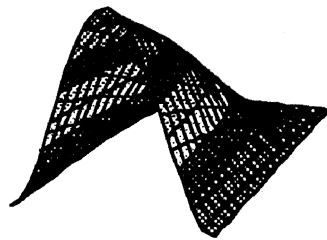
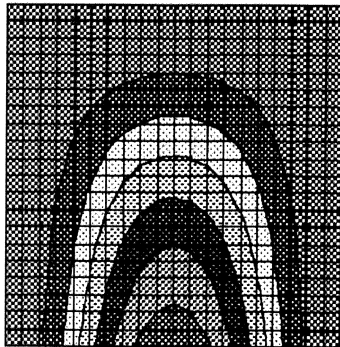
付1-12 SSCF



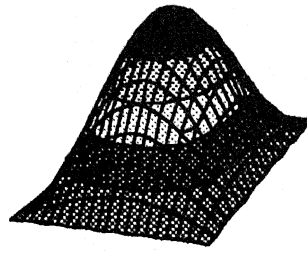
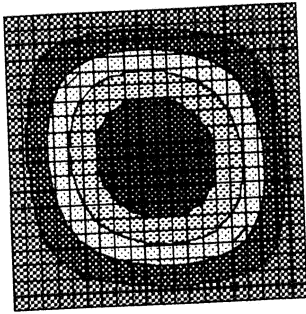
付1-13 SCCF



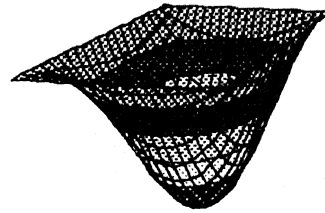
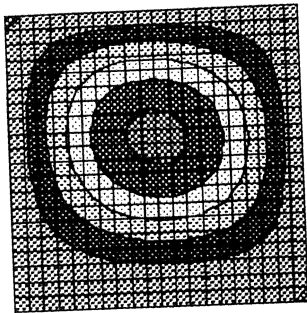
付1-14 CSCF



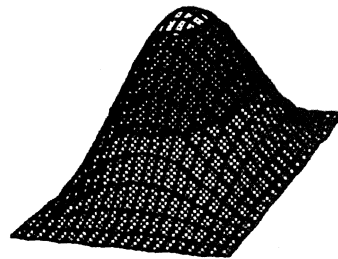
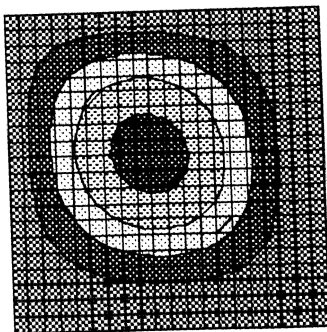
付1-15 CCCF



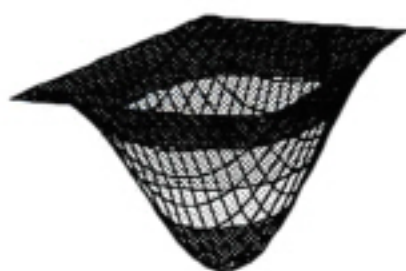
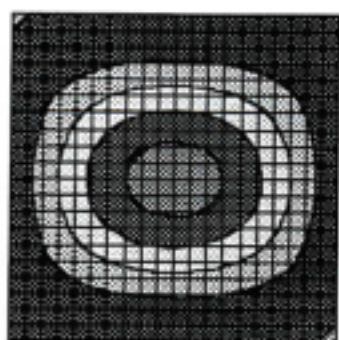
付 1 - 1 6 SSSS



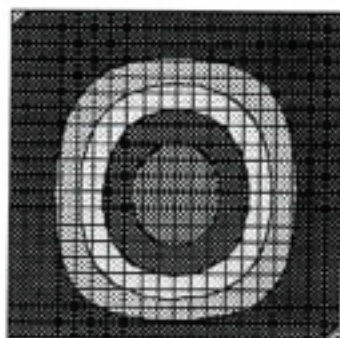
付 1 - 1 7 SSSC



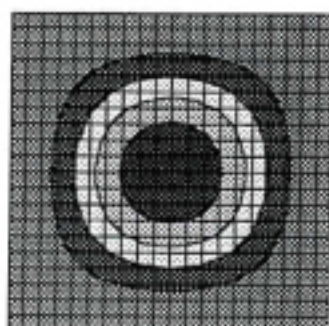
付 1 - 1 8 SSCC



付1-19 SCSC

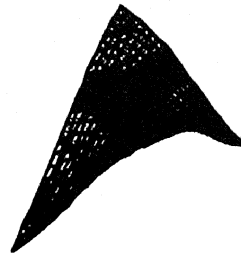
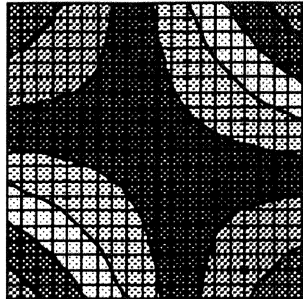


付1-20 CCCS

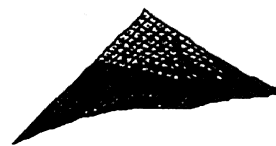
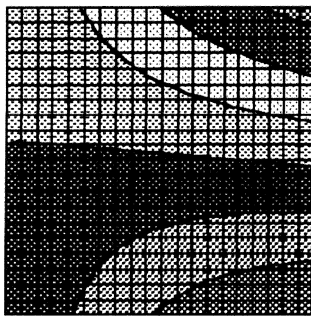


付1-21 CCCC

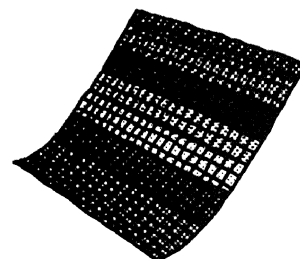
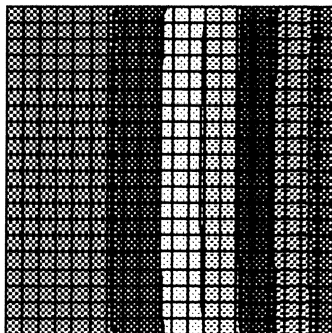
付録 2 : E-Glass/Epoxy 材料 8 層正方形板の最適振動モード図



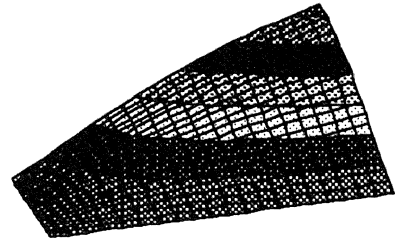
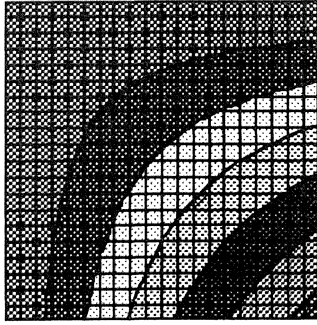
付 2 - 1 FFFF



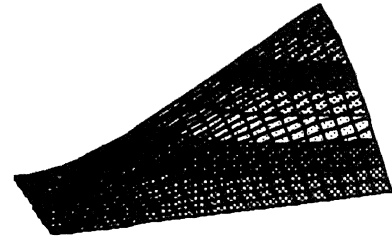
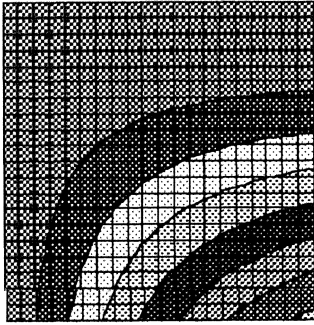
付 2 - 2 SFFF



