

## 粘弾性材料の動特性の実験的検討と等価剛性モデルの構築に関する研究

### Research for the Experimental Study of Dynamic Characteristics and the Construction of Equivalent Stiffness Model for a Viscos-elastic Material

成田 大祐\*      太田 佳樹\*\*      吉田 昌充\*\*\*

Daisuke Narita    Yoshiki Ohta    Masamitsu Yoshida

#### Abstract

This paper studies the dynamic characteristics of a viscos-elastic material experimentally and the construction of an equivalent stiffness model for the material numerically. For this purpose, the vibration tests for the viscos-elastic material are carried out under the different strain amplitudes in vibration, and the master curve, which indicates the dynamic characteristics of the material for wider range of frequency, is obtained numerically by applying the W.L.F. rule. Fractional derivative models for the stress-strain relationship are then assumed for the material and the parameters of the model are identified for each master curve, respectively. In minimizing the sum of differences between master curve's values and the estimated values given by the assumed model is minimized numerically by using the Solver function of the Microsoft EXCEL in the present study. Finally, the applicability of the Fractional derivative models is discussed by comparing the numerical results, and it was found that the present model is useful for the construction even if the strain amplitude is varied.

#### 1. 序論

従来、タイヤなどに用いられる粘弾性材料の設計においては、化学的な手法である高分子モデルや実験観測に基づくモデルが一般的に用いられているが、応力とひずみの関係を与える機械的なモデルを用いた構造解析や設計についてはあまり検討されていない<sup>(1)</sup>。これは粘弾性材料がひずみ振幅依存性、周波数依存性あるいは温度依存性が複雑に混ざった動特性を持っており<sup>(2)</sup>、その動特性をモデル化することが非常に難しいためである。

これまで新村ら<sup>(3)</sup>は、共同研究先から入手した粘弾性材料の複素弾性定数に関する実験データに対して、分数階微分モデルを用いたパラメータ同定を実施し、力学的モデルの構築に関して有用な成果を得てきている。しかしながら、この共同研究先からの実験データは、ある特定の実験条件に関

するデータであり、他の実験条件から得られた実験データに対する分数階微分モデルの有効性はまだ十分検討できていない。そこで、今後は異なる実験条件から粘弾性材料の動特性を実験的に求め、それぞれの実験データについてパラメータ同定を実施することにより、分数階微分モデルの有効性を検討する必要があると考えられる。

このような背景から、本研究では粘弾性材料を用いた振動実験を実際に行い、粘弾性材料の動特性についての理解を深めると共に、異なるひずみ振幅から得られた実験データについて、分数階微分モデルを用いたパラメータ同定を表計算ソフト EXCEL のアドイン「ソルバー」機能を活用して実施する。そして、パラメータ同定結果の比較により、ひずみ振幅が異なる場合の動特性に関する分数階微分モデルの有効性を検証する。

\* 北海道科学大学短期大学部自動車工学科

\*\* 北海道科学大学工学部機械工学科

\*\*\* 北海道立総合研究機構工業試験場

## 2. 粘弾性材料の機械的特性<sup>(1)</sup>

高分子材料は各々の分子鎖がランダムに絡み合いながら結晶部と非結晶部が混在した状態で存在しており、温度・周波数依存性は分子間の粘弾性特性に大きく依存する。ヤング率および損失係数によって表わされる粘弾性材料の動特性は温度によって大きく変化し、その変化の程度は高分子の組成によって異なる。また、多くの粘弾性材料においては、温度と同様周波数の影響も非常に大きい。

図 1 は粘弾性材料におけるヤング率、損失係数と温度の一般的な関係を概念的に示している。図に示すように、环境温度によって 4 つの領域に分けることができ、目的によってその利用温度を使い分けの必要がある。一方、周波数依存性に関して、これまでの研究により同様な傾向があることが確認されており、この周波数依存性と温度依存性の間にはある換算則が成立することも広く知られている。

