

モンテカルロシミュレーションによる  
イオンスラスタの  
弱電離プラズマ制御に関する研究

2007年3月

北海道工業大学大学院

宮崎 洋平

# 目 次

第1章 序論	1
1-1 まえがき	
1-2 電気推進機の歴史と従来の研究	2
1-3 論文の構成	3
第2章 シミュレーション方法	7
2-1 まえがき	7
2-2 モンテカルロ法によるシミュレーション	7
2-2-1 シミュレーション方法	7
2-2-2 シミュレーションモデル	9
2-3 粒子の飛行時間	10
2-4 衝突の判定	11
2-5 軌道の計算	12
第3章 直交展開サンプリングと高速電界計算	15
3-1 まえがき	15
3-2 直交関数系	16
3-3 直交多項式と直交級数展開	17
3-3-1 ルジャンドル多項式	17
3-3-2 チェビシェフ多項式	19
3-3-3 直交級数展開	21
3-4 直交展開サンプリング	22
3-4-1 LPWS 法	22
3-4-2 チェビシェフ多項式重み付きサンプリング	23
3-4-3 直交展開サンプリングの評価	23
3-4-4 LPWS の次数に対する考察	31
3-5 多次元 LPWS	40
3-6 LPWS のスプライン関数表現	43
3-7 スプライン関数を用いた高速電界計算	48
3-7-1 高速電界計算法	48
3-7-2 電界計算の評価	50

第4章 電磁界中の荷電粒子とイオンスラスタのプラズマ源	56
4-1 まえがき	56
4-2 電界と磁界による荷電粒子の運動	56
4-2-1 単一荷電粒子の電界中の運動	56
4-2-2 単一荷電粒子の磁界中の運動	58
4-2-3 単一荷電粒子の直交電磁界中の運動	60
4-2-4 任意の電界と磁界の角度における軌道計算	61
4-3 電磁界における電子のモンテカルロシミュレーション	63
4-3-1 衝突断面積	63
4-3-2 Ar ガス中の電界と磁界の成す角の違いによるプラズマ・パラメータ	66
4-3-3 Xe ガス中の電界と磁界の成す角の違いによるプラズマ・パラメータ	75
4-4 マイクロ波放電型プラズマ源のシミュレーション	84
4-4-1 マイクロ波放電型イオンスラスタ	84
4-4-2 計算体系	84
4-4-3 シミュレーション結果	86
第5章 結論	98

謝辞

# 1 章 序論

## 1-1 まえがき

近年、小型衛星の主推進・姿勢制御として従来よりも小さな宇宙用推進機の需要があり、PPT(Pulsed Plasma Thruster)や FEEP(Field Emission Electric Propulsion)などの小型電気推進機とともに小型マイクロ波放電型イオンスラスターの研究開発が進められており<sup>[1-1]</sup>、「北海道で設計され、開発され、製造される」小型衛星として注目を集めている北海道衛星一号機「大樹」にも小型マイクロ波エンジンが軌道維持用に搭載されている<sup>[1-2]</sup>。

イオンスラスターは高比推力、精密な推力制御が行え、マイクロ波放電型は放電電極を備えていないため放電電極の磨耗が無く、長寿命が期待できると同時に単純なシステム構成で信頼性の確保・向上において有利である<sup>[1-3]</sup>。長期安定性は、すでに小惑星探査機「はやぶさ (MUSES-C)」に搭載されたイオンスラスターにおいて 18,000 時間以上の耐久試験と宇宙空間での運用から実証されている。マイクロ波放電型イオンスラスターの課題として、推進性能が直流放電型に劣ることが挙げられ、性能向上のため改良がなされているが、新規に開発したスラスターの長期安定性能の確認には長い期間を要する。スラスターの安定な性能の確認は、軽微な故障であってもプロジェクト全体の失敗となり多大な損失を生むため、実用に際して慎重かつ精緻な検証が不可欠である。精密な数値シミュレーションを基に実験を進めることにより、より短い時間でも安定性能の信頼性を飛躍的に高めることができる。

主推進・姿勢制御機構の適正な制御は、スラスター内の形状を正確に考慮しマイクロ波による時間変化をともなう局所に集中した電磁界下の弱電離プラズマ生成の構造を明らかにし、起こりうる問題と性能向上のための設計指針を得ることによりなされる。プラズマ構造のシミュレーションとして、粒子モデル・流体モデルが代表的なものとして提案されており、粒子モデルによるシミュレーションでは追跡する粒子数が少ないと統計変動の影響を強く受け望む精度の解が得られにくいいため PIC 法では多数の粒子を超粒子として

代表させている<sup>[1-4]</sup>。電磁流体力学モデルにおいては、粒子の多体問題と捉え現象を近似している<sup>[1-5]</sup>。解の信頼性に大きく影響を与える要因となる境界条件に対し、境界上での適正な物理条件を設定できるモンテカルロ法を本研究では用い、精度を保つための LPWS 法<sup>[1-6]</sup>を適用することで問題となる統計変動を抑えている。また、実用レベルでは欠かせないプラズマ発生時に生ずる荷電粒子による内部電界の変化を常に考慮するため、ポアソン方程式による高速な電界計算法が必要となり、本研究ではスプライン関数表現を組み込んだ LPWS をポアソン方程式に適用することにより高速な電界計算法を提案している。

## 1-2 電気推進機の歴史と従来の研究

電気推進ロケットの歴史は古く、20 世紀初めにチオルコフスキーにより自動車の電気プラグのような電気推進機が提案されている。その後、ラッドが 1945 年の論文で電気推進が推進剤の大幅な節約につながることを発表するとともに「イオンロケット」という言葉が始めて登場した。1950 年代にアメリカ、ロシアで、1960 年代には日本でもイオンスラスターの研究が開始された。アポロ計画以来 1970 年代いっぱいには化学ロケットによるミッションが全盛だったが、商業利用が始まった 1990 年代から比推力の高さから電気推進機の利用が高まり、現在、急速に人工衛星に搭載されつつある<sup>[1-5]</sup>。

電機推進は、推力発生機構の違いにより、静電加速型のものと、電熱・電磁加速型のものがある。前者の代表的なものとしてイオンスラスターがあり、後者はアークジェットスラスター、MPD(Magneto-Plasma-Dynamic)スラスター、ホールスラスターなどがある。この中でイオンスラスターは最も比推力が高く、長期間の人工衛星の主推進及び姿勢制御に適している。イオンスラスターは、アーク放電やマイクロ波放電により推進剤を電離させプラズマを生成し、2 枚ないし 3 枚からなるグリッド電極に電圧を印加してイオンを加速する。イオンスラスターの物理過程は 3 つに大別され、プラズマ生成、イオンビーム引き出し、イオンビーム中和からなる。プラズマ生成の代表的

なものとして直流放電型、高周波誘導放電型、マイクロ波放電型がある。直流放電型には、電子及びイオン閉じ込めの磁界形状の違いからカウフマン型とカスプ磁場型に分かれ、推進性能に関して言えばすでに実用的な域に達している。しかし、スラスタの長期耐久性、システムの信頼性といった側面から見ると問題点がある。一つは、放電室内のホローカソードと呼ばれる特殊な陰極の損耗や、陰極付近での放電室壁損耗。もう一つはホローカソード作動のために複数の電源を必要とする、始動まで時間がかかるという構造及びシステムの複雑化が挙げられる。イオンスラスタの高比推力は長期ミッションで最大の真価を発揮するため、この問題は無視できない。

マイクロ波放電型は無電極放電によりプラズマ生成を行うので長期耐久性の向上及びシステムの簡略化が可能で、近年、実験・シミュレーションによる研究が進み人工衛星に搭載されつつある。マイクロ波放電型イオンスラスタ搭載の衛星としては、宇宙航空研究開発機構の MUSES-C 計画における探査衛星「はやぶさ」や<sup>[1-7]</sup>、北海道衛星株式会社の北海道衛星一号機「大樹」がある<sup>[1-2]</sup>。実験においては、國中が ECR 放電によるイオン源の分析から効率的なプラズマ発生には  $\nabla B \times B$  ドリフトのために磁場トラックが無限軌道を構成する必要があるという知見を得ている<sup>[1-8]</sup>。中山らは、MUSES-C に搭載された  $\mu 10$  イオンエンジンの中和器を原型とした小型マイクロ波放電型エンジンの実験評価を行い小型衛星の主推進・姿勢制御に搭載する性能があることを確認している<sup>[1-1]</sup>。シミュレーションにおいては、平川らが放電室内の ECR によるプラズマ構造解析として計算領域を三角要素に分割した粒子モデルにより行っている<sup>[1-3]</sup>。Masui らは PIC 法に FDTD 法によるマイクロ波解析をカップリングしたシミュレーションを行っている<sup>[1-9]</sup>。

### 1-3 論文の構成

本論文では、イオンスラスタにおける弱電離プラズマの構造解析のために、モンテカルロ法による精緻な境界条件の取り扱いと LPWS による統計変動を抑えたサンプリングを行いシミュレーションの精度向上を図る。さらに、

常に変化する内部電界の影響を考慮するため、LPWS にスプライン関数表現を組み込み、スプライン関数とポアソン方程式の線形性を利用する高速電界計算法を示す。

本論文は 5 つの章からなり、各章の概要は以下の通りである。

第 1 章は序論で、本論文の背景、電気推進機とその中の一つであるイオンスラスタについて歴史と実験・シミュレーションに関する従来の研究、本論文の目的と各章の構成について述べている。

第 2 章においては、モンテカルロ法によるプラズマ・シミュレーションの方法について述べている。イオンスラスタにおいて、効率の良いイオン生成を実現する設計のために弱電離プラズマの構造を把握することが重要である。イオンスラスタでは、電界及び永久磁石から形成される磁界が組み合わさった複雑な体系であるため、プラズマの精緻な制御が必要とされ、プラズマの構造を決定づける粒子レベルの運動、反応過程を理解することが重要となり、本シミュレーションモデルの説明、電子の飛行時間の決定方法、Null Collision 法を用いた衝突判定方法および電子の散乱に関する計算として軌道の計算方法について述べている。

第 3 章においては、サンプリング法と高速電界計算法について述べる。プラズマ解析のモンテカルロシミュレーションは、従来、統計変動を抑えるために試行回数を増やさなければならず、計算時間およびメモリの消費量が大きくなり計算が困難とされているとともに、より詳細なシミュレーションが求められており、計算時間の減少と計算精度の向上が求められる。サンプリング時の粒子数による統計変動を抑えることで、計算時間の減少とサンプリング精度の向上のために Ventzek らが提案している詳細なサンプリング方法である LPWS 法の適用方法を示している。LPWS 法は、少ないサンプリング個数でもルジャンドル多項式により重み付けサンプリングすることで、ルジャンドル直交展開の形式により分布関数が得られ、従来から問題とされていた計算時間を減少させ、詳細なシミュレーションが可能であることを示している。またルジャンドル多項式以外の直交系をなす多項式においても同様に

サンプリングが可能であり、LPWSをより一般化した形として直交展開サンプリングについて述べる。さらに、常に変化する内部電界を考慮したシミュレーションのために、LPWSのスプライン関数表現とスプライン関数とポアソン方程式の線形性により高速に電界を計算する方法について述べる。

第4章においては、電磁界中の粒子運動とマイクロ波放電型イオンスラスタのシミュレーションを行った。磁界を考慮したプラズマ現象を明らかにするために必要とされる電界と磁界が任意の角度で交差する場でのシミュレーションを、特にイオンスラスタの推進剤に用いられることが多い Ar、Xe ガスについて行い、シミュレーション結果となる荷電粒子の輸送パラメータとして、0~90度に至るまでの  $x, y, z$  軸方向の平均速度、平均エネルギー、平均衝突周波数および LPWS 法を用い、エネルギー分布について考察した。また、マイクロ波放電型イオンスラスタのプラズマ生成シミュレーションを行った。マイクロ波による電磁界と永久磁石による磁界が時間変化を伴い複雑に交差する場での弱電離プラズマシミュレーションを行いその結果について報告を行った。

第5章は結論であり各章のまとめを行った。



参考文献

- [1-1]中山宜典,船木一幸、國中均,中島秀紀,“小型マイクロ波イオン推進機の実験的評価”,日本航空宇宙学会論文集,53,461(2005)
- [1-2]北海道衛星「大樹」web site, <http://www.hokkaido-sat.jp/>
- [1-3]平山美晴,荒川義博,“粒子モデルを用いた電気推進機プラズマのシミュレーション”,日本航空宇宙学会論文集,45,444(1997)
- [1-4]平山美晴,中北正人,“マイクロ波放電型イオンスラスタにおける電子サイクロトロン共鳴のシミュレーション”,日本航空宇宙学会論文集,47,267(1999)
- [1-5]栗木恭一,荒川義博,電気推進ロケット入門,東京大学出版(2003)
- [1-6]P. L. G. Ventzek and K. Kitamori: “Higher-order sampling strategies in Monte Carlo simulations of electron energy distribution functions in plasmas”, J. Appl. Phys., Vol.75, pp.3785-3788 (1994)
- [1-7]Hayabusa official site, <http://www.muses-c.isas.ac.jp/>
- [1-8]國中均,“無電極マイクロ波イオンスラスタの研究・開発”,日本航空宇宙学会誌, 46, 174(1998)
- [1-9]Hirokazu Masui, Takeki Tanoue, Hideki Nakashima, Ikkoh Funaki, “Numerical analysis of microwave ion engine using electromagnetic particle code” Thin Solid Films 506-507 609-612 (2006)

## 2章 計算手法

### 2-1 まえがき

モンテカルロシミュレーションは、乱数を用い確率事象を取り扱うシミュレーション技法の総称である。乱数とはある指定された確率分布をもつ数列であるが、乱数の利用がほとんどの電子計算機で行われる現在、乱数は算術的に計算機内部で随時発生させる疑似乱数を意味する。モンテカルロ法が対象とする問題は、確率的事象と確率的要素を含まない決定論的事象とからなる。決定論的事象は、確率とは無関係であっても問題となる方程式に確率事象を見出せれば、モンテカルロ法で数値的に解くことが可能となる。モンテカルロシミュレーションは、現象の素過程を支配する確率法則が既知であると仮定できるとき、これら素過程をあたかも実際に生起しているかのように計算機で試行させ、全体の挙動を調べる方法である。

本章では、モンテカルロ法によるシミュレーションとして、マイクロ波イオンスラスタのプラズマ源を対象とし、個々に荷電粒子を扱う粒子モデルについてシミュレーション方法を述べる。本シミュレーションにおいては、ガス分子と荷電粒子の衝突が存在することを確率現象として取り扱って計算を行い、荷電粒子の飛行時間、軌道計算および衝突判定方法について述べる。

### 2-2 モンテカルロ法によるシミュレーション

#### 2-2-1 シミュレーション方法

モンテカルロ法によりプラズマ生成と構造を取り扱う場合、位置空間三次元と速度空間三次元の計六次元を扱うことができ、境界条件の取り扱いに優れているため、他のシミュレーション方法に比べ仮定が少なく、より詳細に物理現象を扱うことができる。しかし、電子を個々に追跡することとなるため膨大な計算時間を要し、少ない試行回数では統計変動の影響を受け正確な解を求めることが困難となる。さらに、電離により指数関数的に電子およびイオンが増加するため、追跡粒子数が増しさらに膨大な計算時間を要するこ