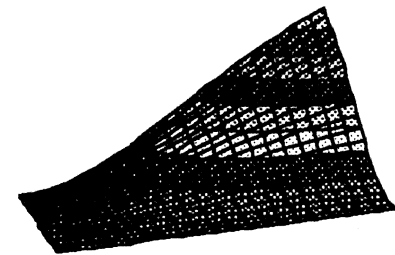
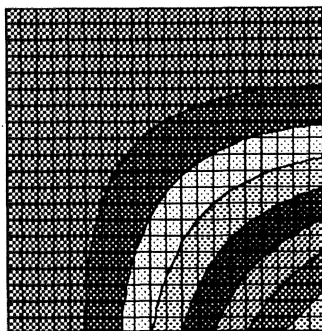
付 2 - 3 CFFF



付2-4 SSFF

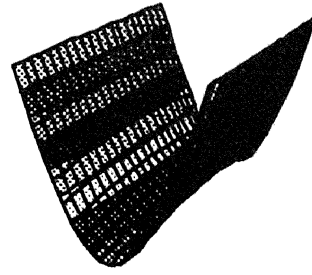
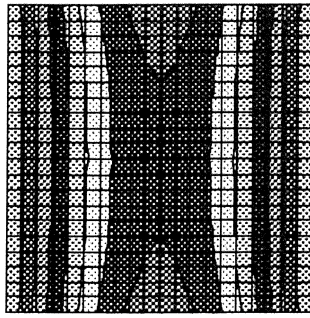


付2-5 SCFF

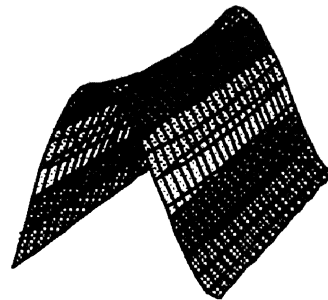
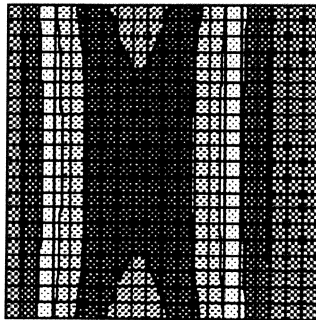


付2-6 CCFE

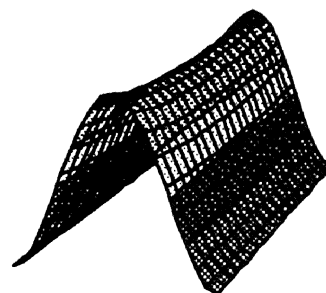
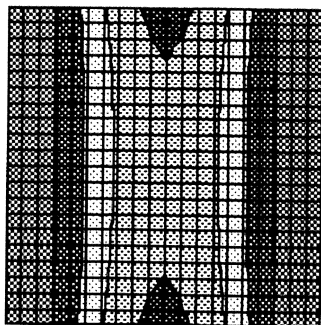




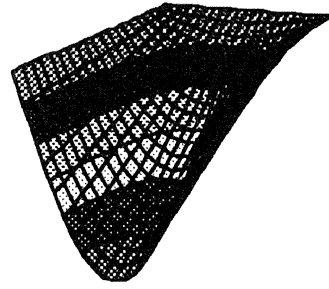
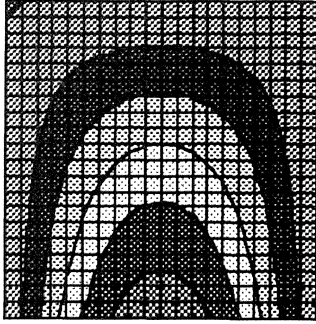
付 2 - 7 SF/SF



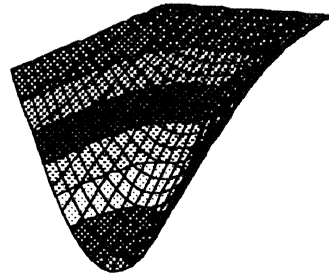
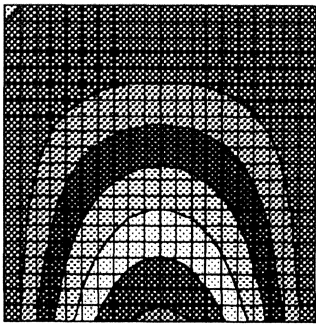
付 2 - 8 SF/CF



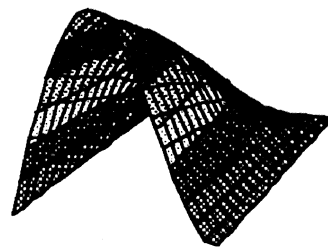
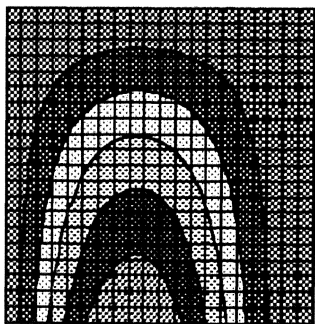
付 2 - 9 CF/CF



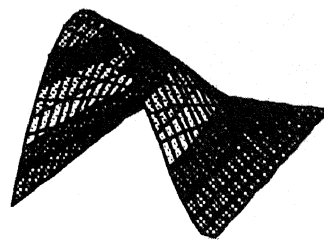
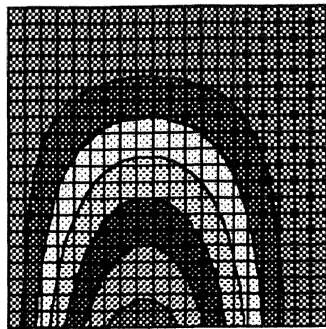
付2-10 SSSF



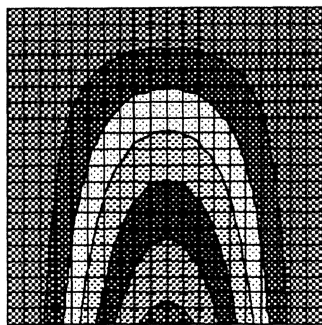
付2-11 SCSF



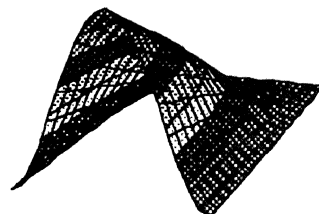
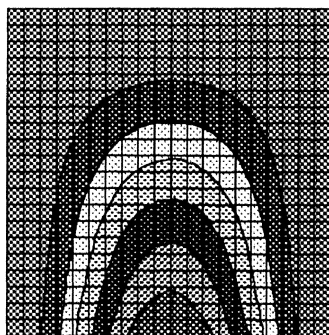
付2-12 SSCF



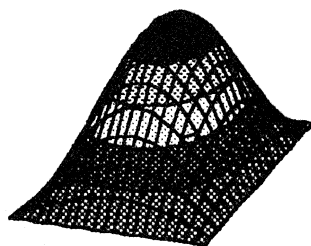
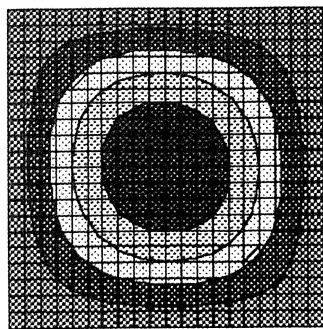
付2-13 SCCF



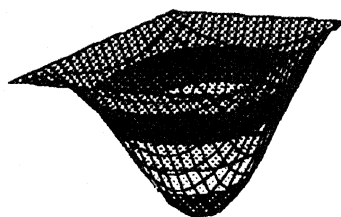
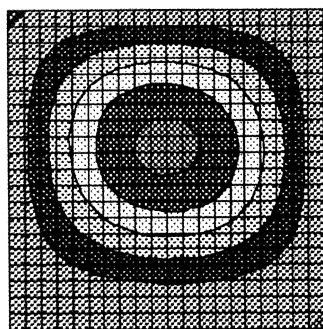
付2-14 CSCF