粘弾性材料の転移領域で成立する温度-周波数換算式の 1 つである W.L.F (Williams, Landel, Ferry) 則によれば、温度  $T$  [K] の実験データに対するシフトファクター  $a_T$  は

$$\log a_T(T, T_o) = -\frac{C_1(T - T_o)}{C_2 + T - T_o} \quad (1)$$

で与えられる。ここで上式中の  $T_o$  は基準温度[K]で、 $C_1$ 、 $C_2$  は実験定数である。そして、実験可能な周波数帯域に対して求められた実験データにこの換算式を適用することにより、より広い周波数帯域に対する動特性データ（ヤング率および損失係数）を数値的に求めることが可能となる。なお、本研究においては、この換算式を用いて求められた動特性データを「マスターカーブ」と呼ぶものとする。

また、本研究では実際に実験に用いる実験機器から貯蔵弾性率と損失弾性率が得られるため、以下の記述においては、ヤング率の代わりに貯蔵弾性率、ヤング率に損失係数を乗じたものの代わりに損失弾性率という物理量を用いることとする。

## 3. 実験装置および方法

本研究においては、粘弾性材料の試験片温度と加振周波数を共に変化させながら、一定のひずみ振幅を与えて弾性特性を計測する実験装置（日立ハイテクサイエンス製 DMA7100 Thermal Analysis

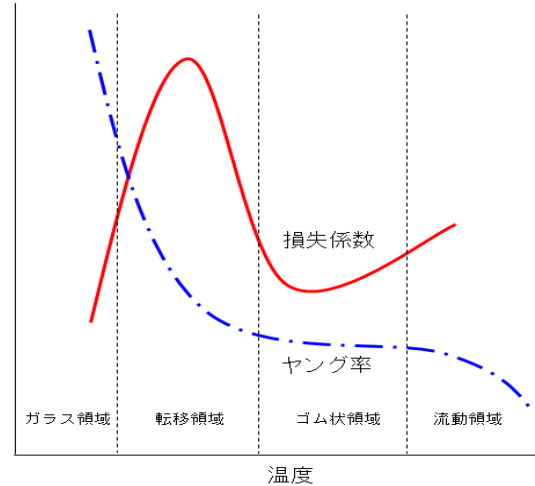


Fig. 1. General dynamic characteristics of visco-elastic materials.

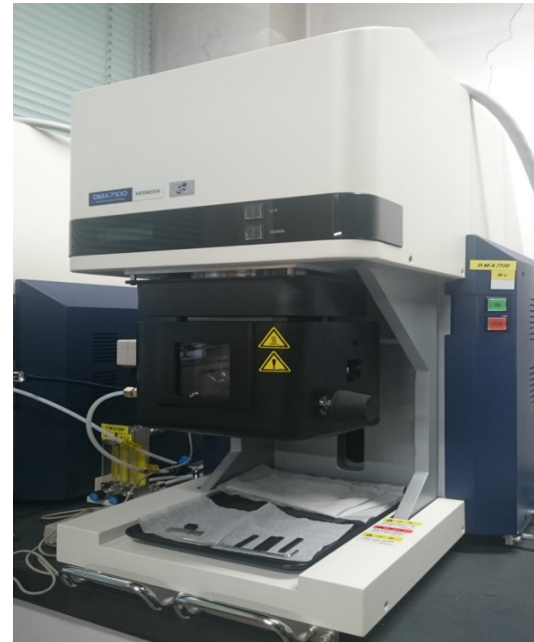


Fig. 2. Experimental equipment in this study.