ととなる。本論文で取り扱うプラズマ生成のシミュレーションに関し、全体の流れを以下に示す。

シミュレーションにおいては、一つずつ電子の振る舞いを追跡することとなり、一つの電子に対し、図 2-1 に示すように

- 1) 粒子の配置
- 2) 電子がガス分子に衝突するまでの時間となる飛行時間の決定
- 3) 現在時刻から飛行時間までの電子の軌道計算
- 4) 3) に関わる時間における電磁界の計算
- 5) 飛行後の衝突種類の判定

を行い、これをシミュレーションの終了時刻まで繰り返す。また、サンプリングは任意の時間に随時行えるようになっており、複数回のサンプリング時刻に、電子の挙動をサンプリングしている。

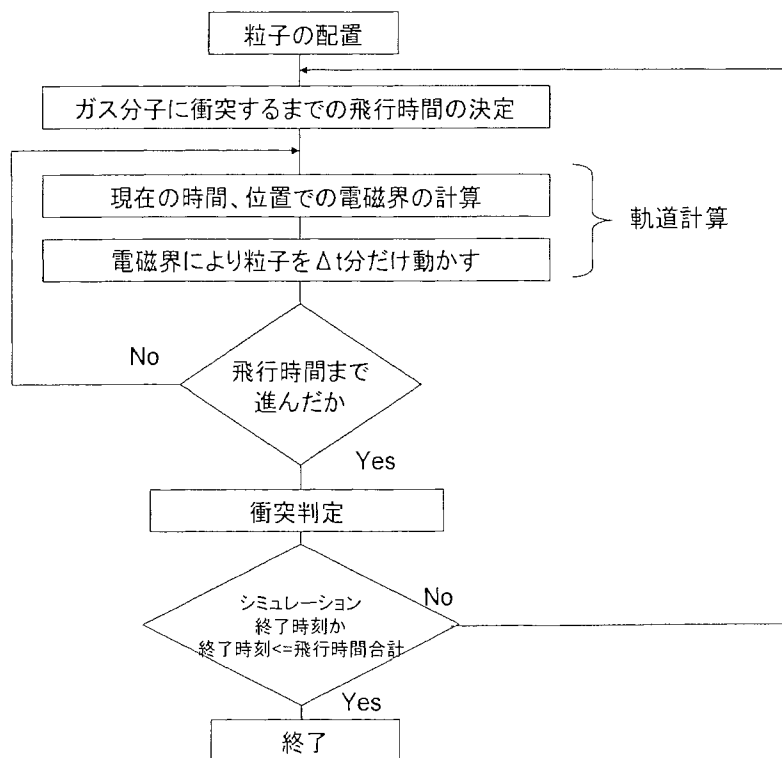


図 2-1 1 粒子に対する計算の流れ。

## 2-2-2 シミュレーションモデル

本論文で開発したシミュレーション物理モデルを UML(Unified Modeling Language) にて図 2-2 に示す。UML はオブジェクト指向におけるクラスやオブジェクトの関連性を示すモデリング法である。クラスとは、データと機能を一対として併せ持つものである。本シミュレーションは simMain から駆動される。

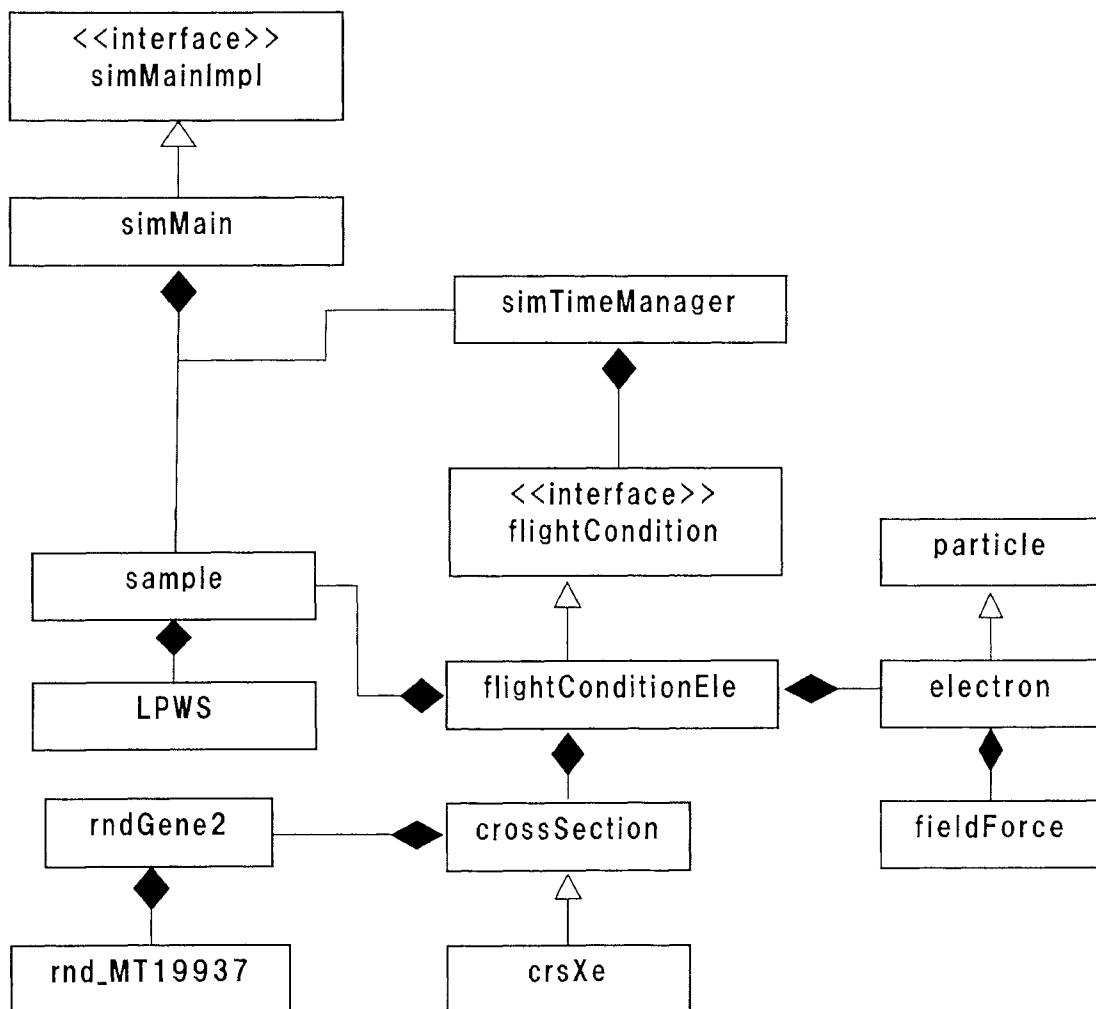


図 2-2 シミュレーションクラス図

本論文におけるシミュレーションはモンテカルロ法により電磁界における荷電粒子の運動を扱うものであり、電磁界から荷電粒子が受ける力を扱う `fieldForce`、粒子を表す `particle`、`particle` を継承し電子およびその移動を扱う `electron`、衝突断面積を計算する `crossSection`、キセノンガス断面積の `crsXe`、サンプリングを行う `sample`、LPWS 法の実装である LPWS、これらを管理する `flightConditionEle` およびそのインターフェースとなる `flightCondition`、シミュレーション中の時間に関わる事項を統括管理する `simTimeManager` および、乱数発生器となる `rnd_MT19937`、`rndGene2` から構成される。`flightCondition` インターフェースは、電子だけではなくイオンを取り扱うようにモデルが変更されたとき、容易に拡張可能となるため採用されている。また、シミュレーションの対象となるガスが変更されたときには、`crsXe` を変更する仕組みとなっており、オブジェクト指向設計が活かされている。`rnd_MT19937` は Matsumoto and Nishimura<sup>[2-1]</sup>により開発された Mersenne Twister を採用しており、乱数発生に関し長周期性、高速性および再現性に優れている。

### 2-3 粒子の飛行時間

モンテカルロシミュレーションにおいて試行される荷電粒子の挙動として、まず初めに飛行時間、すなわち、荷電粒子とガス分子が衝突するまでの時間を決定する。荷電粒子は衝突から衝突の間（飛行時間内）に電界からエネルギーを得ながらその位置を変化させていく。飛行時間の終わりに衝突することとなり、弾性、励起、電離、付着、解離のいずれかの衝突を起こし、位置を変化させずにエネルギー損失が起こるものとする。

密度  $N$  の気体中を速度  $v$  で飛行する電子は、衝突断面積を  $q(v)$  として、微小時間  $\Delta t$  間で、 $Nvq(v)\Delta t$  の衝突確率をとる。衝突確率は衝突周波数を  $f=Nvq(v)$  とすると、 $f\Delta t$  として表せる。時刻  $t$  までに衝突しない確率は時刻  $t$  までに少なくとも 1 回は衝突する確率を  $P(t)$  とすると、 $1-P(t)$  で表され、飛行時間が時刻  $t$  と  $t+\Delta t$  間となる確率は、 $(1-P(t))f\Delta t$  となる。確率  $P(t+\Delta t)$  は、確率  $P(t)$  との確率

$(1-P(t))f\Delta t$ の和で表され、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすることにより、微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} P(t + \Delta t) &= P(t) + (1-P)f\Delta t \\ P(t) &= 1 - \exp\left(-\int_0^t f dt'\right) \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

$P(0)=0$ を与えると、飛行時間 $t$ の確率密度 $p(t)$ を得ることができる。

$$p(t) = f \exp\left(-\int_0^t f dt'\right) \quad (2-6)$$

式(2-6)を積分することで、飛行時間確率密度 $p(t)$ となる飛行時間 $t$ を決定でき、式(2-5)と同形となる。確率 $P(t)$ は、0から1までの値を取り、これに一様乱数 $\xi$ を対応させることで $t$ が求まるが、このとき新たに仮想の衝突断面積を加え、 $f$ を一定値とすることが可能となり次式、

$$t = -\ln(1-\xi)/f \quad (2-7)$$

として粒子の飛行時間 $t$ が求められる。この仮想衝突を無効衝突と呼び、この方法をNull-Collision法[2-2]と呼んでいる。Null-Collision法については2-4にて後述する。

飛行時間の決定時に現在時間と飛行時間の和となる時間がシミュレーション時間を超えていた場合、粒子の追跡は終了する。また、現在時間と飛行時間を足した時間がサンプル時間を超えていた場合は、サンプル時間までの粒子の軌道を計算し、サンプルを行い、残りの時間の軌道計算後に衝突判定を行う。

## 2-4 衝突の判定

電子とガス分子との衝突は、電子のエネルギーおよびガスの種類により異なる。衝突の判定は、エネルギーの関数となるガス分子が持つ衝突断面積を用い、衝突断面積の値が大きければ衝突しやすく、衝突断面積の値が小さければ衝突し難い。本シミュレーションにおける衝突判定は、Null-Collision

法により行われる。Null-Collision法はガス分子が持つ衝突断面積から衝突周波数を求め、乱数を用いて衝突の種類を判定する手法である。式(2-7)は仮想の衝突断面積を加えることにより得られたが、仮想の断面積を含め $f$ を一定値とすることでエネルギーに依らず無効衝突を含む衝突が必ず起こると考えることができるため、効率よく衝突判定が行えるのがNull Collision法の特徴である。

0 から 1 までの一様乱数を $\xi$ 、ガス分子が持つ衝突周波数を $f_i$ 、無効衝突を加えた各衝突周波数の合計を $f_{max}$ 、電子のエネルギーを $\varepsilon$ とすると電子の衝突判定は以下の式で行える。

$$\xi \leq f_1(\varepsilon) / f_{max} \quad (\text{衝突 1})$$

$$f_1(\varepsilon) / f_{max} < \xi \leq [f_1(\varepsilon) + f_2(\varepsilon)] / f_{max} \quad (\text{衝突 2})$$

...

$$\sum_{j=1,N} f_j(\varepsilon) / f_{max} < \xi \quad (\text{無効衝突}) \quad (2-8)$$

無効衝突が選択されたとき、飛行時間に衝突が起こらなかったこととなり、運動は変化しない。

## 2-5 軌道の計算

飛行時間が決定され衝突判定後、無効衝突以外のときは電子の散乱方向を決定する電子のエネルギー損失が生じる場合エネルギーの再計算を行い、それに伴い速度を

$$v = \sqrt{\varepsilon \frac{2e}{M_e}} \quad (2-9)$$

として求める。ここで、 $\varepsilon$ はエネルギー損失後の電子のエネルギー、 $e$ は電荷 ( $1.6021892 \times 10^{-19} \text{C}$ )、 $M_e$ は電子の質量 ( $9.109534 \times 10^{-31} \text{kg}$ ) である。

電子の散乱は

$$\cos \theta = 1 - 2\xi_1 \quad (2-10)$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - (\cos \theta)^2} \quad (2-11)$$

$$\cos \phi = \cos(2\pi\xi_2) \quad (2-12)$$

$$\sin \phi = \sin(2\pi\xi_2) \quad (2-13)$$

により方向が決定される。ここで、 $\xi_1, \xi_2$ は0から1までの一様乱数である。  
また、散乱後の各方向の速度ベクトルは、

$$v_x = v \cos \theta \quad (2-14)$$

$$v_y = v \sin \theta \cos \phi \quad (2-15)$$

$$v_z = v \sin \theta \sin \phi \quad (2-16)$$

により求まる。



参考文献

[2-1]M. Matsumoto and T. Nishimura: ACM Trans. on Modeling and  
Computer Simulation. 8(1998) pp.3.

[2-2]E. Kawamura, C. K. Birdsall and V. Vahedi: Plasma Sources Sci.  
Technol. 9 (2000) pp.413.