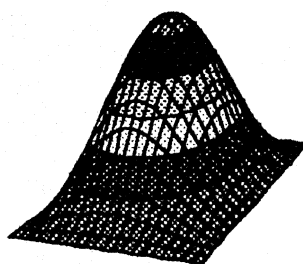
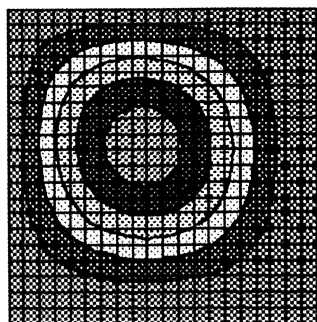
付2-15 CCCF



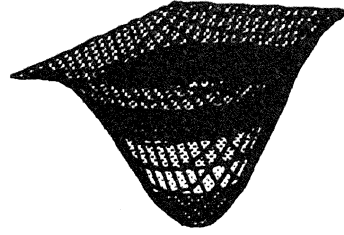
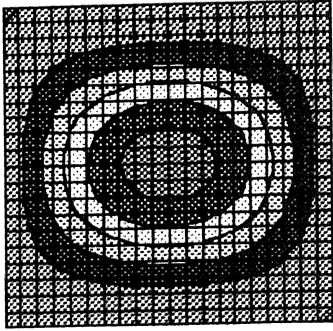
付2-16 SSSS



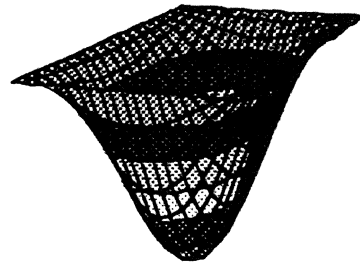
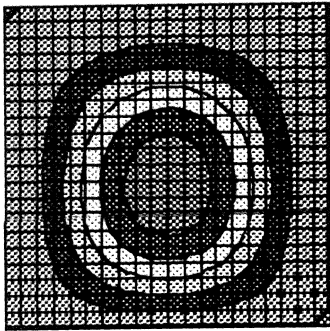
付2-17 SSSC



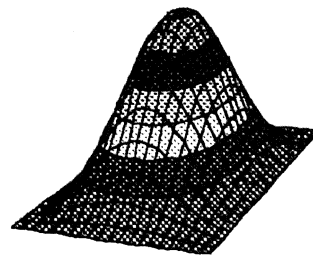
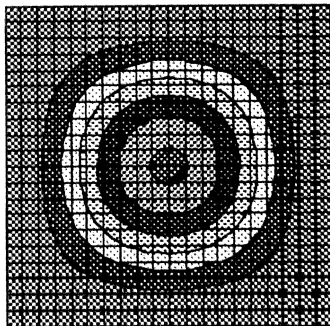
付2-18 SSCC



付2-19 SCSC

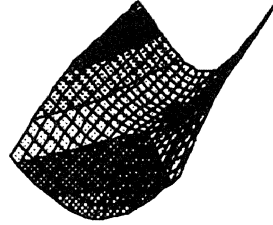
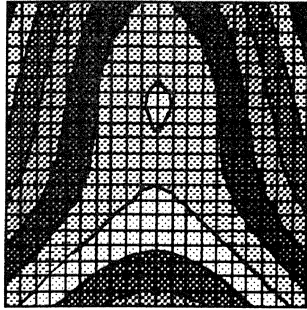


付2-20 CCCS

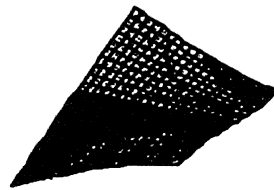
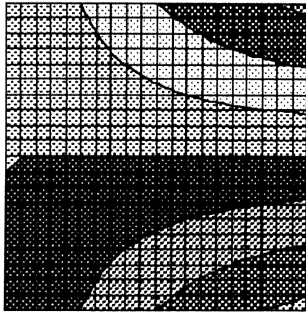


付2-21 CCCC

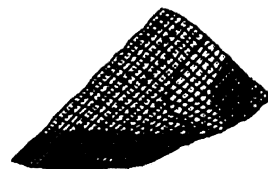
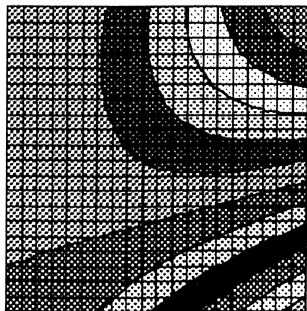
付録 3 : 1 点支持正方形 3 層 Graphite/Epoxy 板最適振動モード図



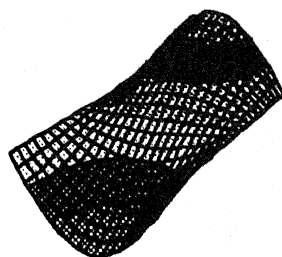
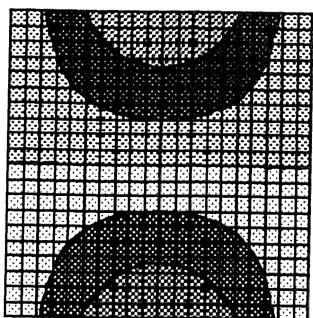
付 3 - 1 FFFF



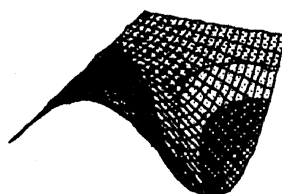
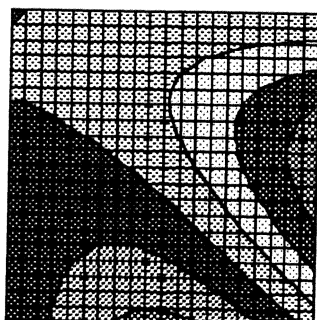
付 3 - 2 SFFF



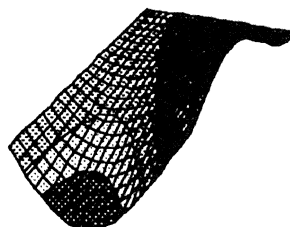
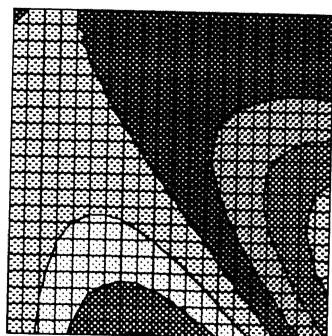
付 3 - 3 CFFF



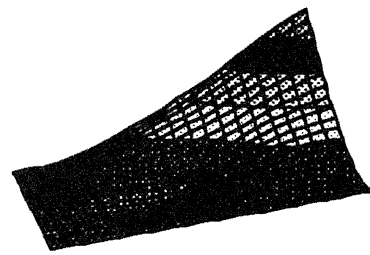
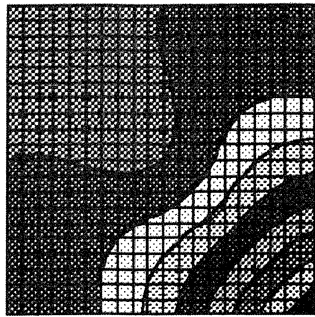
付 3 - 4 SF5F



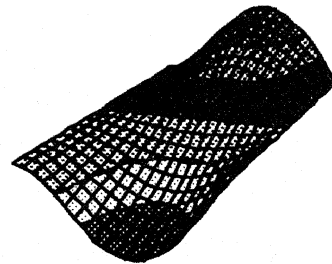
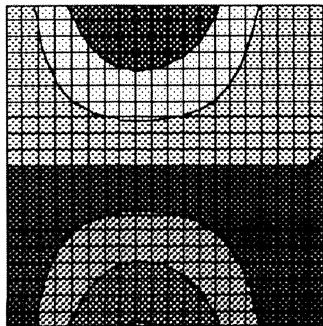
付 3 - 5 SS5F