System) を用いる。図 2 は本実験装置である。そして得られた実験データからマスターカーブを作成する際は、装置付属の熱分析ソフトウェア（DMA マスターカーブ解析オプション）を用いることとした。

実験に際しては、まず実験装置に試験片を固定させる。そして、試験片の温度範囲と与える加振周波数とひずみ振幅を設定する。なお、本実験に使用する試験片としては、天然ゴムシートのアズワン NR0505 (B-1001) を入手し、長さ 20.00mm、幅 6.00mm、厚さ 1.95mm として実験に用いるものと

する。

実験条件として、試験片の温度変化は 183K 前後から 373K までの範囲とする。これは粘弾性材料のガラス転移温度が 203K 付近に存在しているためである。また、与える加振周波数は、0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20 Hz の 8 つとし、ひずみ振幅には 5, 10, 20 $\mu$ m を用いて実験データを取るものとする。なお、ここでは試験片の伸縮変形の実験を実施するものとする。また、本実験装置においては、液体窒素を用いて試験片のまわりの環境温度を指定の一定温度になるように制御し、いくつかの所定温度下において加振周波数を変化させて各弾性率を計測している。

#### 4. 実験結果およびマスターカーブ作成

図 3～5 は、ひずみ振幅をそれぞれ 5, 10, 20 $\mu$ m で実験した場合の実験結果であり、各図中には各温度における粘弾性材料の貯蔵弾性率  $G'$ 、損失弾性率  $G''$ 、損失正接  $\tan D$  ( $=G''/G'$ ) を各加振周波数ごとに示したものである。これらの結果を比較すると、少なくとも今回の実験においてはひずみ振幅の違いの影響はほとんど見受けられない。また、いずれの結果においても、約 200K 以下の低い温度領域における  $G''$  が変動しているように見受けられ、これは低温下における実験による装置上の実験誤差ではないかと推測できる。

図 6 は、図 3 に示す実験データから熱分析ソフトを用いて求めたマスターカーブである。なお、ここではガラス転移温度  $T_g$  は 203K とし、基準温度

$T_0$  も 203K で求めている。また、この場合に熱分析ソフトから算出された実験定数  $C_1$ ,  $C_2$  はそれぞれ  $C_1 = 27.0$ ,  $C_2 = 52.0$  となった。そして、図 4, 5 の実験結果から同様に求められたマスターカーブがそれぞれ図 7, 8 である。これらの結果を比べると、 $10^{-5}$ Hz 以上の高い周波数領域において  $G''$  がばらついているものの、ほぼ同様なマスターカーブが得られていることがわかる。そして、この高周波領域における  $G''$  のばらつきは、W.L.F 則を用いて求められた過程を鑑みると、各実験データの約 200K 以下の低温領域における  $G''$  の変動に起因していると容易に推測できる。

なお、ここで得られた  $G'$ ,  $G''$  は厳密な意味では

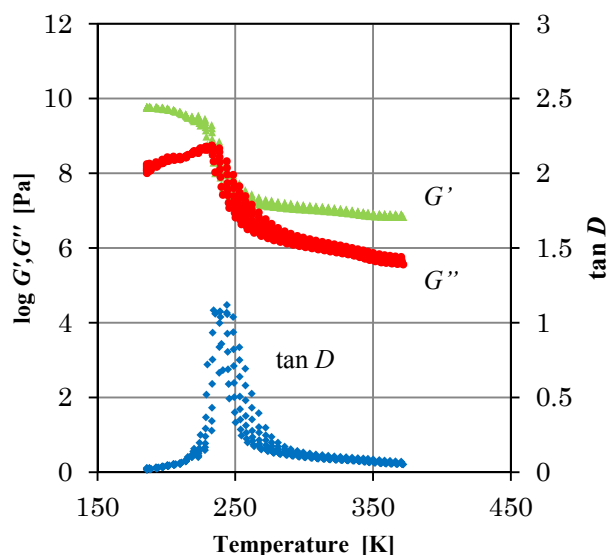


Fig. 4. Experimental results for strain 10  $\mu$ m.