## 3章 直交展開サンプリングと高速電界計算法

### 3-1 まえがき

モンテカルロ法によるプラズマシミュレーションでは、従来、統計変動を抑えるために試行回数を増やさなければならず、さらに初期の追跡粒子の他に、電離による追跡粒子の指数関数的増加が起こり、計算時間およびメモリの消費量が大きくなり計算が困難とされ、計算時間を抑えるための方法が提案されている。少ないサンプル個数でも詳細な分布が得られる方法として、Ventzek and Kitamori が提案しているサンプリング方法である Legendre Polynomial Weighted Sampling<sup>[3-1]</sup>(以下 LPWS と記す)がある。得られる分布に対してルジャンドル多項式を用いた重み付けを行いサンプルすることで、ルジャンドル多項式の次数に応じ区間内の接線の傾きや凹凸などの情報が得られる。この方法を用いることで少ないサンプル個数でも分布を関数として表し、現象を把握することができる。LPWS 法は佐藤ら<sup>[3-2]</sup>により 2 次元、3 次元へ拡張されている。また、堀江により多次元 LPWS の方法が示された<sup>[3-3]</sup>。LPWS はルジャンドル多項式の直交性を用いたサンプリング法であるが、他の有限区間で定義される直交多項式系に関しても同様にサンプリングが可能で直交展開サンプリングと呼ぶ。

プラズマプロセスシミュレーションにおいて、初期は主に外部電界が荷電粒子の運動を支配するが、電離により電子・イオンからなる内部電荷密度が高くなると、内部電界が無視できなくなり、実用的なシミュレーションの場合にはタイムステップごとにポアソン方程式を解き内部電界を考慮する必要がある。堀江らのプラズマプロセスシミュレーションから得られた知見として精緻な境界条件の適用により、両極の高電界のシース部を通過する電子に与える電離に寄与するエネルギー量の計算が不安定の要因となると予見されており、安定な計算のためには電界一定とするタイムステップをさらに分割し短くする必要がある、計算コストを非常に増加させる。イオンスラスタ放電室内においても放電室壁面にシースが形成されるため短いタイムステッ

ごとに内部電界を計算する必要がある。本章では、区間ごとの直交展開サンプリングから得られた展開係数の情報をもとにスプライン関数表現し密度関数の精度を上げる一方、これらにより表現されたスプライン関数の特性とポアソン方程式の線形性を生かした高速電界計算法を提案する。

### 3-2 直交関数系

区間  $[a,b]$  で定義される関数  $f(x), g(x)$  に対して、

$$\int_a^b r(x)f(x)g(x)dx = 0 \quad ([a,b] \text{ で } r(x) \geq 0) \quad (3-1)$$

が成り立つとき、 $f(x)$  と  $g(x)$  は重み  $r(x)$  で直交するという。いま、 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  なる関数列が  $[a,b]$  で定義されていてこれらのどの 2 つをとっても直交するとき、すなわち

$$\int_a^b r(x)f_i(x)f_j(x)dx = 0 \quad (i \neq j) \quad (3-2)$$

であるとき、この関数列は重み  $r(x)$  の直交関数系であるという。

さらに、式 3-1 で  $f(x) = g(x)$  のとき

$$\int_a^b r(x)f^2(x)dx \geq 0 \quad (3-3)$$

であり、その平方根

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b r(x)f^2(x)dx} \quad (3-4)$$

を  $f(x)$  のノルムという。ノルム  $\|f\|$  は明らかに定数である。

区間  $[a,b]$  で重みの直交関数系を  $\{f_i(x)\}$  ( $i=1 \sim n$ ) とすれば

$$\varphi_i(x) = \frac{f_i(x)}{\|f_i\|} \quad (3-5)$$

で定義される関数列  $\{\varphi_i(x)\}$  ( $i=1 \sim n$ ) は、ノルムがすべて 1 の直交関数系である。

式 3-5 のように、ノルムを 1 にすることを正規化するといい、直交関数系

$\{f_i(x)\}$  を正規化して得られる関数  $\{\varphi_i(x)\}$  を正規直交関数系という。

したがって、正規直交関数系  $\{\varphi_i(x)\}$  では

$$\int_a^b r(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (3-6)$$

となる。ここで  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。

### 3-3 直交多項式と直交級数展開

#### 3-3-1 ルジャンドル多項式

ルジャンドルの微分方程式は

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (3-7)$$

であり、この方程式の解は  $n$  次のルジャンドル関数という。 $n = 0, 1, 2, \dots$  のとき、式 3-7 の解はロドリゲの公式で与えられるルジャンドル多項式  $P_n(x)$  となる。

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3-8)$$

ここで、いくつかのルジャンドル多項式をあげると

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$$

となり、次のグラフで表わされる(図 3-1)。

このルジャンドル多項式に対する漸化式は次のように与えられる。

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (3-9)$$

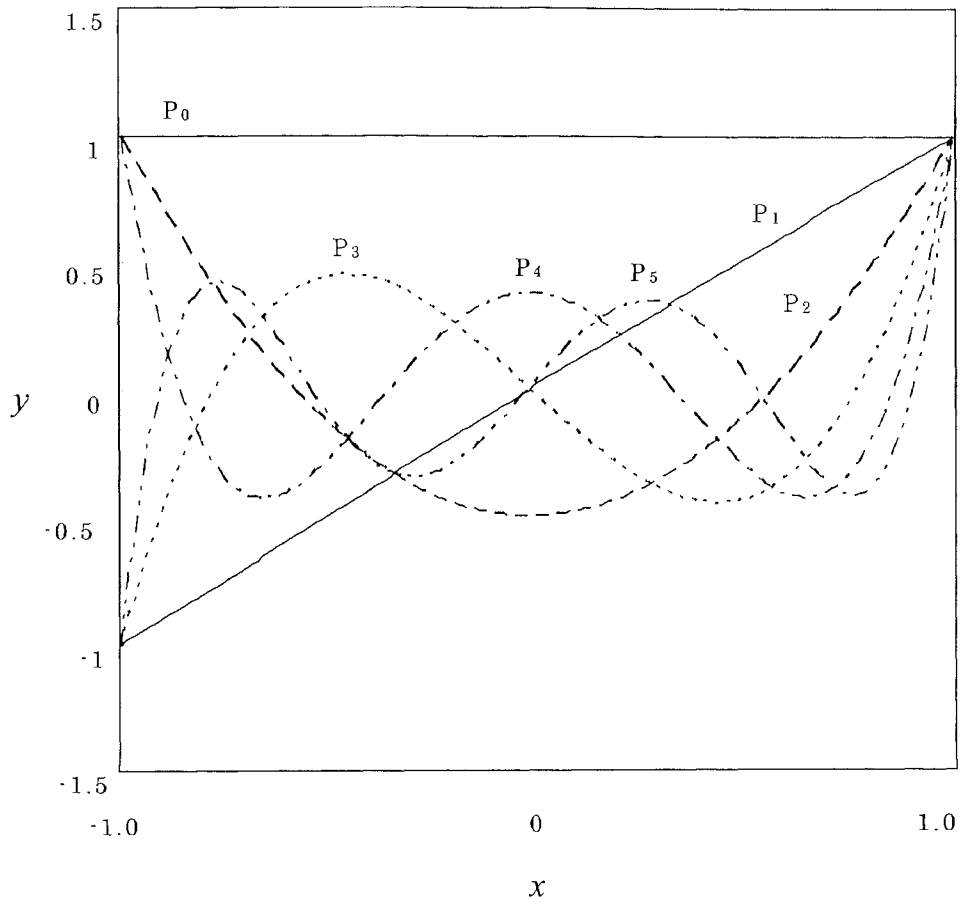


図 3-1 5次までのルジャンドル多項式

また、ルジャンドル多項式  $P_n(x)$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) は、区間  $[-1,1]$  において重み 1 の直交関数系であり、次の直交関係式が成り立つ。

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (3-10)$$

$$\int_{-1}^1 \{P_n(x)\}^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (3-11)$$

### 3-3-2 チェビシエフ多項式

チェビシエフの微分方程式は

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \quad (3-12)$$

$n=0,1,2,\dots$  のとき、式 3-12 の解は次式で与えられるチェビシエフ多項式  $T_n(x)$  となる。

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2} (1-x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4} (1-x^2)^2 - \dots \quad (3-13)$$

いくつかのチェビシエフ多項式をあげると

$$\begin{array}{ll} T_0(x) = 1 & T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 & T_3(x) = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 & T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 & T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \end{array}$$

となり、次のグラフで表わされる(図 3-2)。

このチェビシエフ多項式に対する漸化式は次のように与えられる。

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad (3-14)$$

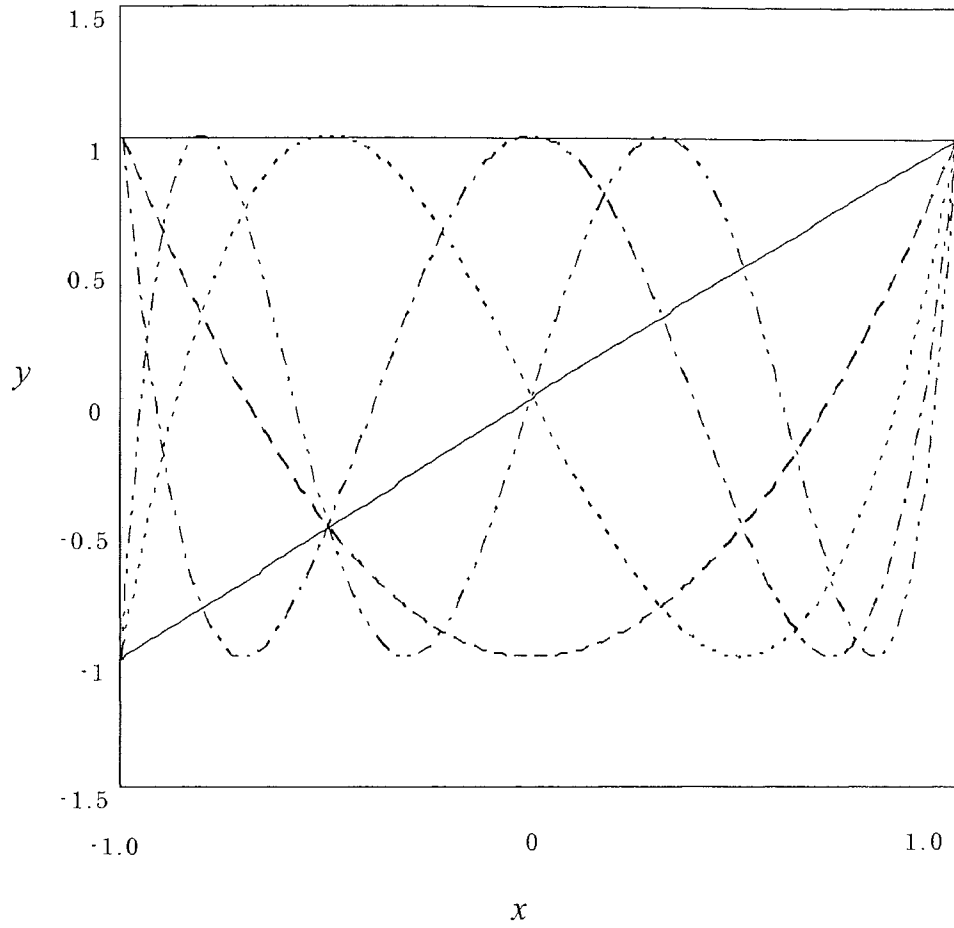


図 3-2 5 次までのチェビシェフ多項式

また、チェビシエフ多項式  $T_n(x)$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) は、区間  $[-1,1]$  において重み

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  の直交関数系であり、次の直交関係式が成り立つ。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (3-15)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \{T_n(x)\}^2 dx = \begin{cases} \pi & (n=0) \\ \pi/2 & (n \neq 0) \end{cases} \quad (3-16)$$

### 3-3-3 直交級数展開

区間  $[a,b]$  で関数列  $\{f_n(x)\}$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) が重み  $r(x)$  の直交関数系をなすとき、級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n f_n(x) \quad (3-17)$$

を直交級数という。いま、この級数が区間  $[a,b]$  で一様収束して関数  $F(x)$  になるとき、すなわち

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n f_n(x) \quad (3-18)$$

の場合、両辺に  $r(x)f_m(x)$  を乗じ、項別に積分すれば

$$\int_a^b r(x) f_m(x) F(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_a^b r(x) f_m(x) f_n(x) dx \quad (3-19)$$

となり、

$$\int_a^b r(x) f_m(x) f_n(x) dx = 0 \quad (3-20)$$

$$\int_a^b r(x) f_n^2(x) dx > 0 \quad (3-21)$$

であるから、式 3-19 は

$$\int_a^b r(x) f_n(x) F(x) dx = A_n \int_a^b r(x) f_n^2(x) dx \quad (3-22)$$



である。したがって係数  $A_n$  は

$$A_n = \frac{\int_a^b r(x) f_n(x) F(x) dx}{\int_a^b r(x) f_n^2(x) dx} \quad (3-23)$$

になる。この  $A_n$  を  $F(x)$  の  $\{f_n(x)\}$  に対する展開係数あるいはフーリエ係数と呼び、任意の関数  $F(x)$  を直交級数で表すことを直交級数展開という。

与えられた関数  $f(x)$  を直交多項式で展開するときの展開係数は次のようになる [3-4]

- ルジャンドル多項式  $P_n(x)$  による展開

$$f(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + A_2 P_2(x) + \dots \quad (3-24)$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad (3-25)$$

- チェビシエフ多項式  $T_n(x)$  による展開

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 T_0(x) + A_1 T_1(x) + A_2 T_2(x) + \dots \quad (3-26)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (3-27)$$

### 3-4 直交展開サンプリング

#### 3-4-1 LPWS 法

LPWS(Legendre Polynomial Weighted Sampling : ルジャンドル多項式重み付きサンプリング)は、分布関数をルジャンドル多項式により直交級数展開した形式でサンプリング結果を得ることができる。展開時の係数を求めることで分布関数の高さ、傾き、凹凸などを知ることができる。ルジャンドルの直交級数展開は式(3-24)で示される。個々の  $P_n(x)$  は漸化式(3-9)によって求めることが容易であり、係数  $A_n$  については式(3-25)から求めることができる。 $A_n$  について分布関数  $f(x)$  が未知の場合には、次数  $n$  において重み  $P_n(x_i)$  でサンプルした総和より次式で表すことができる。

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k P_n(x_i) \quad (3-28)$$

### 3-4-2 チェビシエフ多項式重み付きサンプリング

これまで、直交展開サンプリングはルジャンドル多項式による LPWS のみ行われていた。有限領域を対象とした直交多項式としてチェビシエフ多項式が知られており、ルジャンドル多項式と同様にサンプリングが可能である。チェビシエフの直交級数展開は式(3-26)で示され、係数  $A_n$  は次の式で表すことができる。

$$A_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x_i) \quad (3-29)$$

この方法をチェビシエフ多項式重み付きサンプリング (Chebyshev Polynomial Weighted Sampling : CPWS) と呼ぶ。

### 3-4-3 直交展開サンプリングの評価

直交展開サンプリング時に用いる直交多項式系について LPWS と CPWS それぞれの結果を調べた。既知の関数(3-30)、(3-31)、(3-32)、(3-33)に従った乱数を発生させ、それぞれ 5 次の項まで考慮したサンプリングを行い結果としてグラフと得られた直交展開時の係数を示す。また既知の関数(3-32),(3-34)式について同様にサンプリングを行い理論値との誤差を数値化しサンプリング個数における差異を調べた結果について述べる。

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (3-30)$$

$$y = \frac{3}{2}x^2 \quad (3-31)$$

$$y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} \quad (3-32)$$

$$y = \frac{5}{2}x^4 \quad (3-33)$$

$$y = e^x \quad (3-34)$$

図 3-3 に(3-30)式について乱数を発生させサンプリングした結果について示す。サンプル数 1000 個の場合は LPWS、CPWS 共に若干理論値との差異がある。10000 個では LPWS は、ほぼ理論値と一致する。CPWS は右の端において誤差が大きい。表 3-1 に示される係数は LPWS の方がよく一致していることがわかる。CPWS は 0 次、1 次の項が共に LPWS に比べ誤差が見受けられる。

図 3-4 に(3-31)式について乱数を発生させサンプリングした結果について示す。サンプル数 1000 個の場合は LPWS、CPWS とともに理論値との差異が認められる。特に左端において顕著である。10000 個の場合は LPWS、CPWS 共によく理論値と一致しているが、CPWS において両端に若干の誤差が確認された。表 3-2 に示される係数は CPWS の 3 次と 5 次の項の収束が悪く、この影響が両端に出たものと考えられる。