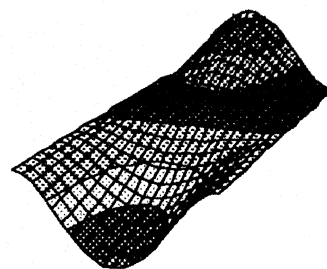
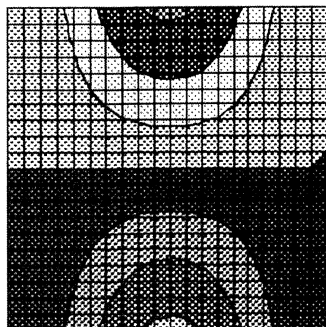
付 3 - 6 SC5F



付 3 - 7 CCFF

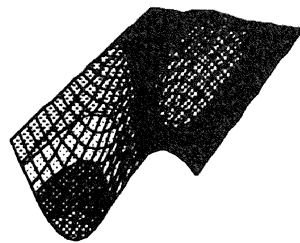
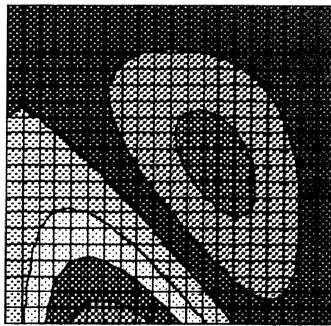


付 3 - 8 SFCF

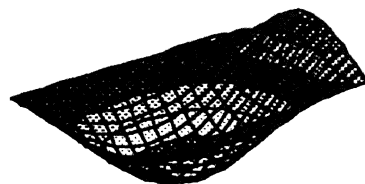
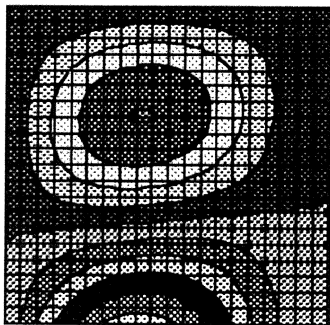


付 3 - 9 CFCF

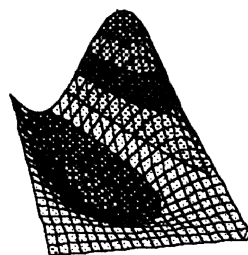
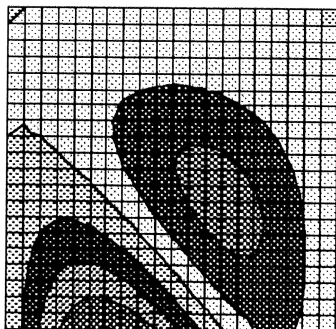




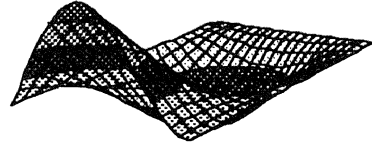
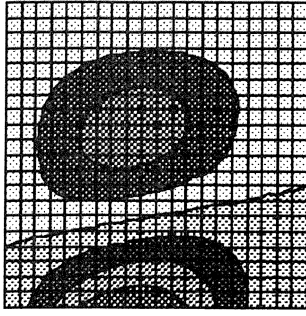
付 3 - 1 0 SSSF



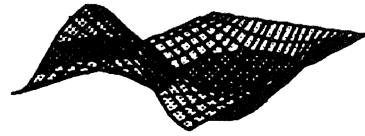
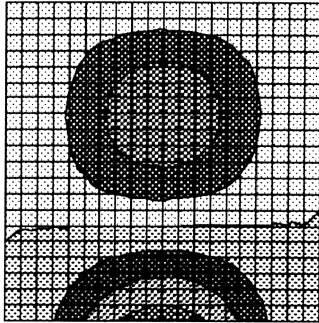
付 3 - 1 1 SSCF



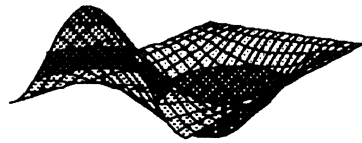
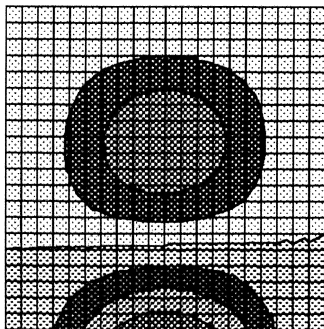
付 3 - 1 2 SCSF



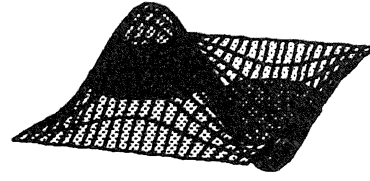
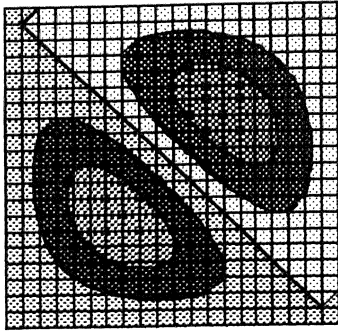
付 3 - 1 3 SCCF



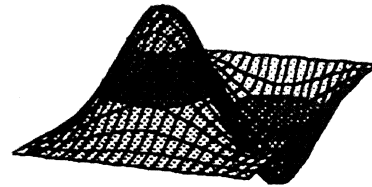
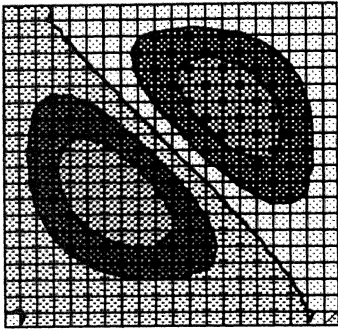
付 3 - 1 4 CSCF



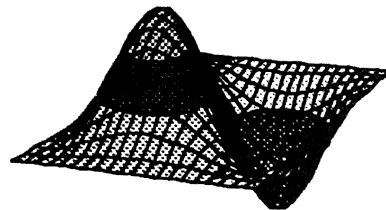
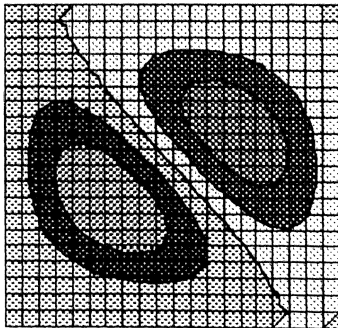
付 3 - 1 5 CCCF



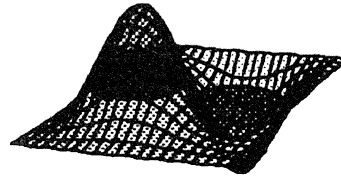
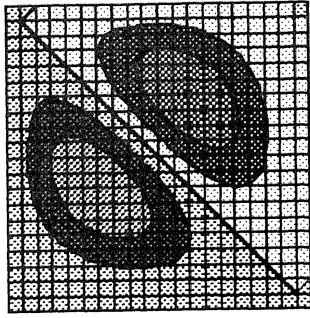
付 3 - 1 6 SSSS



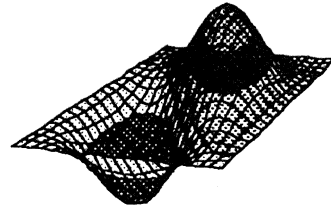
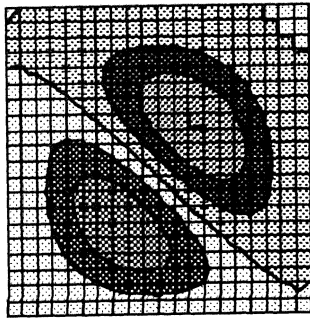
付 5.17. 3 - 1 7