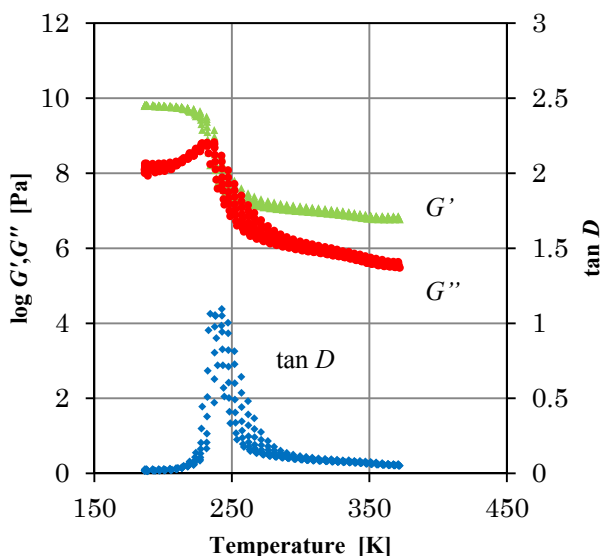


Fig. 3. Experimental results for strain 5  $\mu$ m.

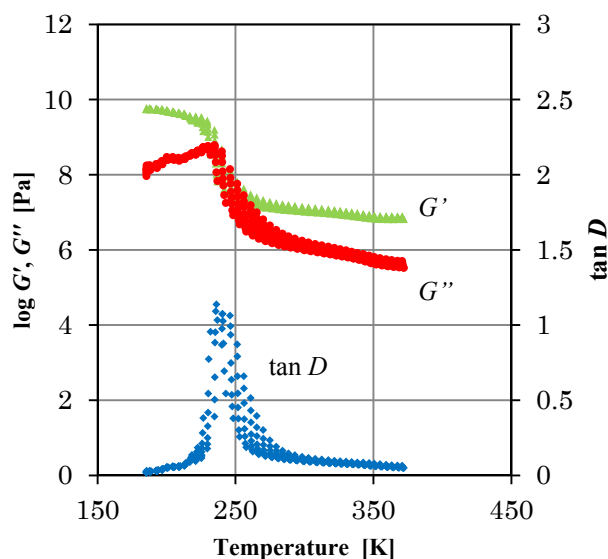


Fig. 5. Experimental results for strain 20  $\mu$ m.

実験データから換算した計算値になるが、本報告ではパラメータ同定を行う際に計算して求められた  $G'$ 、 $G''$  と区別するため、以下ではマスターカーブから得られた  $G'$  および  $G''$  の値を「実験値」と呼ぶこととする。

##### 5. 分数階微分モデルを用いたパラメータ同定

分数階微分モデルを用いた場合の最も簡単な応力-ひずみ関係式は

$$\sigma + c \frac{d^\beta \sigma}{dt^\beta} = a \varepsilon + b \frac{d^\beta \varepsilon}{dt^\beta} \quad (2)$$

と書ける。ここで上式中の  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $\beta$  は実験データに対して同定されるべきパラメータである。

次に定常振動を考えると式(2)は

$$\sigma(t) = \frac{a + b(i\omega)^\beta}{1 + c(i\omega)^\beta} \varepsilon(t) \quad (3)$$

と変形でき、これより複素弾性係数  $G^*$  は

$$G^* = \frac{a + b(i\omega)^\beta}{1 + c(i\omega)^\beta} \quad (4)$$

となる。次に上式にド・モアブルの公式を用いると

$$G^* = \frac{a + b(\cos \frac{\pi}{2} \beta + i \sin \frac{\pi}{2} \beta) \omega^\beta}{1 + c(\cos \frac{\pi}{2} \beta + i \sin \frac{\pi}{2} \beta) \omega^\beta} \omega^p \quad (5)$$