図 3-5 に式(3-32)式について乱数を発生しサンプリングした結果を示す。サンプル数 1000 個では LPWS、CPWS 共に中央付近で誤差が大きい。サンプル数 10000 個で LPWS は理論値とよく一致した。CPWS は右端に若干、理論値との差異が確認された。表 3-3 に示した係数は、LPWS の 5 次の項の収束が悪い。しかし、サンプリング結果としての誤差が小さいのは、他の項の誤差と打ち消しあっているものと考えられる。

図 3-6 に(3-33)式について乱数を発生させサンプリングした結果を示す。サンプル数 1000 個においては LPWS、CPWS とともに理論値との差異が見られ、特に左端が顕著である。10000 個においては LPWS、CPWS 共に理論値とよく一致している。表 3-4 に示す係数は、LPWS は 1 次の項について理論値との差が大きい。図 3-6 に示した 10000 個時の理論値との差に一定の傾きが見られるのはこのためと考えられる。CPWS は 3 次と 5 次の項の収束が悪い。式(3-31)についても同様の傾向があることから対象が偶関数の場合にこ

のような傾向を示すと考えられる。

(3-34)式に従う区間[0,6]の乱数 1000 個に LPWS, CPWS を行った結果を図 3-7 に示す。理論値である(3-34)式と若干の差が確認される一方, LPWS と CPWS の結果はほぼ重なっている。表 3-5 に(3-32)式に従う区間[-1,1]の乱数に 3 次の項まで考慮した LPWS, CPWS を乱数の個数 1000, 10000, 100000, 1000000 のときに対して行い, 理論値との誤差を示す。誤差は乱数を発生させた区間を 100 等分した点における理論値  $y_l$ , サンプル結果  $y'_l$  とし次式により計算した。

$$error[\%] = \sum_{l=1}^{100} \frac{|y_l - y'_l|}{y_l} \quad (3-35)$$

試行ごとにバラツキがあるため 10 回試行し平均した結果を記載した。3 次関数であるため乱数 1000 個程度でも大きな誤差は無い。また乱数 10000 個を超えると LPWS, CPWS 共に誤差 2%程度となり, 高い精度でサンプリングを可能としている。またサンプリング数の増大に伴って, LPWS の方が若干だが CPWS より精度が良くなる。

表 3-6 は, (3-34)式に従う区間[0,6]の乱数を 10 次の項まで考慮した LPWS, CPWS を行い, 誤差を示した。乱数 1000 個では, LPWS 及び CPWS も 10% 以上の誤差がある。LPWS, CPWS 共に乱数 1000000 個以上では, かなり誤差が小さくなる。(3-32)式の分布に対する検証と同様に若干ではあるが LPWS のほうが誤差の小さい傾向がある。

LPWS と CPWS それぞれでサンプリングを行い, 性能を比較した。全体を通して大きな差異は認められないものの, 若干 LPWS の精度が良いことから本論文では以降は直交展開サンプリングとして LPWS を用いる。

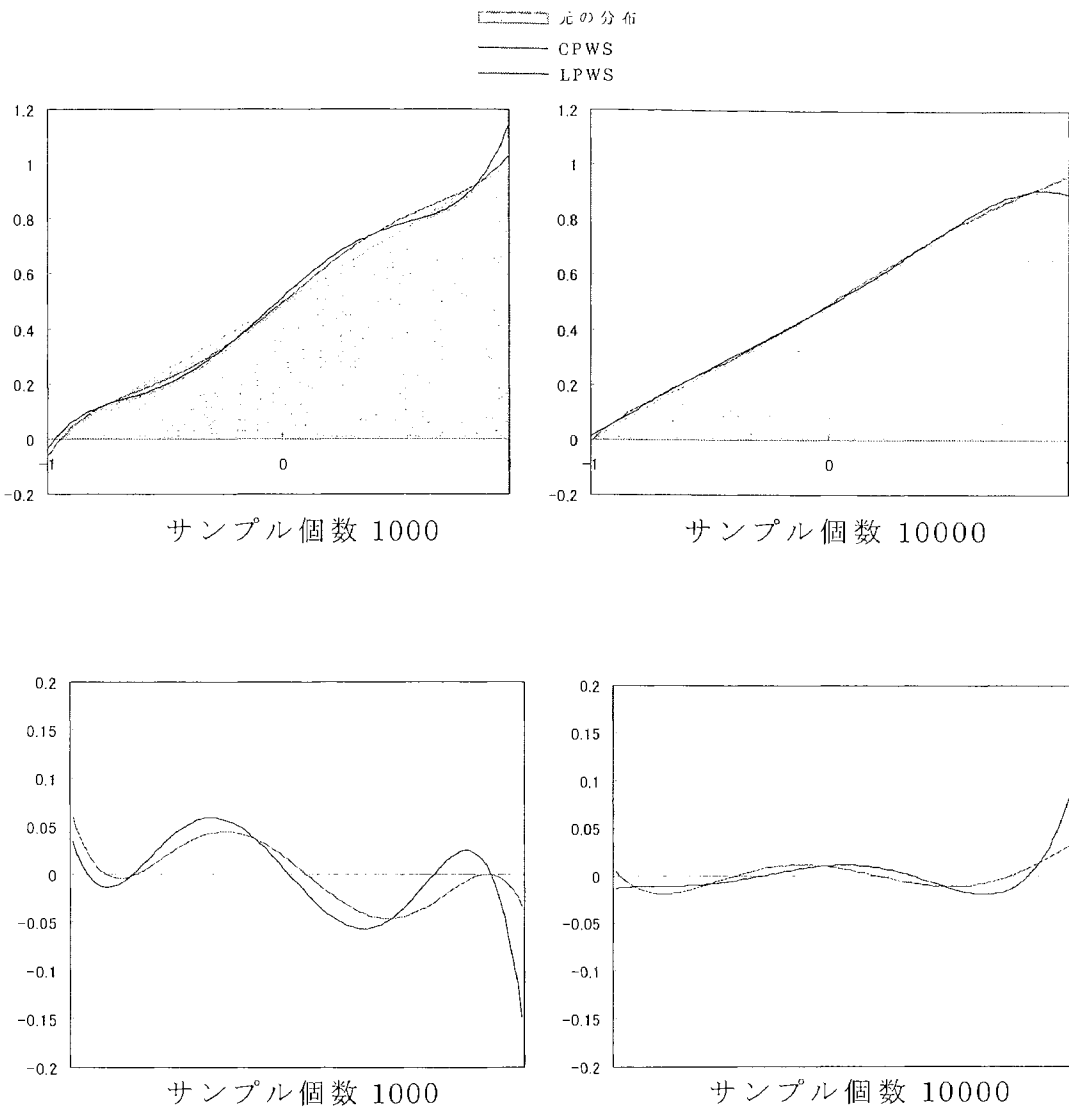


図 3-3 (3-41)式を対象としたサンプリング結果(上段)と差(下段)

表 3-1

	LPWS の理論値と結果		CPWS の理論値と結果	
	理論値	結果	理論値	結果
$A_0$	0.5	0.5	1	0.98331
$A_1$	0.5	0.49061	0.5	0.47168
$A_2$	0	-0.0007	0	-0.01732
$A_3$	0	-0.01939	0	-0.02323
$A_4$	0	-0.02067	0	-0.0208
$A_5$	0	0.01301	0	-0.00804

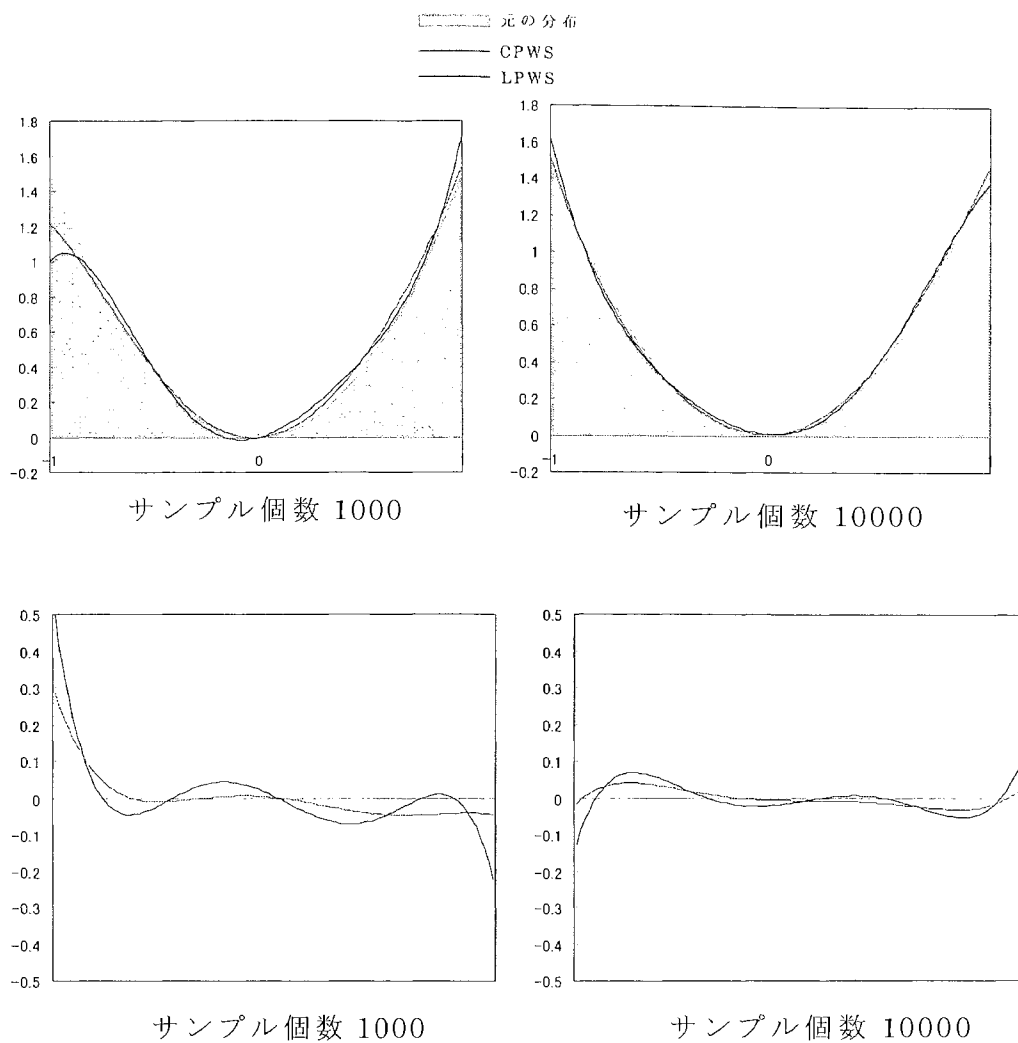


図 3-4 (3-42)式を対象としたサンプリング結果(上段)と差(下段)

表 3-2

	LPWS の理論値 と結果		CPWS の理論値 と結果	
	理論値	結果	理論値	結果
$A_0$	0.5	0.5	1.5	1.4978
$A_1$	0	0.029	0	-0.0195
$A_2$	1	0.9885	0.75	0.7455
$A_3$	0	-0.0224	0	-0.0556
$A_4$	0	0.0031	0	0.0068
$A_5$	0	-0.0309	0	-0.0492

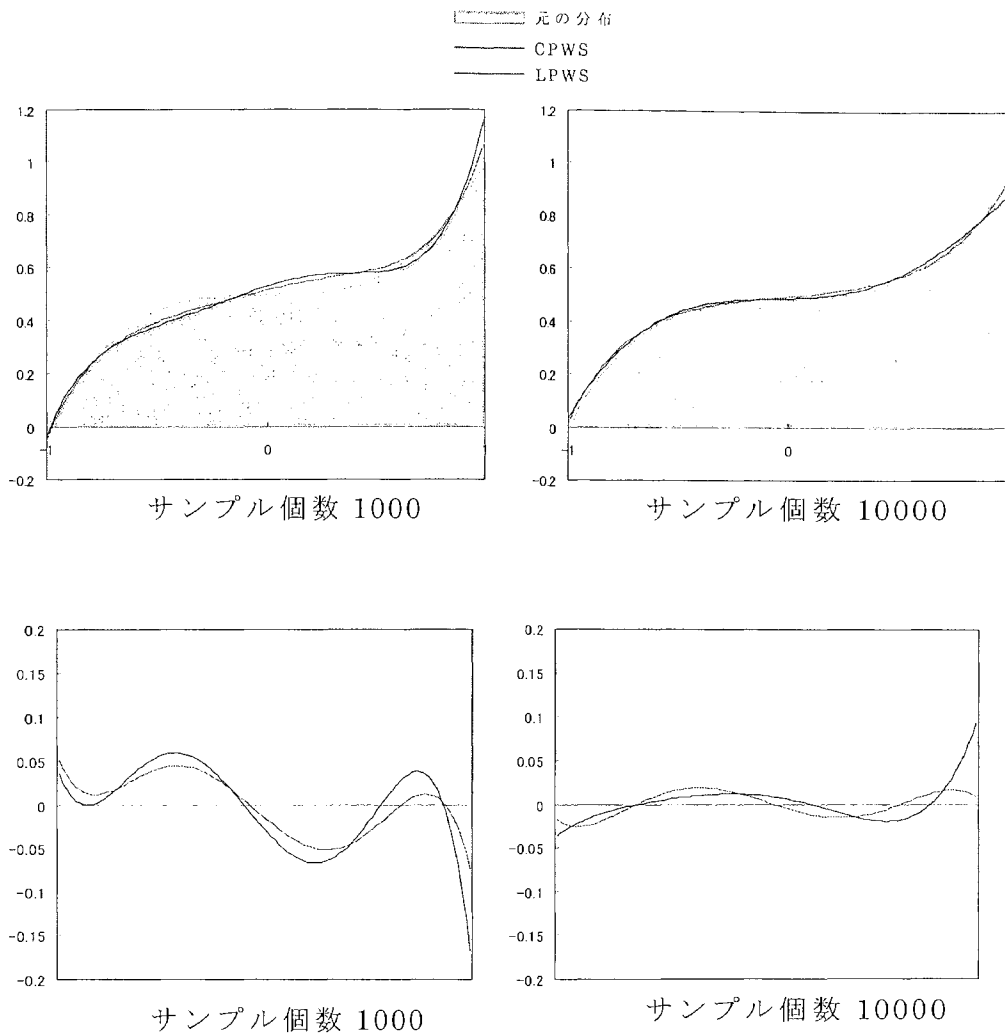


図 3-5 (3-43)式を対象としたサンプリング結果(上段)と差(下段)

表 3-3

	LPWS の理論値 と結果		CPWS の理論値と 結果	
A <sub>0</sub>	0.5	0.5	1	0.9894
A <sub>1</sub>	0.3	0.2929	0.375	0.3456
A <sub>2</sub>	0	0.0065	0	-0.009
A <sub>3</sub>	0.2	0.1713	0.125	0.0964
A <sub>4</sub>	0	-0.0024	0	-0.0143
A <sub>5</sub>	0	0.023	0	-0.0059