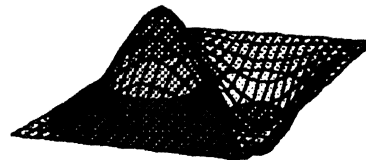
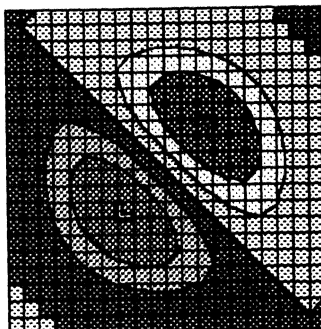
付 3 - 1 8 SCSC



付3-19 SSCC

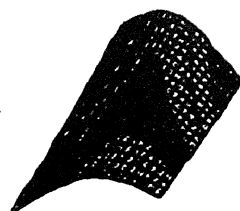
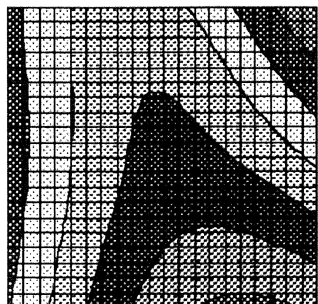


付3-20 CCCS

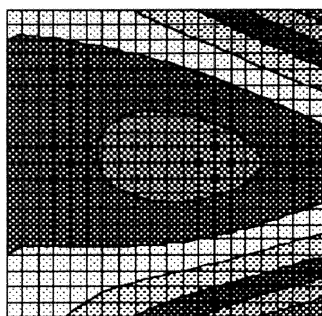


付3-21 CCCC

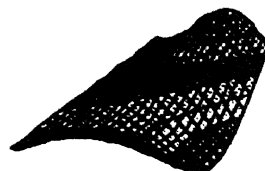
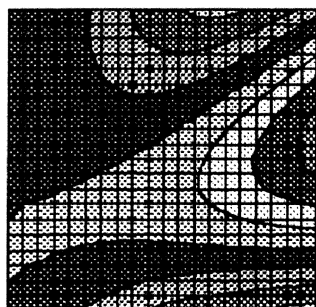
付録 4 : 2点支持正方形3層 Graphite/Epoxy 板最適振動モード図



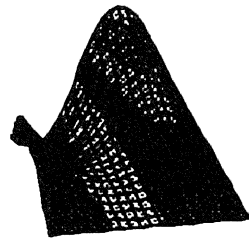
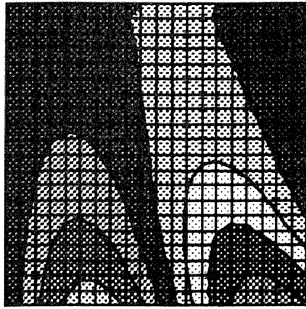
付 4 - 1 FFFF



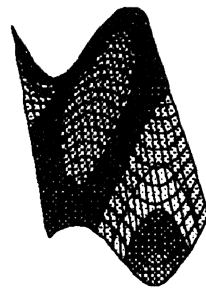
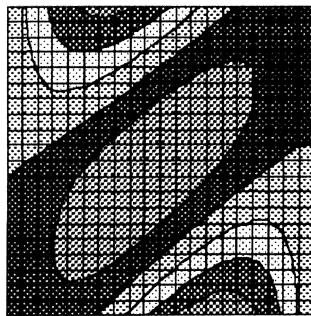
付 4 - 2 SFFF



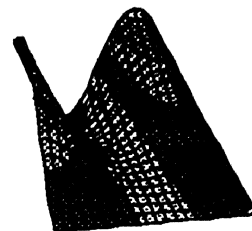
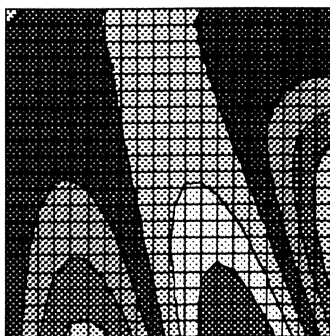
付 4 - 3 CFFF



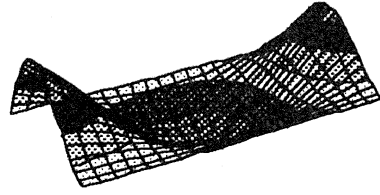
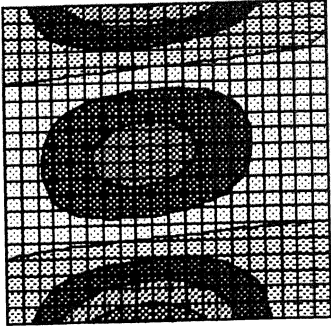
付 4 - 4 SSFF



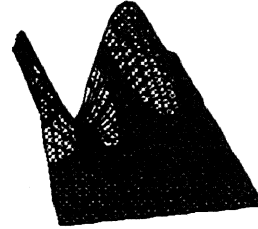
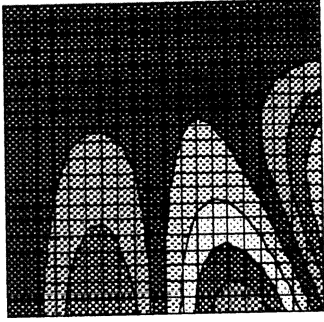
付 4 - 5 SFSE



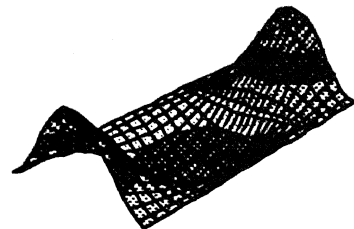
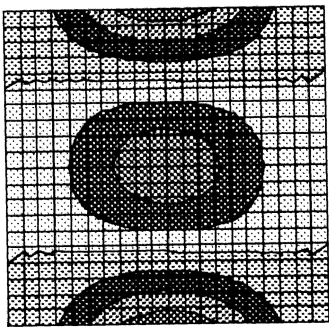
付 4 - 6 SCFF



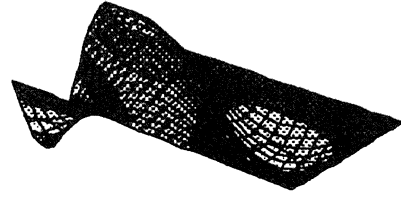
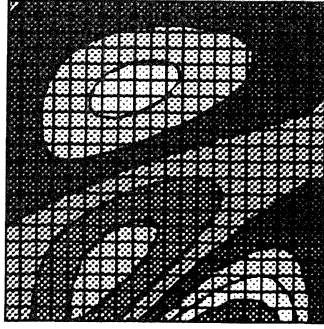
付 4 - 7 SFCE



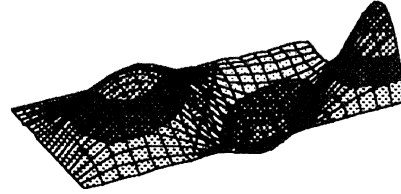
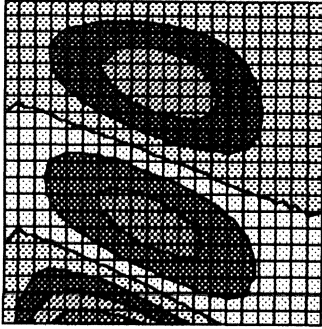
付 4 - 8 CCFF



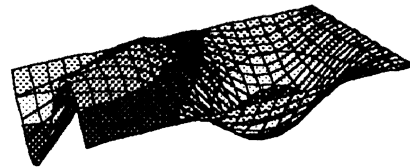
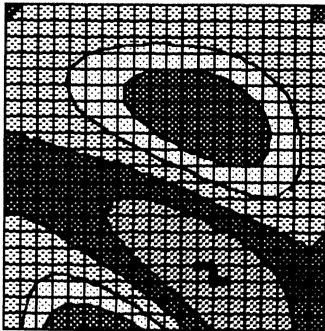
付 4 - 9 CFCF