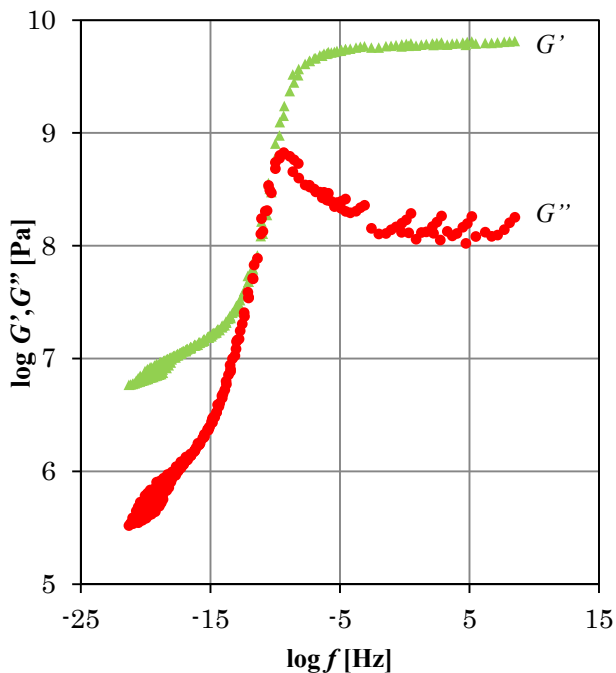


Fig. 6. Master curve obtained for strain 5  $\mu\text{m}$ .

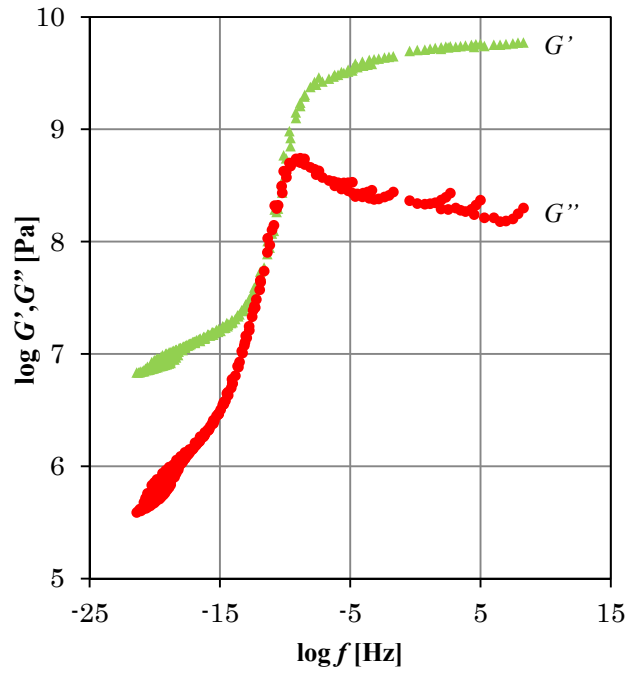


Fig. 7. Master curve obtained for strain 10  $\mu\text{m}$ .

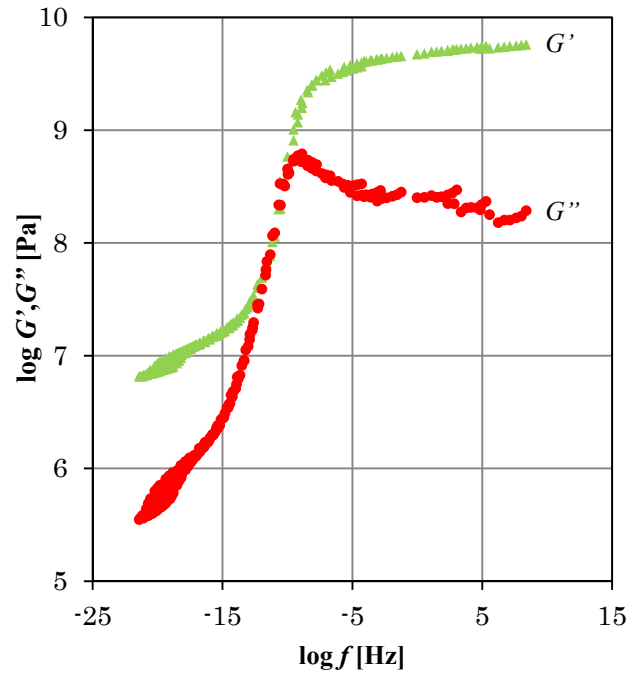


Fig. 8. Master curve obtained for strain 20  $\mu\text{m}$ .