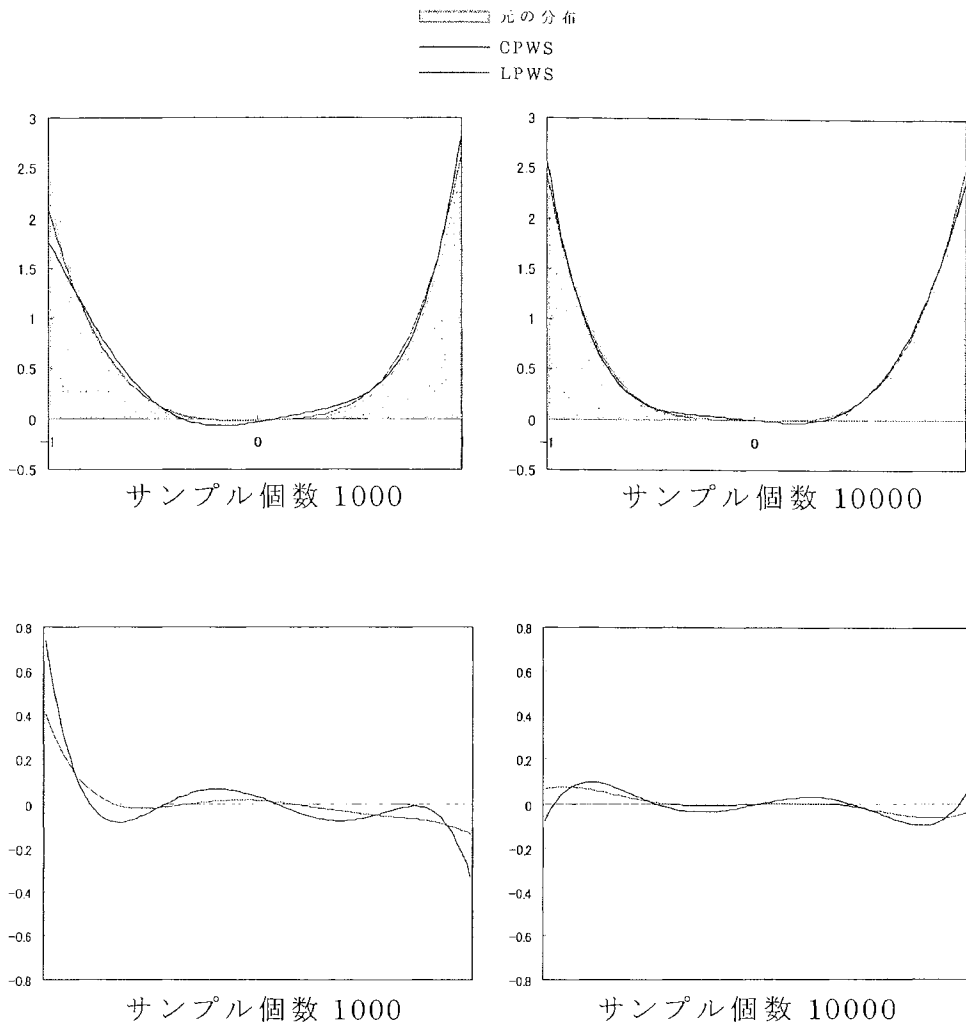


図 3-6 (3-44)式を対象としたサンプリング結果(上段)と差(下段)

表 3-4

	LPWS の理論値と結果		CPWS の理論値と結果	
$A_0$	0.5	0.5	1.875	1.8651
$A_1$	0	0.0608	0	0.0122
$A_2$	1.429	1.4168	1.25	1.2372
$A_3$	0	0.0228	0	-0.0452
$A_4$	0.571	0.559	0.313	0.3071
$A_5$	0	-0.0412	0	-0.0703



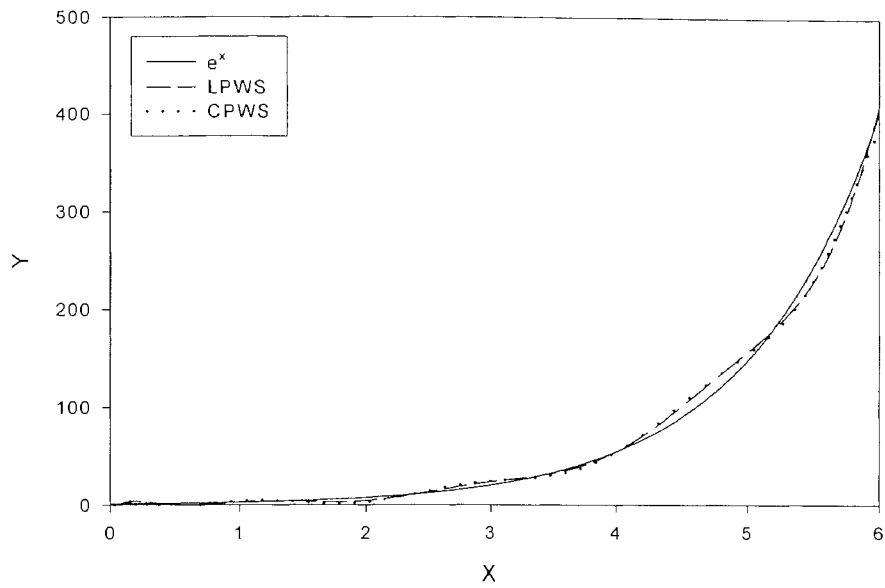


図 3-7 指数関数に従う分布のサンプリング結果

表 3-5

No. of pcs	LPWS	CPWS
1000	6.15%	6.52%
10000	2.07%	2.06%
100000	0.55%	0.78%
1000000	0.18%	0.64%
10000000	0.05%	0.63%

表 3-6

No. of pcs	LPWS	CPWS
1000	15.61%	21.16%
10000	4.28%	7.14%
100000	1.74%	3.55%
1000000	0.63%	1.34%
10000000	0.13%	0.30%

#### 3-4-4 LPWS の次数に対する考察

LPWS は分布をルジャンドル展開することと同義だが、ルジャンドル多項式を何次項まで考慮するかで、以下の理由からサンプリング結果に影響が出る。

- 1) 対象となる分布を十分表現可能な次数であるか
- 2) サンプリングにおいて収束が悪い項がある。

上記 2 つに着目して、同じ分布に対し次数を変化させて LPWS を行い結果について考察する。

一様乱数を 3 つ足して 3 で割った分布

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad (x_1, x_2, x_3 : \text{一様乱数}) \quad (3-36)$$

に対して 3 次から 9 次までの LPWS を乱数 1000 個、10000 個、100000 個の条件で行い、元の分布と比較した。元の分布と LPWS 結果を示す図を左に、元の分布と LPWS の差を示すグラフを右に示す。

図 3-8 は 3 次の LPWS を用いたものである。元の分布とは大きな差がある。また乱数を増やしても差に変化がない。従って 3 次の LPWS では 1) の理由から元の分布を再現するのは不可能であるが、差に変化が無いことから、サンプル数によらず 3 次の項は安定しているといえる。

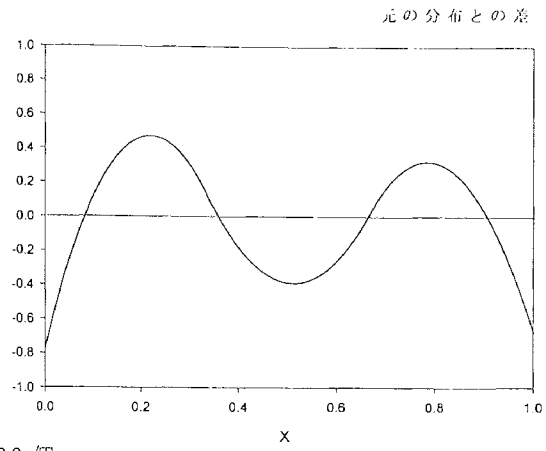
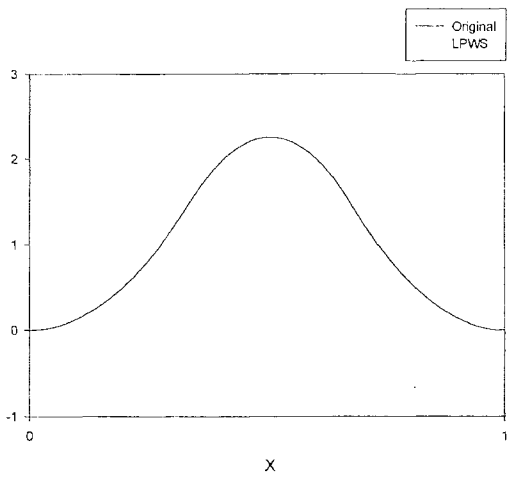
図 3-9 は 4 次の LPWS である。3 次の LPWS ほどの差は無いが元の分布からのずれが見られ、特に端部が減少ではなく増加してしまっている。1000 個と 10000 個の場合を比べると若干変化が見られることから 4 次の項は 10000 個で収束したと思われる。図 3-10 は 5 次の LPWS であるが、4 次の LPWS とほぼ同じ結果になった。

図 3-11 は 6 次の LPWS を用い、乱数 10000 個ではかなり元の分布を再現している。100000 個の場合とは差異があまり無いことから 10000 個程度で 6 次までの項は収束している。図 3-12 は 7 次の LPWS で 6 次の LPWS の結果と酷似している。

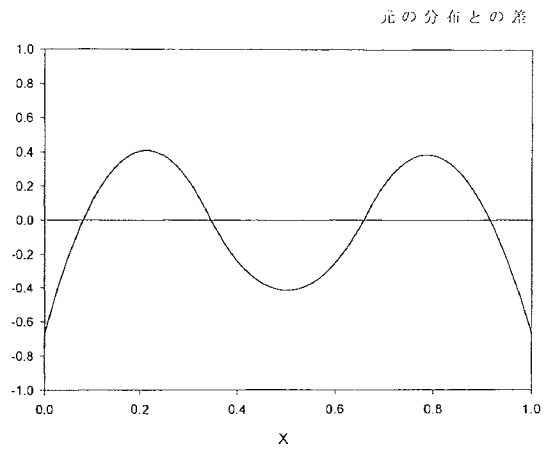
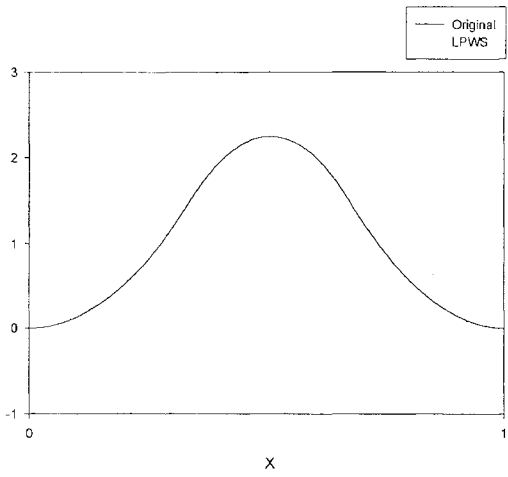
図 3-13 は 8 次の LPWS で、乱数 100000 個の場合には元の分布との差が

少なく、再現性が高い。個数による変化を見ると 100000 個時に 8 次の項は収束している。乱数 1000 個のときには 6 次、7 次ときには見られなかった端部の増加が見られることから、8 次の項の収束が悪いことがわかる。図 3-14 は 9 次の LPWS の場合で 8 次とほぼ同じ結果が得られた。

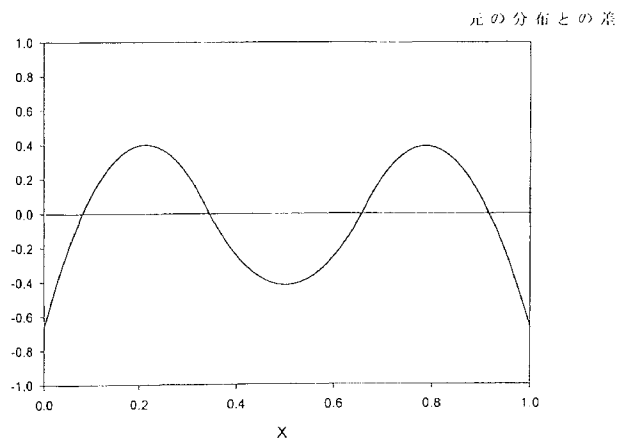
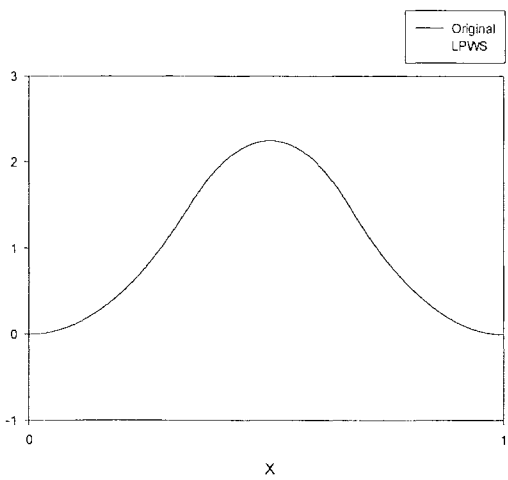
以上のことから、十分なサンプル個数があれば 8、9 次の LPWS が最も元の分布を表しているといえる。しかし、個数が少ない場合には、収束が悪く端部に問題が見られた。一方、サンプル個数によらず安定していたのが 6、7 次の LPWS であった。(3-36)式から得られる分布は 6 次関数程度であることがわかる。また、全体を通して低次の項の収束が良いことがわかる。特に 3 次までは非常に安定しているといえる。



(a) 乱数 1000 個

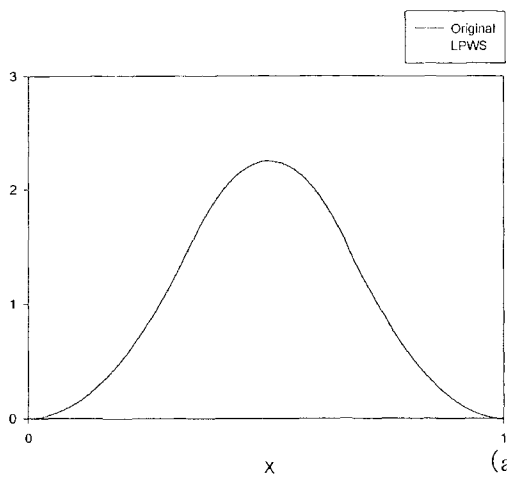


(b) 乱数 10000 個

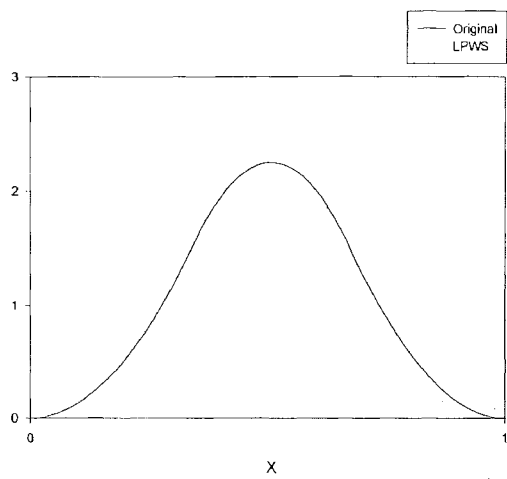
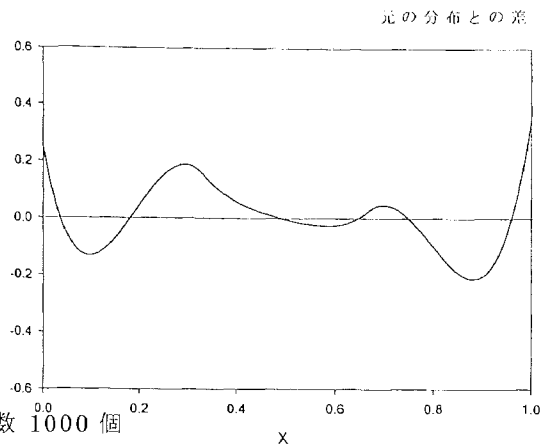