付 4 - 1 0 SSSF

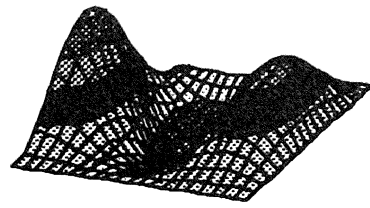
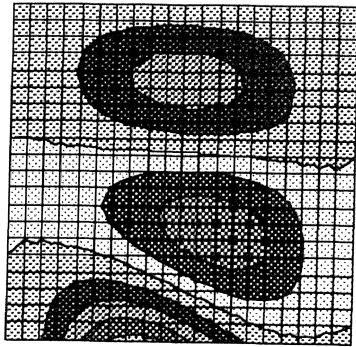


付 4 - 1 1 SSCF

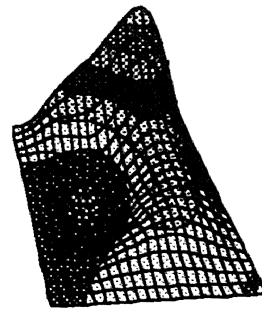
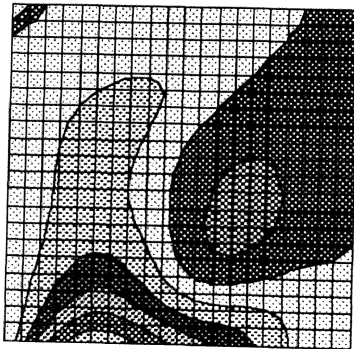


付 4 - 1 2 SCSF

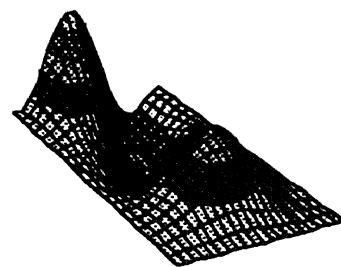
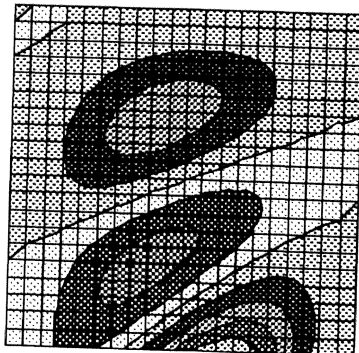




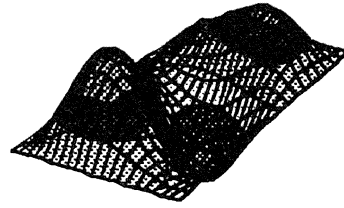
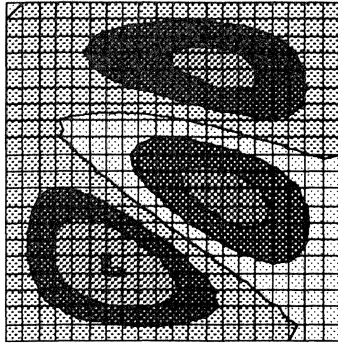
付 4 - 1 3 CSCF



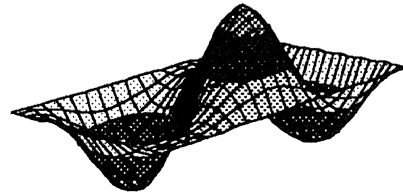
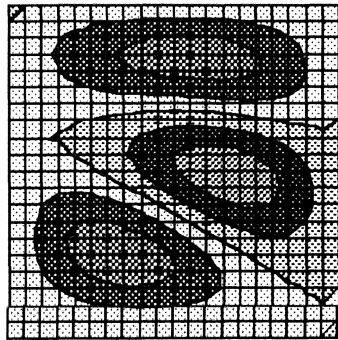
付 4 - 1 4 SCCF



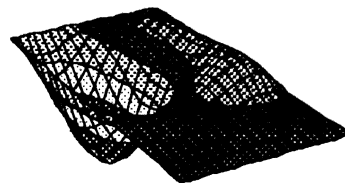
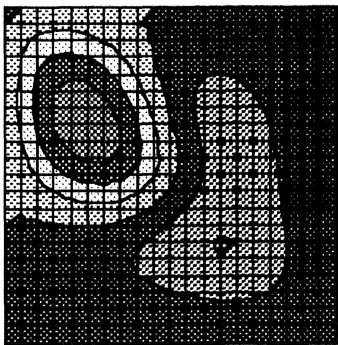
付 4 - 1 5 CCCF



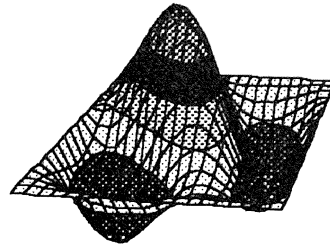
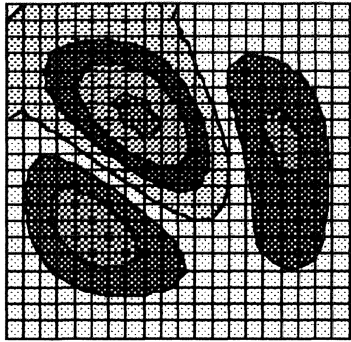
付4-16 SSSS



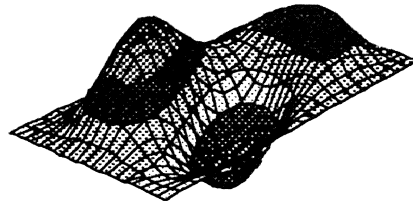
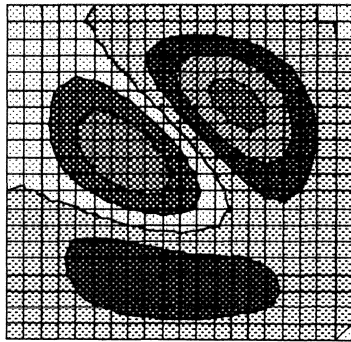
付4-17 SSSC



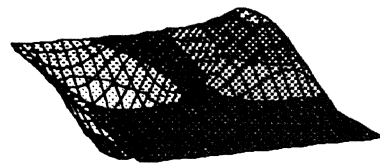
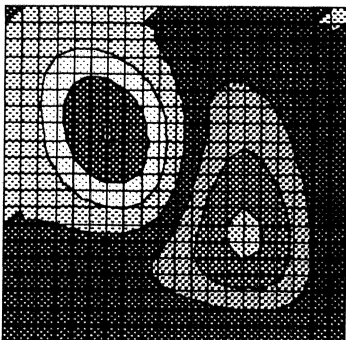
付4-18 SSCC



付4-19 SCSC



付4-20 CCCS



付4-21 CCCC

## 参 考 文 献

- (1) 日本機械学会編, 複合材料用構造解析に関する調査研究分科会報告書(P-SC208), III-33, (1994).
- (2) S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Inc. Book Com. (1970).
- (3) 成田・福士, 古典理論に基づく一般積層長方形板の力学解析プログラム, 機論, A62-603, (1996), 2621.
- (4) 成田, FRP積層長方形板の力学解析プログラム, 機講論, 910-79, (1991), 89.
- (5) 成田・他2名, FRP積層長方形板の力学解析プログラム(その2:非対称積層板の考慮), 機講論, 940-54, (1994), 115.
- (6) H. Fukunaga and H. Sekine, A Laminate Design for Elastic Properties of Symmetric Laminates with Extension-Shear or Bending-Twisting Coupling, J. Compo. Mater., 28-8, (1994), 708.
- (7) R. M. Jones, Mechanics of Composite Materials, Scripta, Washington D.C, (1975).
- (8) 成田, 機械系ダイナミクスにおける未解決問題, 機誌, 100-939, (1997), 211.
- (9) 福田・邊, 複合材料の力学序説, 古今書院, (1989).
- (10) 福田・他2名, 複合材料の構造力学, 日刊工業新聞社, (1987).
- (11) 森田・他2名, 複合材料, 日刊工業新聞社, (1988).
- (12) 大橋・神谷, 異方弾性板の理論, 森北出版社, (1975).
- (13) 小林・近藤, 弾性力学, 培風館, (1987).
- (14) 成田, 連続体の振動解析に関する研究展望(はり, 平板, 殻の振動問題), 機論, C61-583, (1995), 738.
- (15) 成田, 日本における積層複合板とシェルの振動研究, 機構論, 940-10, (19

94), 672.