と変形できる<sup>(4)</sup>。なお、上式における右辺の  $\omega^p$  はここで導入した補正項で、これまでの研究成果<sup>(2)</sup>からその有効性が報告されているものである。

本研究では式(2)の応力-ひずみ関係モデルを  $N$  組、並列に並べたモデルを仮定して、各マスターカーブについてパラメータ同定を行う。

ただし、本研究においては、今後粘弾性材料(ゴム)からなるタイヤ設計の高度化に本研究の成果を適用することを想定しており、構造解析のために考慮すべき周波数は数 Hz から数百 Hz であることを考えて、以下では 1 Hz より高い周波数領域のデータについてパラメータ同定を行うものとする。

また、実際のパラメータ同定においては、並列に並べるモデル数  $N$  を 1 から 5 まで変化させて、表計算ソフトのソルバー機能(GRG 非線形と進化型計算手法を併用)を使用してパラメータ同定を実施する。なお、本研究での最小化においては評価関数  $F$  を最小になるようにパラメータを同定する。

$$F = \sum_i \frac{(G'_i - G'_{exp})^2}{(G'_{ave})^2} + \sum_i \frac{(G''_i - G''_{exp})^2}{(G''_{ave})^2} \quad (6)$$

ここで上式中の  $G'_i$  および  $G''_i$  は式(5)から推定される計算値、 $G'_{exp}$  および  $G''_{exp}$  はマスターカーブから得られた実験値、 $G'_{ave}$  および  $G''_{ave}$  はその実験値の平均値である。

表 1 は、ひずみ振幅  $5\mu\text{m}$  の実験データについて、式(2)のモデル数  $N$  を変えてそれぞれパラメータ同定して求められた各パラメータ値とその評価値を示している。この結果より、最も評価値の小さいものは  $N=5$  の時であり、モデル数が多いほど実験データに対するパラメータ同定の精度が高いことが確認できる。

図 9～13 はモデル数  $N=1\sim5$  のそれぞれの場合について、マスターカーブから得られた実験値と同定されたモデルから推定した計算値をそれぞれ示している。ここで図中の  $\times$  は実験値であり、実線は計算値である。これらの結果より、いずれの場合においても  $G'$  については精度良く同定できていると考えられる。しかしながら、 $G''$  については実験値が前述のように周期的にばらついているため、同定されたモデルは実験値の平均的な値を推定するモデルとなっていることがわかる。

## 6. 結論

本研究では、粘弾性材料を用いた振動実験を実施して粘弾性材料の動特性を明らかにすると共に、異なる実験条件から得られた実験データについてパラメータ同定を実施することにより、分数階微分モデルの有効性を検討した。

その結果、今回実施した実験におけるひずみ振幅の違いの影響は、動特性把握のためのマスター

Table 1 Minimized evaluation functions and identified parameters ( $N=1\sim5$ ).

$N$	$F$	$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$\beta_i$	$\rho_i$
1	0.920836976	1	3589606.122	99999.99999	-0.999444353	7.03423E-06	-0.020633198
2	0.745780782	1	54151189791	-77124964.38	2.60511E+11	-727.0643583	-9674.890543
		2	38489191943	-6.026487763	5.403133302	-0.017931087	-0.011723384
3	0.975275212	1	9765625.638	30582.07034	-0.99859471	1.70994E-05	-0.020886213
		2	402457.4269	50459.43797	1000	-0.746548288	0.288170327
		3	807122.228	30799.88037	932.2851437	-1	0
4	0.820190898	1	9844903.832	94834.08788	-0.998501428	1.95989E-05	-0.025112999
		2	999478.0184	3123.718364	9.848468801	-0.998974613	0.281301045
		3	998014.4224	0	10.22546837	-0.99894388	0.29551092
		4	998622.609	16796.26325	997.4100624	-0.95371073	0.293216581
5	0.614835106	1	41848343097	-333462.4691	5232360.56	-4440.180068	-5270.353825
		2	64847815088	-3652000.805	505051.4473	-8467.470881	-91613.31373
		3	0.943223973	4.46548E-09	-1.0238E-06	0.673628295	0.858604946
		4	-46.72737102	45923.42894	49321.40557	7.701360922	-217.0606737
		5	15086509622	-10089.10381	1.535465962	-0.026406994	-0.010751795