(c) 乱数 100000 個

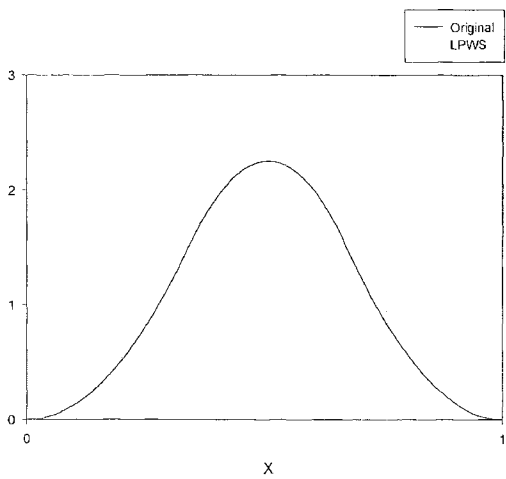
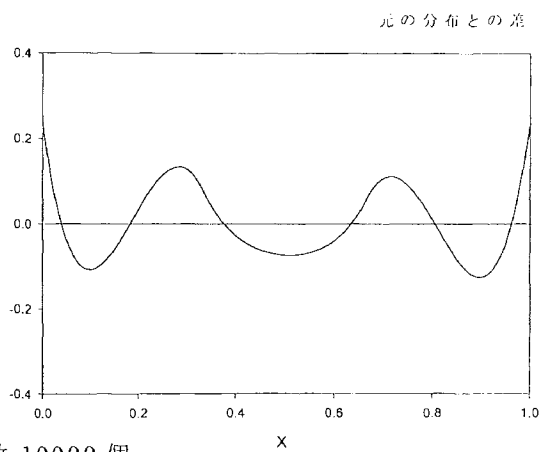
図 3-8 3 次の LPWS



(a) 乱数 1000 個



(b) 乱数 10000 個



(c) 乱数 100000 個

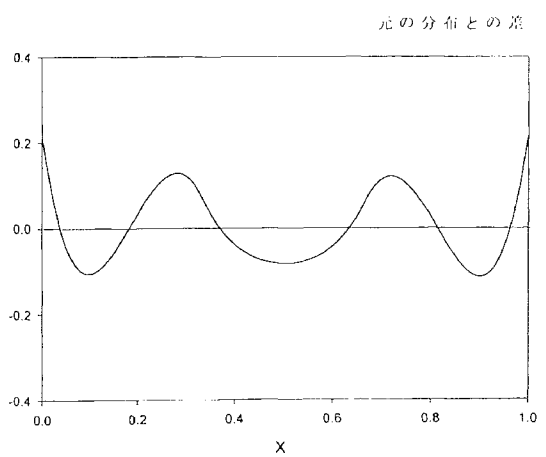
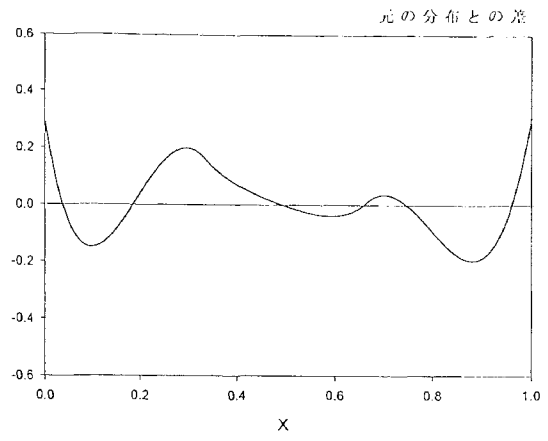
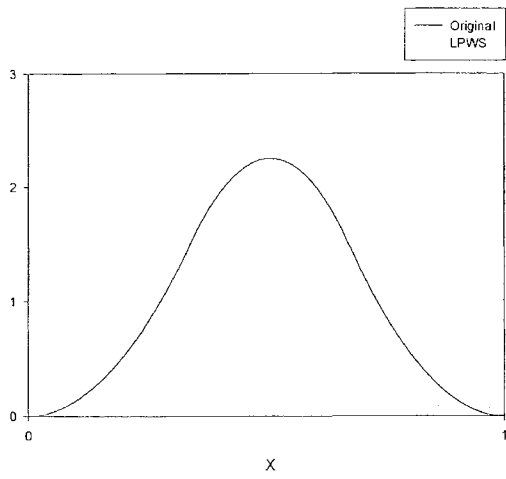
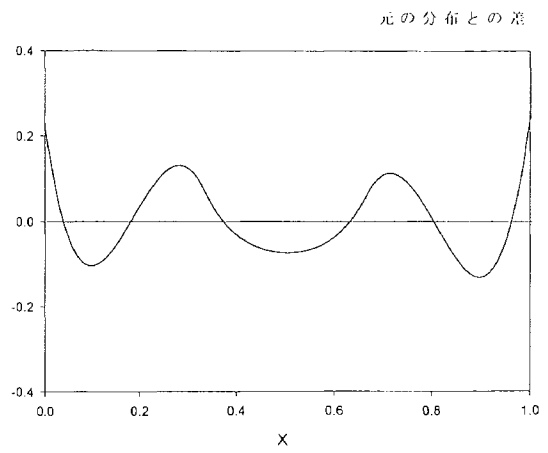
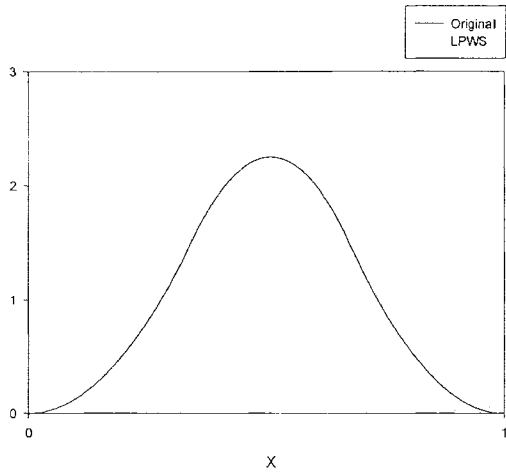


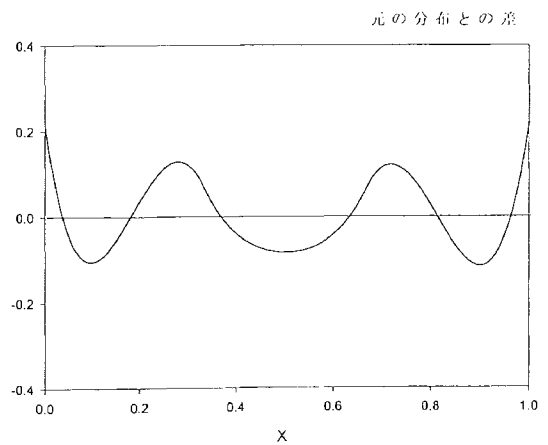
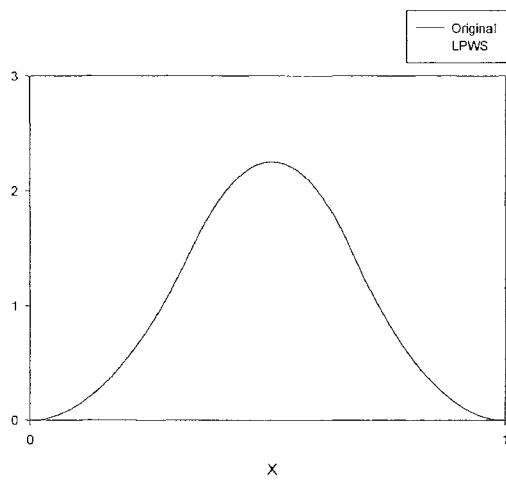
図 3-9 4 次の LPWS



(a) 乱数 1000 個

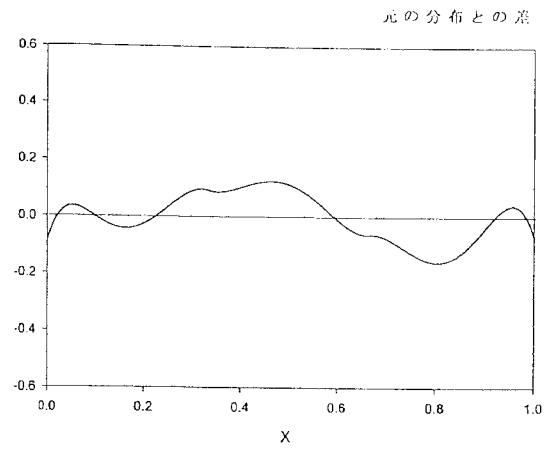
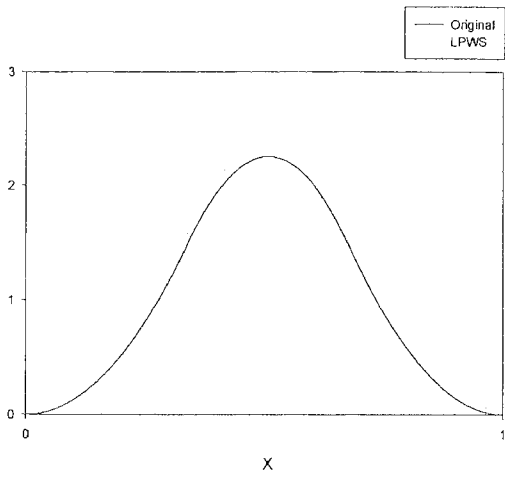


(b) 乱数 10000 個

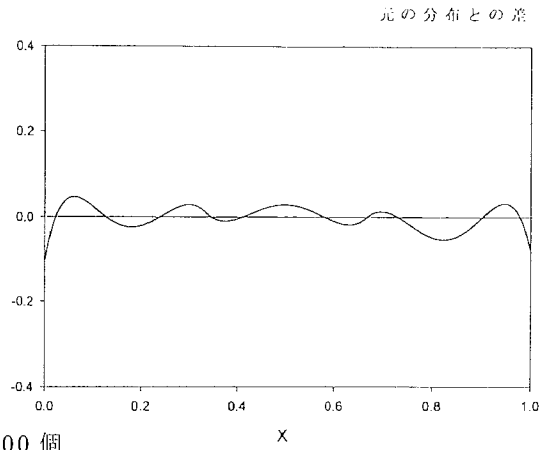
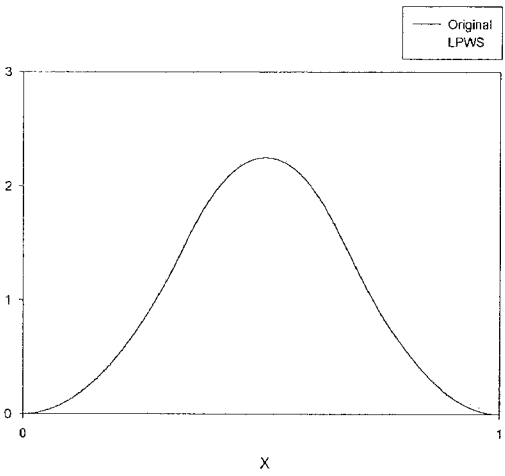


(c) 乱数 100000 個

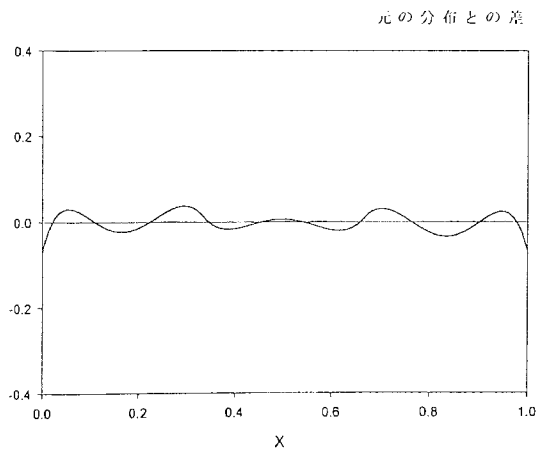
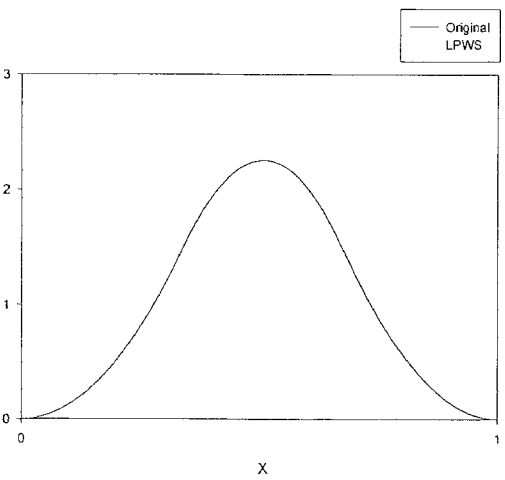
図 3-10 5 次の LPWS