- (16) 成田, 複合材料構造物のモデリングと振動問題における研究展望, 機論, 59-565, C(1993), 2593.
- (17) 成田・太田, 積層板の振動解析における簡略化モデルについて, 日本機械学会計算力学講演会論文集, No.940-54, (1994), 334.
- (18) 成田, 境界条件の自由な組合せを考慮したFRP積層長方形板の振動解析法, 日本複合材料学会誌, 18-3, (1992), 113.
- (19) A. W. Leissa and Y. Narita, Vibration Studies for Simply Supported Symmetrically Laminated Rectangular Plates, *Comp. Struct.* 12, (1989), 113.
- (20) 成田, Free Vibration of Elastic Plates with Various Shapes and Boundary Conditions, 北海道大学博士学位論文, (1979).
- (21) 松本, 積層複合材料構造物の振動特性に関する研究, 東京都立大学博士学位論文, (1991).
- (22) 一ノ宮, 積層平板の曲げ振動に関する研究, 北海道大学博士学位論文, (1990).
- (23) 趙・成田, Gauss 積分法に基づく連続体の振動解析アルゴリズム (その1. 積層平板への適用), 機講論, 952-1, (1995), 49.
- (24) 細川・他2名, 周辺固定された対称積層板の自由振動解析, 機論, C92-0492, (1992), 3184.
- (25) 細川・他2名, FRP非対称積層板の自由振動解析, 機論, C60-574, (1994), 1904.
- (26) 福永・他3名, 振動特性に基づく対称積層板の曲げ剛性同定, 機論, C60-578, (1994), 20.
- (27) 福永・他2名, 片持積層板の振動特性に及ぼす積層構成と曲げ・ねじりカップリング効果, 機論, C61-591, (1995), 46.
- (28) 成田, 複合材料構造物の座屈問題と最近の研究動向, 機械の研究, 45-6, (1993), 669.
- (29) Y. Narita, and A. W. Leissa, Buckling Studies for Simply Supported Symmetrically Laminated Rectangular Plates, *Int. J. Mech. Sci.*, 32-11, (1990), 909.

- (30) A. W. Leissa, Buckling of Laminated Composite Plate and Shell Panels, AFFDL Report. No.AFWAL-TR-85-3069, (1985).
- (31) A. L. Dobyns, Analysis of Simply-Supported Orthotropic Plates Subject to Static Loads, J. AIAA, 19, (1981).
- (32) G. B. Chai, Buckling of Generally Laminated Composite Plates with Various Edge Support Conditions, Comp. Struct. 29, (1994), 249.
- (33) 福永・他3名, 対称積層板の圧縮座屈特性に及ぼす曲げ・ねじりカップリング効果, 機論, A59-566, (1993), 131.
- (34) 成田・他3名, 積層平板の静解析における汎用コードの解析精度について, 機講論, 952-1, (1995), 53.
- (35) J. R. Vinson, and R. I. Sierakowski, The Behavior of Structures Composite Materials, (1986).
- (36) 鈴木・他3名共著, シェルの振動入門, コロナ社, (1996).
- (37) A. W. Leissa, and A. S. Kadi, Curvature Effects on Shallow Shell Vibrations, J. Sound Vib. 16-2, (1971), 173
- (38) A. W. Leissa, and M. S. Qatu, Equations of Elastic Deformation of Laminated Composite Shallow Shells, J. App. Mech. 58, (1991), 181.
- (39) A. W. Leissa, and Y. Narita, Vibrations of Completely Free Shells of Rectangular Planform, J. Sound Vib. 96-2, (1984), 207.
- (40) Y. Nrita, A. Leissa, Vibrations of Completely Free Shallow Shells of Curvilinear Planform, J. App. Mech. 86-37, (1986), 1.
- (41) M. S. Qatu, Natural Vibration of free, Laminated Composite Triangular and Trapezoidal Shallow Shells, Comp. Struct., 31, (1995), 9.
- (42) A. Barai and S. Durvasula, Vibration and Buckling of Hybrid Laminated Curved Panels, Comp. Struct., 21, (1992), 15.
- (43) S. B. Dong, Free Vibration of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells, J. Acoustical Society of America, 44-6, (1968), 1628.
- (44) M. S. Qatu, Vibration Analysis of Cantilevered Shallow Shells With Triangular and

Trapezoidal Planform, J. Sound and Vib. 191-2, (1996), 219.

- (45) Y. Narita, Y. Ohta, G. Yamada, and Y. Kobayashi, Analysis Method for Vibration of Angle-Ply Cylindrical Shells Having Arbitrary Edges, J. AIAA, 30-3, (1992), 790.
- (46) Y. Narita, Y. Ohta, and M. Saito, Finite Element Study for Natural Frequencies of Cross-Ply Laminated Cylindrical Shells, Comp. Struct., 26, (1993), 55.
- (47) Y. S. Nshanian, and M. Pappas, Optimal Laminated Composite Shells for Buckling and Vibration, J. AIAA, 20-3, (1983), 430.
- (48) 成田・太田・藤川, 任意の境界条件を持つ偏平殻の自由振動, 機講論, No 932-1, (1993), 3.
- (49) 小林, 薄肉殻の振動と応答に関する研究, 北海道大学博士学位論文, (1985).
- (50) 太田, 積層複合円筒殻の振動に関する研究, 北海道大学博士学位論文, (1990).
- (51) 日本機械学会, 機械構造設計の最適手法に関する調査研究分科会報告書 (P-SC77), (1987).
- (52) 日本機械学会, 設計最適化のための新技術開発とその応用に関する調査研究分科会成果報告書 (P-SC199), (1994).
- (53) 日本機械学会編, 構造・材料の最適設計, 技報堂, (1989).
- (54) 山川, 最適化デザイン, 培風館, (1993).
- (55) 伊理・他2名監訳, 最適化ハンドブック, 朝倉書店, (1995).
- (56) 尾田, 機械構造設計の最適化手法とその応用, 機械の研究, 40-5, (1988), 617.
- (57) 瀬口, 構造最適化問題, 機誌, 92-847, (1989), 485.
- (58) 大野・磯田監修, 新版数値計算ハンドブック, オーム社, (1990).
- (59) 黒田訳, 非線形最適化の技法, 培風館, (1972), 78.
- (60) 山本・小山訳, 非線形最適化問題, 培風館, (1978), 27.
- (61) 荻原・長松, 動力学における最適設計の展望, 機論, C61-587, (1995), 2645.
- (62) 趙・成田, Complex 法による一般的な積層長方形板の基本振動数の最大化設計, 機論, C63-606, (1997), 365.