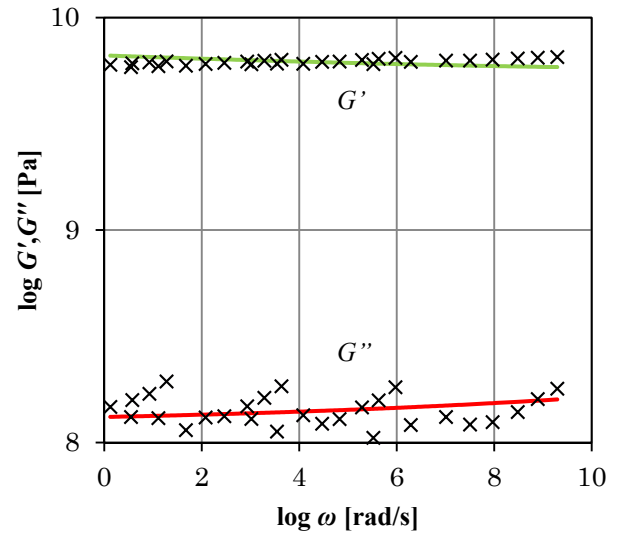


Fig. 9. Numerical result for identification ( $N=1$ ).

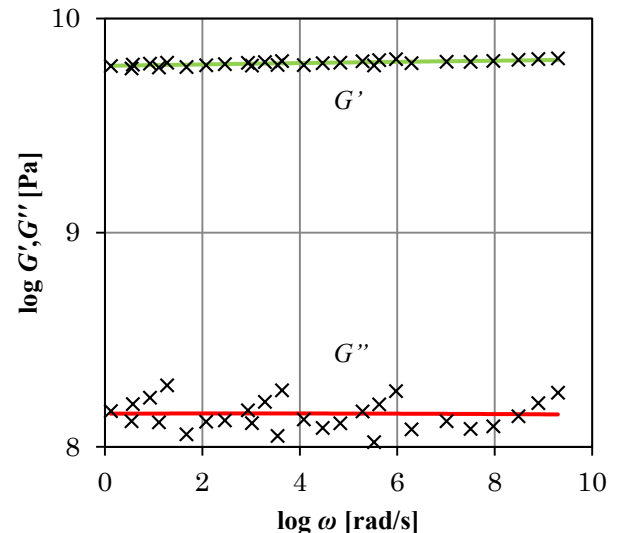


Fig. 10. Numerical result for identification ( $N=2$ ).

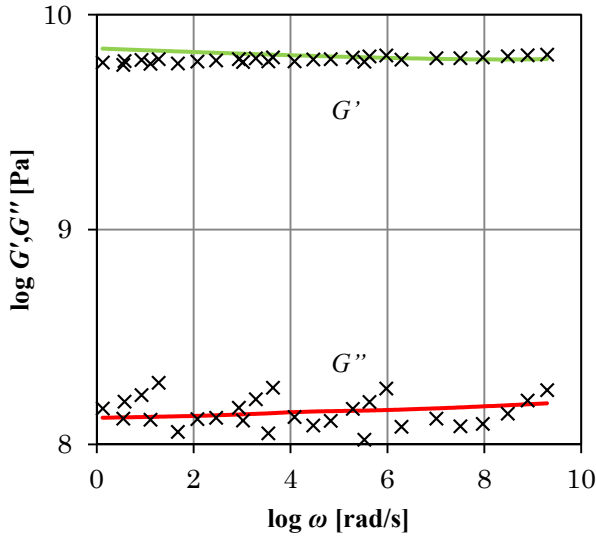


Fig. 11. Numerical result for identification ( $N=3$ ).