(a) 乱数 1000 個



(b) 乱数 10000 個



(c) 乱数 100000 個

図 3-11 6 次の LPWS

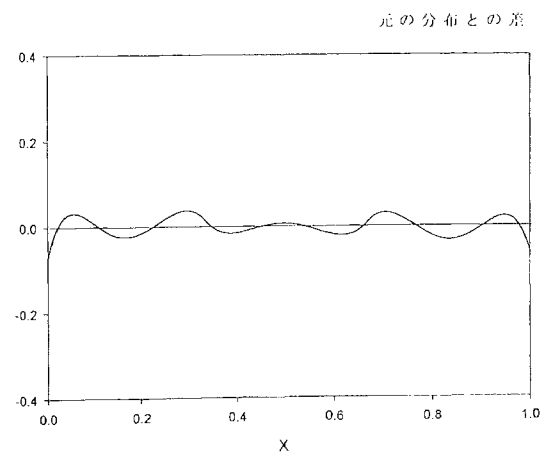
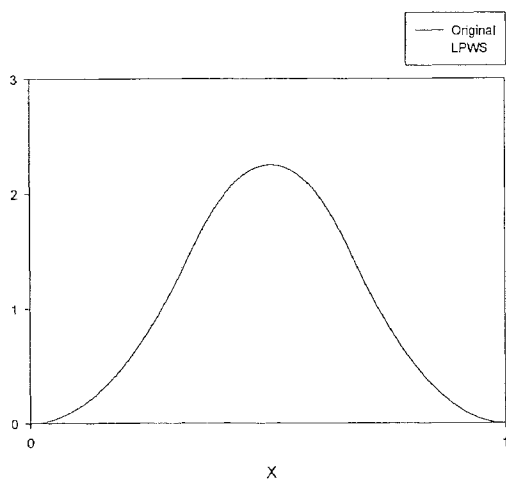
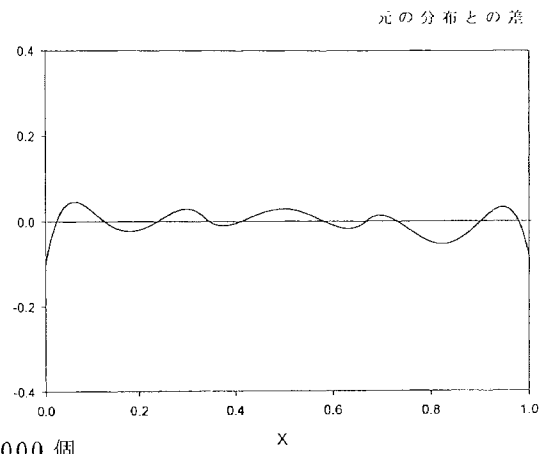
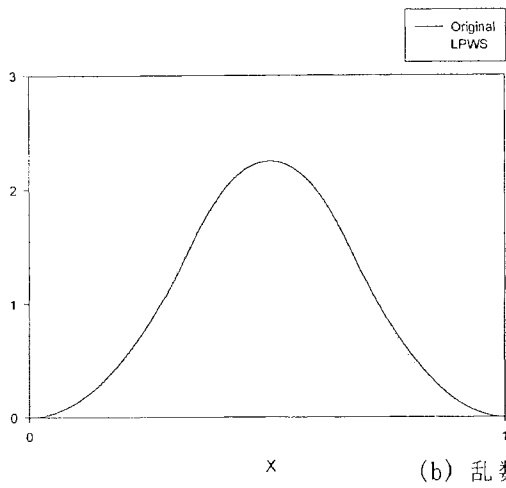
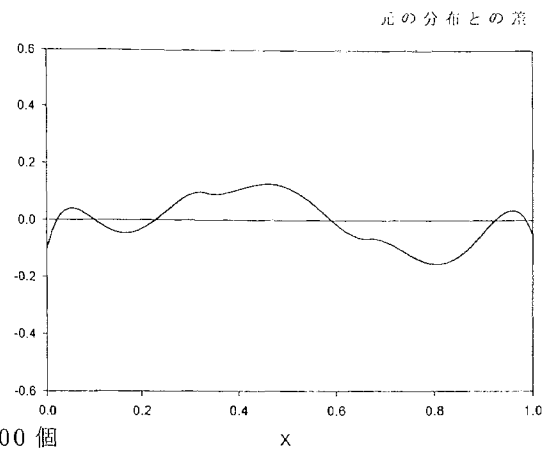
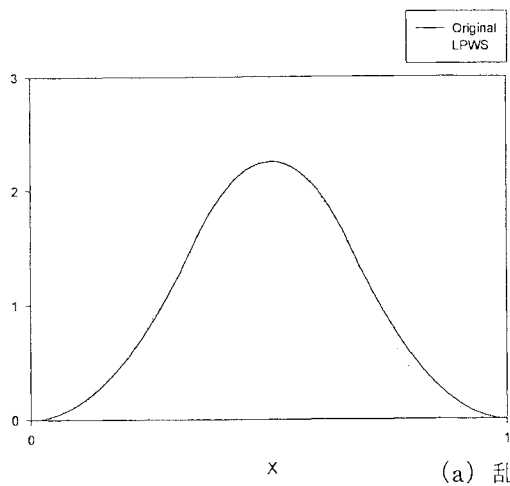
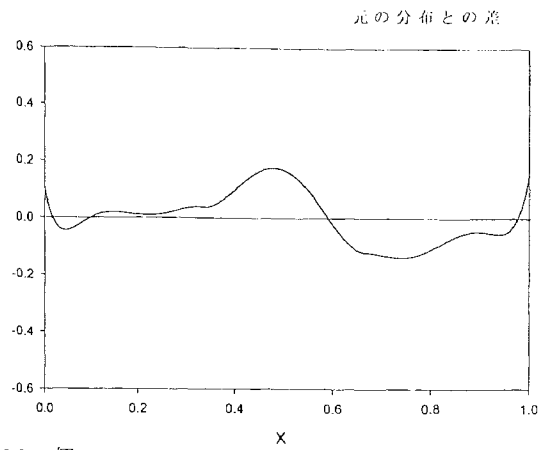
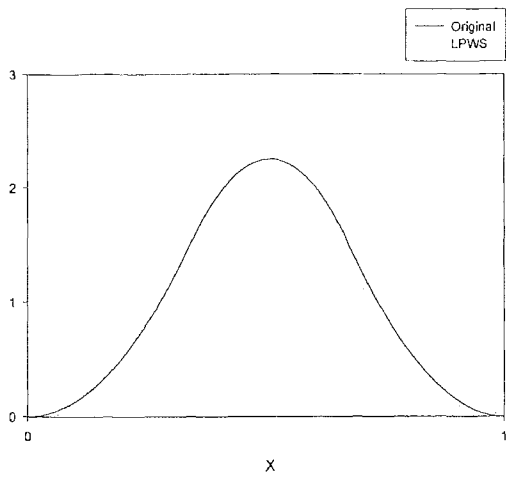
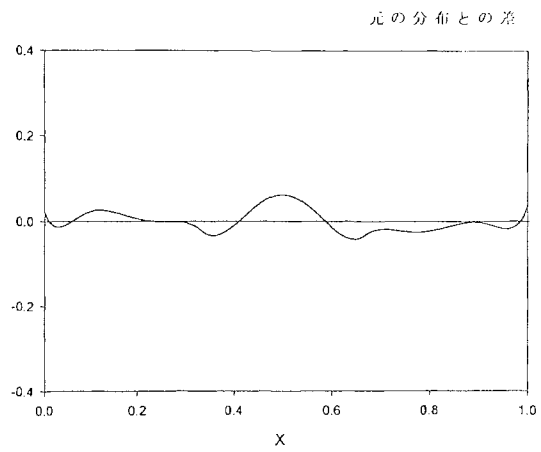
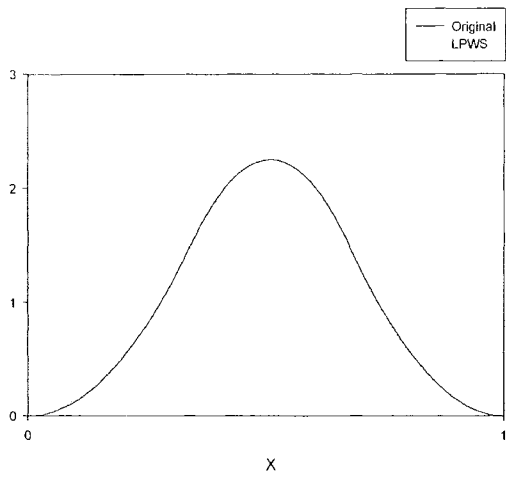


図 3-12 7 次の LPWS

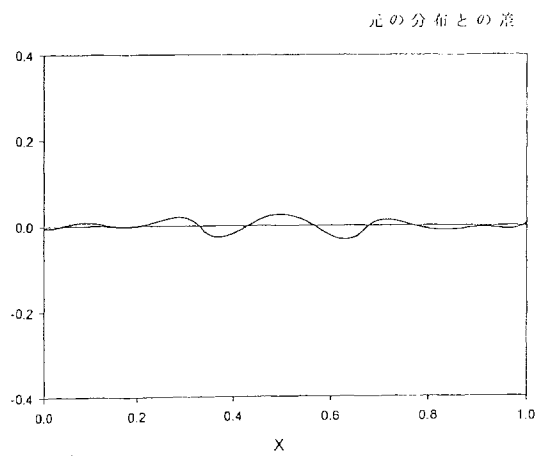
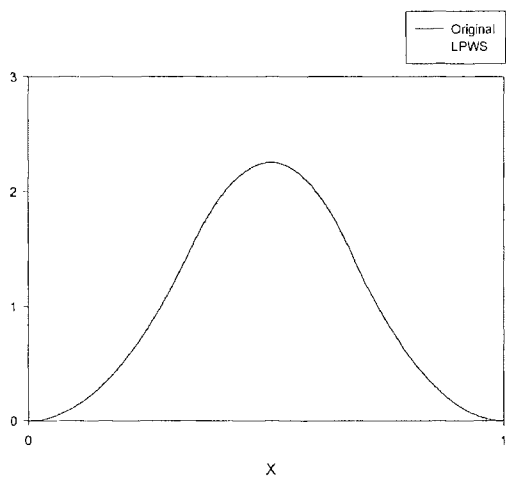




(a) 乱数 1000 個

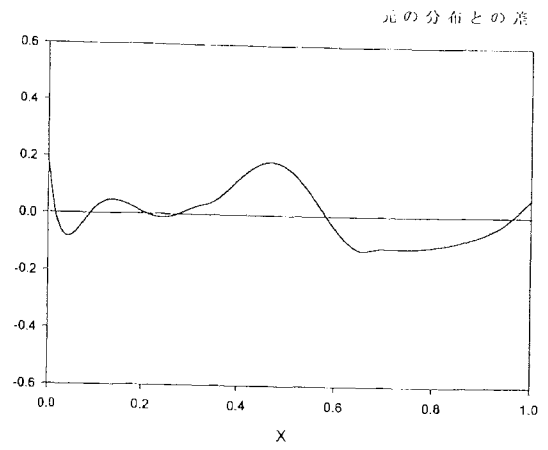
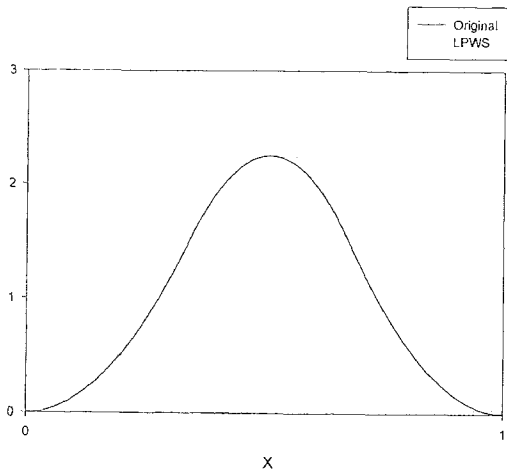


(b) 乱数 10000 個

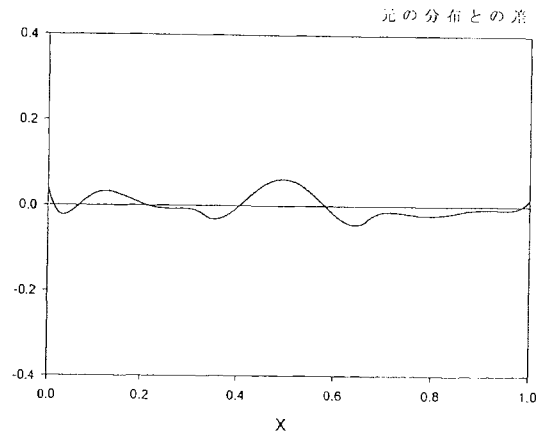
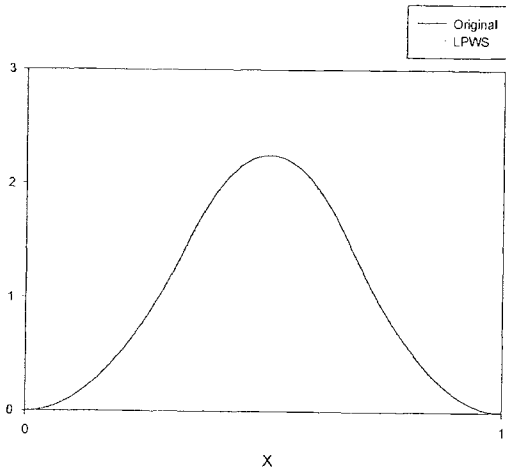


(c) 乱数 100000 個

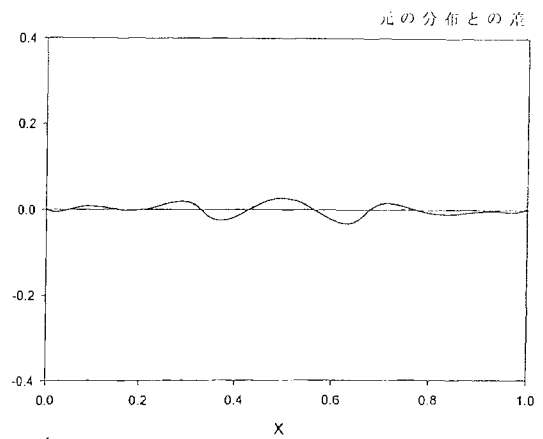
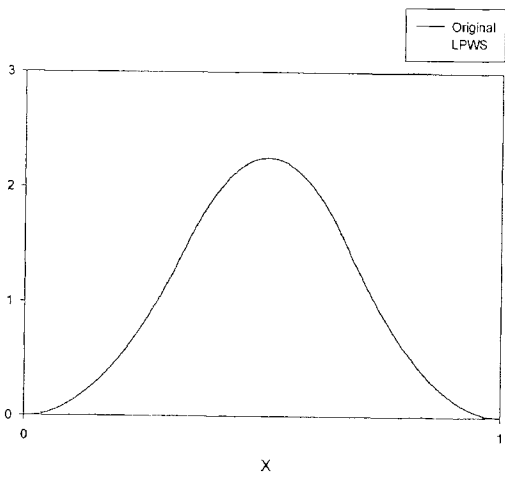
図 3-13 8 次の LPWS



(a) 乱数 1000 個



(b) 乱数 10000 個



(c) 乱数 100000 個

図 3-14 9 次の LPWS

### 3-5 多次元 LPWS

プラズマは、位置に応じて荷電粒子密度および速度分布が異なり、正確にプラズマ構造を解析するには、位置空間三次元、速度空間三次元の六次元を扱うことのできるシミュレーションが必要となり、MCSにおいては、三次元のポアソンの方程式を解かなければならない。佐藤らは、Ventzekらの一次元のLPWSを発展させ二次元および三次元の開発を行い、各位置における速度分布およびエネルギー分布の報告を行っている。多次元におけるルジャンドル多項式を用いた重み付けおよびスプライン関数による重ね合わせを示す。ある区間の関数を  $-1 \leq x_1 \leq 1$  で規格化した場合、 $n$  次元のある関数  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  を  $x_1$  でルジャンドル展開すると、

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} f_{k_1}(x_2, x_3, \dots, x_n) P_{k_1}(x_1) \quad (3-37)$$

となる。 $P_{k_1}$  は  $k_1$  次のルジャンドル多項式とする。

$f_{k_1}$  は、両辺に  $P_{k_1}(x_1)$  をかけて  $-1 \leq x_1 \leq 1$  の範囲で積分すると、ルジャンドル多項式の直交性により、

$$f_{k_1}(x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = \frac{2k_1+1}{2} \int_{-1}^1 P_{k_1}(x_1) f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_1 \quad (3-38)$$

となる。また、 $P_{k_1}(x_1)$  の係数  $f_{k_1}$  は  $x_2, x_3, \dots, x_n$  の関数であり、さらに  $x_2$  についてルジャンドル展開すると

$$f_{k_1}(x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = \sum_{k_2=0}^{\infty} f_{k_1, k_2}(x_3, x_4, \dots, x_n) P_{k_2}(x_2) \quad (3-39)$$

となる。同様にして展開していくと

$$f_{k_1, k_2, \dots, k_l} = \frac{2k_1+1}{2} \cdot \frac{2k_2+1}{2} \cdots \frac{2k_l+1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 P_{k_1}(x_1) P_{k_2}(x_2) \cdots P_{k_l}(x_l) dx_1 dx_2 \cdots dx_l \quad (3-40)$$