- (63) 趙・成田, 支持点と繊維配向角を組合せた積層長方形板の振動特性の最適設計, 機論, C63-613, (1997), 3023.
- (64) H. Fukunaga, H. Sekine and M. Sato, Optimal Design of Symmetric Laminated Plates for Fundamental Frequency, J. Sound and Vib. 171-2, (1994), 219.
- (65) 成田, 支持位置による連続体の固有振動数の最適化(第1報, 最適位置の探索法), 機論, C54-507, (1988), 2605.
- (66) 成田・高橋, 支持位置による連続体の固有振動数の最適化(第2報, 変断面連ばりへの適用), 機論, C55-510, (1989), 281.
- (67) 藤掛・他5名, 片持ばりの支持点, 支持剛性を設計変数とした固有振動数の有限要素法による最適化, 機論, A57-537, (1991), 251.
- (68) C. W. Bert, Optimal Design of a Composite-Material Plate to Maximize Its Fundamental Frequency, J. Sound and Vib., 50-2, (1977), 229.
- (69) C. W. Bert, Design of Clamped Composite-Material Plates to Maximize Fundamental Frequency, J. Mechanical Design, 100, (1978), 274.
- (70) R. T. Haftka, and J. L. Walsh, Stacking-Sequence Optimization for Buckling of Laminated Plates by Integer Programming, J. AIAA, 30-3, (1992), 814.
- (71) S. Nagendra, R. T. Haftka, and Z. Gurdal, Stacking Sequence Optimization of Simply Supported Laminates with Stability and Strain Constraints, J. AIAA, 30-8, (1992), 2132.
- (72) 佐藤・他3名, 対称積層板の組合せ荷重下の座屈特性最適化, 機論, A60-571, (1994), 263.
- (73) 成田・趙・新田, Complex法による一般積層平板の座屈荷重の最大化設計, 日本機械学会D&S講演会論文集, No.96-45, (1996), 96.
- (74) 笹田・轟・三木, 複合材料積層板の最適化エキスパートシステムの開発, 機論, A58-551, (1992), 173.
- (75) 成田・趙, Complex法による積層板の最大剛性設計, 機講論, 962-1, (1996), 117.
- (76) 趙・成田, 大型の三次元平板組立構造の最適設計, 日本機械学会第2回最適化シンポ



ジウム講演論文集, No.96-7, (1996), 37.

- (77) 成田・趙, 積層シェルの最適化問題における解析モデルについて, 日本機械学会D & D '95講演会論文集, No.95-8, (1995), 68.
- (78) 福永, 直交異方性積層材の剛性特性と最適化(円筒シェルへの応用), 日本複合材料学会誌, 11-1, (1985), 27.
- (79) C. M. Mota Soares, A Discrete Model for the Optimal Design of Thin Composite Plate-Shell Type Structures Using a Two-level Approach, *Comp. Struct.*, 30, (1995), 147.
- (80) Y. Narita, M. Itoh, X. Zhao, Optimal Design by Genetic Algorithm for Maximum Fundamental Frequency of Laminated Shallow Shells, *Advanced Composites Letters*, Vol.5, No.1, (1996), 21.
- (81) 成田・趙, 積層偏平シェルの振動特性の最適化, 日本機械学会D & S '95講演会論文集, No.95-24, (1995), 330.
- (82) 成田, 点支持された長方形偏平シェルの振動と最適支持位置について, 北海道工業大学研究紀要, No.13, (1985), 1.



# 謝 辞

本研究を行うにあたり、北海道工業大学機械工学科 成田吉弘教授より、適切な御指導と多くの有益な御助言を賜りましたことをここに記し、謹んで感謝の意を表します。成田教授の温かいお人柄により、公私にわたり導かれたもとの、中国人留学生である著者として、日本で充実した3年間半の人生最後の学生生活を送ることができたことを最高の幸せと感じております。

また、本論文の作成にあたり、有益なご指摘と御助言を頂きました北海道工業大学機械工学科 太田佳樹助教授に対し、深く謝意を表します。

研究生生活に御助言と励ましを頂きました北海道工業大学学長 有江幹男先生、機械工学科 丸山晃市主任教授、大滝誠一教授、竹内茂教授、一ノ宮修教授に謹んで感謝申し上げます。

日頃、一緒に勉強してご検討と助言を頂いた北海道工業大学大学院生 関根孝次、福士賢一、市呂兼二、高井和彦、新田敏則の方々に御礼申し上げます。

日常生活において色々とお世話になりました北海道工業大学教養部 岸政美先生、北海道工業大学外国人留学生交流会顧問 佐藤敏行先生、北海道工業大学保健室 佐々木幸子先生と北海道工業大学学生課の先生達に謹んで感謝申し上げます。

日本に滞在する身元保証人の北海道大学工学部 本間久朗先生と奥様、物心両面にわたる続けて支えを頂いた知人の長尾真玄先生と奥様に心より感謝申し上げます。

私費留学生活において数々の支持を頂いた(株)三共システム工房 成田正史代表取締役社長、佐藤明生部長、若林一彦課長、細岡勝志主任およびシステム開発課の皆様に厚く御礼申し上げます。

日本国際教育協会、ロータリー米山記念奨学会、特に札幌あけぼのロータリークラブ 秋野公孝会長、安沢正美幹事、久住博国際交流委員およびクラブの皆様に、謹んで感謝申し上げます。

最後に、長期間の研究生生活を支えて頂いた父母、妻と息子、そして多くの友人達に感謝いたします。

# 著者の業績リスト

## 一. 原著論文

1. Y.Narita, M.Itoh, X.Zhao, Optimal design by genetic algorithm for maximum fundamental frequency of laminated shallow shells  
    <Advanced Composites Letters> Vol.5, No.1, 1996, pp.21-24
2. 成田, 趙, 積層偏平シェルの振動特性の最適化  
    <日本機械学会論文集C編> Vol.62, No.595, 1996, pp.817-822
3. 趙, 成田, Complex 法による一般的な積層長方形板の基本振動数の最大化設計  
    <日本機械学会論文集C編> Vol.63, No.606, 1997, pp.364-370
4. 趙, 成田, 支持点と繊維配向角を組合せた積層長方形板の振動特性の最適設計  
    <日本機械学会論文集C編> Vol.63, No.613, 1997, pp.3023-3029
5. Y.Narita, X.Zhao, Optimization for vibration characteristics of laminated shallow shells  
    <International Journal of Solids and Structures> (掲載決定済)
6. 成田, 趙, 大型の三次元平板組立構造の最適設計  
    <北海道工業大学研究紀要> 第26号 1998.
7. 趙, 中国と日本の大学の研究と教育を語る  
    <日本機械学会誌> Vol.101, No.951, 1998.

## 二. 講演論文

1. 成田, 趙, 積層偏平シェルの振動特性の最適化  
    <日本機械学会D & S'95講演会> 1995.7
2. 成田, 趙, 積層シェルの最適化問題における解析モデルについて  
    <日本機械学会D & D'95講演会> 1995.8
3. 趙, 成田, Gauss 積分法に基づく連続体の振動解析アルゴリズム  
    <日本機械学会北海道支部第35回講演会> 1995.9
4. 成田, 趙, Complex 法による積層板の最大剛性設計  
    <日本機械学会北海道支部第36回講演会> 1996.9
5. 趙, 成田, 大型の三次元平板組立構造の最適設計  
    <日本機械学会第2回最適化シンポジウム> 1996.9
6. 成田, 趙, 新田, Complex 法による一般的な積層板の座屈荷重の最大化設計  
    <日本機械学会D & S'96講演会> 1996.10
7. Y.Narita, X.Zhao, An Optimal Design Method for the Maximum Fundamental Frequency of Laminated Shell Shells  
    <International Symposium on Optimization and Innovative Design> 1997.7
8. 趙, 成田, 2レベル最適化法による積層板の振動数制約付き最小重量設計  
    <日本機械学会北海道支部第37回講演会> 1997.9
9. 趙, 成田, 拘束点と繊維配向角を組合せた積層長方形板の振動特性の最適化  
    <日本機械学会第7回設計工学・システム部門講演会> 1997.11