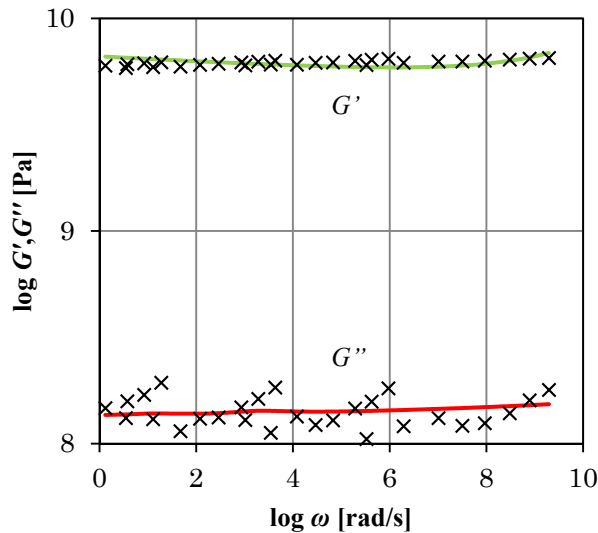


Fig. 12. Numerical result for identification ( $N=4$ ).

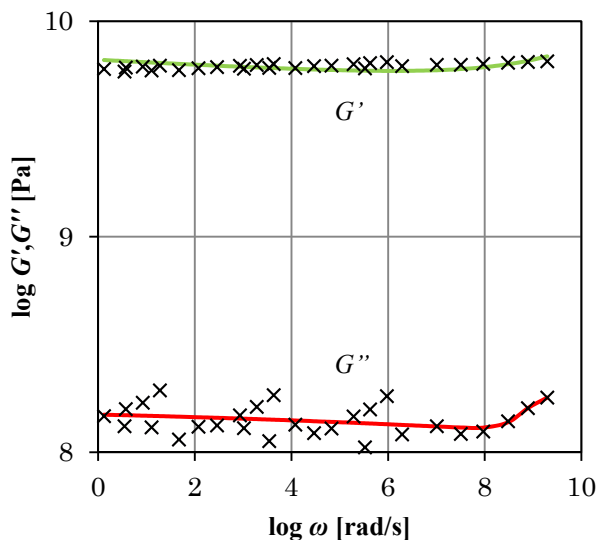


Fig. 13. Numerical result for identification ( $N=5$ ).

カーブ作成，分数階微分モデルを用いたパラメータ同定のいずれにおいても，ほとんど違いが認められなかった。

今後は振動実験における更なる精度向上を検討すると共に，得られた実験データの適切な選択等による精度の高いマスターカーブの作成，そしてひずみ振幅等の実験条件のパラメータ同定への影響について更なる検討が今後の課題と考えている。

### 謝辞

本研究における実験データ収集においては，北海道科学大学創生工学部機械システム工学科 4 年知能デザイン研究室，後藤駿氏の協力を頂いた。また，本研究の遂行にあたり，多大なる御協力賜った地方独立行政法人北海道総合研究機構の山岸暢氏，可児浩氏，瀬野修一郎氏に厚く感謝の意を表する。

### 参考文献

- (1) 深堀美英：設計のための高分子の力学，技報堂出版，2000.
- (2) David I. G. Jones：粘弾性ダンピング技術ハンドブック，丸善，2003.
- (3) 新村友弥，太田佳樹：粘弾性材料特性のパラメータ同定で用いる GA の改良，日本機械学会北海道学生会第 42 回学生員卒業研究発表講演会講演論文集，2013，pp.235-236.
- (4) 清水信行：粘弾性振動子の動的性質，日本機械学会論文集(C 編)，61 巻 583 号，1995，pp.166-170.