が得られ、多次元での重みは、

$$w_{k_1 k_2 k_3 \dots k_l} = P_{k_1}(x_1) P_{k_2}(x_2) P_{k_3}(x_3) \dots P_{k_l}(x_l) \quad (3.41)$$

$$(l=1,2,\dots,n, \quad k_i=0,1,2,\dots,\infty)$$

となる。式(3.41)より二次元のサンプリングにおける、ルジャンドル多項式の第三項 ( $k_i=0,1,2$ )までの重みは、

$$\left. \begin{aligned} w_{00} &= 1, w_{01} = x_2, w_{10} = x_1, x_{11} = x_1 x_2, \\ w_{02} &= \frac{1}{2}(3x_2^2 - 1), w_{20} = \frac{1}{2}(3x_1^2 - 1), \\ w_{12} &= x_1 \cdot \frac{1}{2}(3x_2^2 - 1), w_{21} = \frac{1}{2}(3x_1^2 - 1) \cdot x_2, \\ w_{22} &= \frac{1}{2}(3x_1^2 - 1) \cdot \frac{1}{2}(3x_2^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

となる。従って、ある幅で分割したサンプル区間内で、式(3.42)により重み付けを行いサンプルすることで式(3.40)の係数と対応する値が求まり、求めたい分布関数の形が表現された式(3.37)の形でルジャンドル展開が可能となる。各区間で得られた分布関数は、一次元の正規化された B-スプライン基底関数により繋ぎ合わせることで一つの滑らかな分布関数が得られる。一次元の一次のスプライン関数を  $S_i(x)$  とすると、二次元のスプライン関数  $S_{i+1,j+1}(x,y)$  は、

$$S_{i+1,j+1}(x,y) = S_{i+1}(x) \times S_{j+1}(y) \quad (3.43)$$

$$(i=0,1,2,\dots,m_x, \quad j=0,1,2,\dots,m_y)$$

となる。双一次スプラインの台を図 3-15 に示したように重ね合わせて配置される。スプライン関数と LPWS の組み合わせは佐藤ら<sup>[3.21]</sup>と同様の方法である。

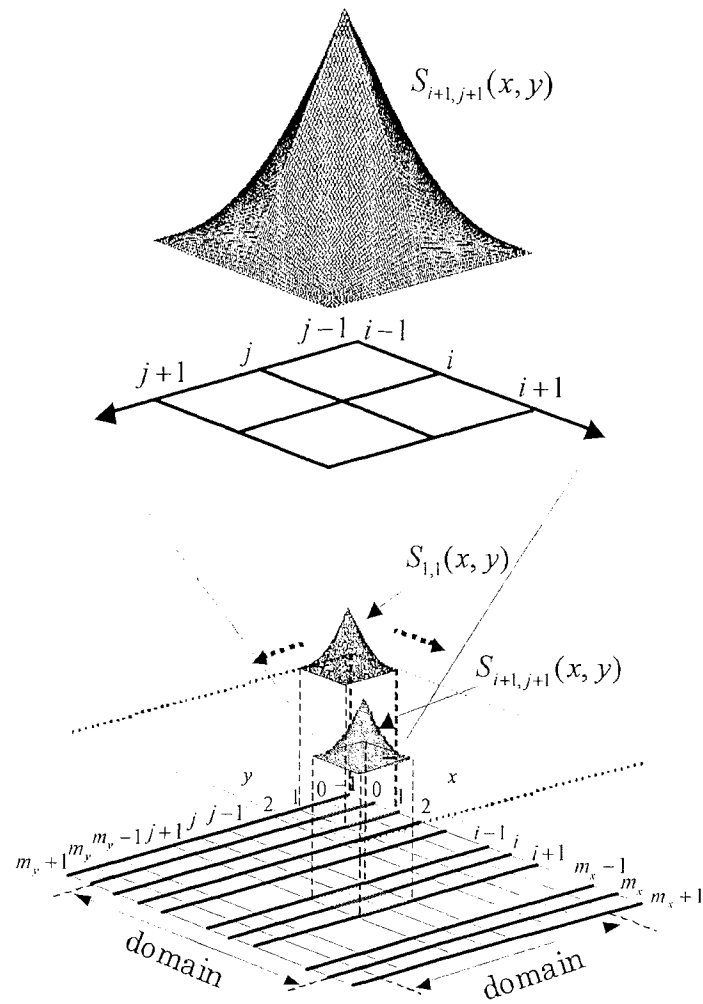


図 3-15 二次元の双一次スプライン

### 3-6 LPWS のスプライン関数表現

Ventzek ら<sup>[3-11]</sup>の LPWS では、サンプリング対象とする範囲を少ない区間数で区切り、区間内の密度分布をルジャンドル展開し、B-スプライン基底関数を信頼度とした接続を行っている。図 3-16 に示すように区間  $\tau_{v-2} \sim \tau_{v+1}$  を一つの区間とみなし、LPWS により得られる分布関数を  $f_A(\tau)[\tau_{v-2}, \tau_{v+1}]$  とし、同様に区間をずらして  $f_B(\tau)$  区間  $[\tau_{v-1}, \tau_{v+2}]$ ,  $f_C(\tau)$  区間  $[\tau_v, \tau_{v+3}]$  とすると、3 階の B-スプライン基底関数  $M_A, M_B, M_C$  を  $f_A, f_B, f_C$  それぞれに対応する信頼度として次式

$$f(\tau) = f_A(\tau)M_A(\tau) + f_B(\tau)M_B(\tau) + f_C(\tau)M_C(\tau) \quad (3-44)$$

により各区間を滑らかに繋ぎ合わせる手法を用いていた。ここで  $M_A$  の非零区間は  $M_A > 0$  ( $\tau_{v-2} < \tau < \tau_{v+1}$ ) とし  $M_B, M_C$  はそれぞれ一区間ずらしたものとなる。1 次以上の B-スプライン基底関数を用いることで、微分しても連続性を保つことが可能である。LPWS において急な立ち上がりや凹凸を多く含む分布に対してサンプリングを行うと、高次の項による統計変動が現れる。その解決策として、サンプル数による統計変動を受けない程度の大きな幅で区間分割し、区間内を低次項で近似できるようにして、サンプル区間をオーバーラップさせ各区間で得られた分布を繋ぎ合わせていた。B-スプライン基底関数を信頼度とすると、各区間では中央を最も信頼することになるが、サンプリングにより関数として得られた分布と、実際の分布の一致する程度が B-スプライン基底関数による信頼度と等価ではない。

本論文では、サンプリング時に統計変動を受けにくい LPWS の低次項の係数をもとに、与えられた各 B-スプライン基底関数に対する係数を求めることで、分布関数をスプライン関数表現する方法を示す。

1 次元モデルとして対象となる区間を図 3-17 に示すよう 12 分割し、区間  $[\xi_{2w}, \xi_{2w+4}]$  における分布関数  $f_w(x)$  ( $w=0,1,2,3,4$ ) に LPWS を行い全体の分布関数  $f(x)$  区間  $[\xi_0, \xi_{12}]$  をスプライン関数表現する方法を述べる。分布関数  $f_w(x)$  を 2 次までのルジャンドル多項式  $P_q(X)$ , LPWS から得られる係数  $A_{LPWS,w,q}$  により展開し次式となる。

$$f_w(\chi) = A_{L^{\text{PMS}}_{w,0}} P_0(\chi) + A_{L^{\text{PMS}}_{w,1}} P_1(\chi) + A_{L^{\text{PMS}}_{w,2}} P_2(\chi)$$

$$(w = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (3-45)$$

$$\chi = \frac{2\{x - (\xi_{2w+4} - \xi_{2w})/2\}}{\xi_{2w+4} - \xi_{2w}} \quad (3-46)$$

ここで  $q$  は多項式の次数である。また分布関数  $f(x)$ , 区間  $[\xi_0, \xi_{12}]$  は 4 階の B-スプライン基底関数  $M_{4,i}$ , 非零区間  $M_{4,i} > 0$  ( $\xi_{i-4} < x < \xi_i$ ), 係数  $c_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n_x$ ,  $n_x$  は B-スプライン基底関数の個数とし次式で表されるとき,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n_x} c_i M_{4,i}(x) \quad (3-47)$$

$f_w(\chi)$  は次式となり,

$$f_w(\chi) = \sum_{i=2w+1}^{2w+7} c_i M_{4,i}(\chi) \quad (3-48)$$

ルジャンドル展開時の係数  $A_{l,q}$  は, 区間  $[\alpha, \beta]$  において次式により得られるので,

$$A_{l,q} = \frac{2q+1}{2} \int_{-1}^1 f(X) P_q(X) dx \quad (3-49)$$

$$X = \frac{2\{x - (\beta - \alpha)/2\}}{\beta - \alpha} \quad (3-50)$$

$f_w(\chi)$  展開時の係数  $A_{l,w,q}$  は (3-48) 式を代入し次式となる。

$$A_{l,w,q} = \frac{2q+1}{2} \int_{-1}^1 P_q(\chi) \sum_{i=2w+1}^{2w+7} c_i M_{4,i}(\chi) dx \quad (3-51)$$

(3-51) 式を各 B-スプライン基底関数を積分した形に分け  $m_{w,q,i}$  とし次式となる。

$$m_{w,q,i} = \frac{2q+1}{2} \int_{-1}^1 P_q(\chi) M_{4,i}(\chi) dx \quad (3-52)$$

よって (3-51) 式は次式に示すように書くことができ,

$$A_{l,w,q} = \sum_{i=2w+1}^{2w+7} c_i m_{w,q,i} \quad (3-53)$$





ことで、区間内のマクロパラメータを満たすサンプリング結果を得ることが可能となると同時に、より数学的な意味が明確になった。

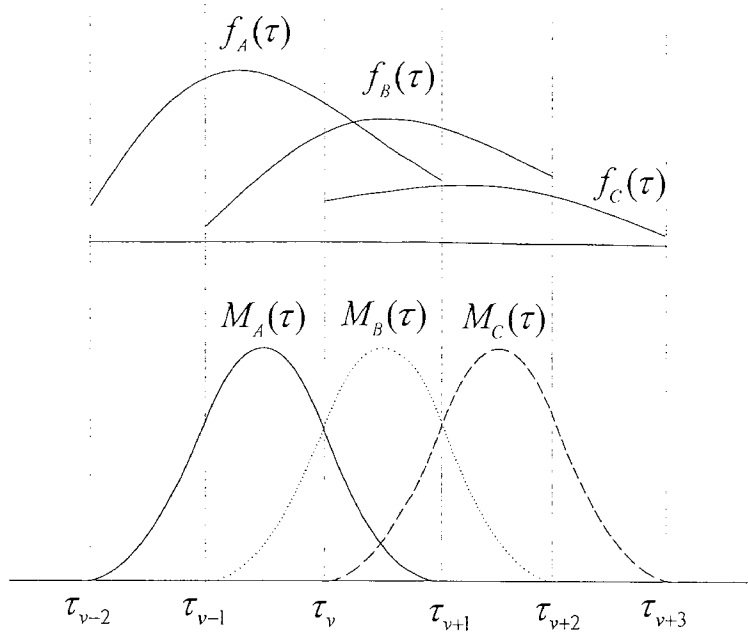


図 3-16 B-スプライン基底関数を信頼度とした重ね合わせ

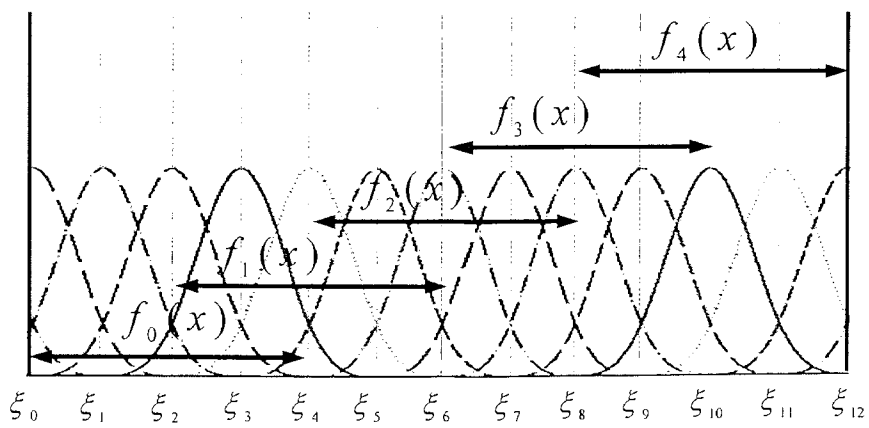


図 3-17 B-スプライン基底関数とサンプリング区間の対応

### 3-7 スプライン関数を用いた高速電界計算

#### 3-7-1 高速電界計算法

プラズマプロセス MCS では非常に短い時間、電界一定として荷電粒子の運動を計算しているが、シース部においては強い電界が急激に変化するため、電界一定とする時間が長いと荷電粒子に余分なエネルギーが与えられシミュレーションを不安定にする要因となっている。安定な計算のためには計算ステップ( $\Delta t$ )をさらに分割し短くする必要があり、計算コストを増加させる。2次元、3次元の電界計算は2乗、3乗の計算コスト増加が予想され、シミュレーションを効率よく行うためには、高速な電界計算が有効であると考えられる。ここでは、スプライン関数の特性とポアソン方程式の線形性を生かしスプライン関数により与えられる荷電粒子密度から高速に電界を計算する方法について述べる。

電界は、外部電界と内部電界の和で与えられる。外部電界はラプラス方程式で計算され、1 V 時の電界から各点における比例計算により電界が求められる。内部電界はポテンシャル  $V$ 、電荷密度  $\rho$ 、真空の誘電率  $\epsilon_0$ 、有界開集合  $\Omega$  とし、ポアソン方程式及び境界条件

$$\begin{cases} \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 z} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{in } \Omega \\ V = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (3-57)$$

から、次式により各  $x, y, z$  方向の電界  $E_x, E_y, E_z$  が得られる。

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (3-58)$$

電荷密度は  $m$  階の B-スプライン基底関数の積と係数  $c_{i,j,k}$  により表現すると次式となり、

$$\rho(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} c_{i,j,k} M_{m,i}(x) M_{m,j}(y) M_{m,k}(z) \quad (3-59)$$

$M_{m,i}(x)M_{m,j}(y)M_{m,k}(z)$  は荷電粒子群の密度に相当し、それらを合計したものが全体の荷電粒子密度となる。ここで  $n_x, n_y, n_z$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向の B-スプライン基底関数の個数である。荷電粒子群  $M_{m,i}(x)M_{m,j}(y)M_{m,k}(z)$  に対応するポテンシャル  $V_{i,j,k}(x, y, z)$  は(3-59)式に示された電荷密度から、次式となり

$$\nabla^2 V_{i,j,k}(x,y,z) = -\frac{M_{m,i}(x)M_{m,j}(y)M_{m,k}(z)}{\epsilon_0} \quad (3-60)$$

それらの解  $V_{i,j,k}(x,y,z)$  を重ね合わせることで、次式のように全体のポテンシャル  $V(x,y,z)$  が得られる。

$$V(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} c_{i,j,k} V_{i,j,k}(x,y,z) \quad (3-61)$$

B-スプライン基底関数の係数  $c_{i,j,k}$  は偏微分には影響の無い定数であるため(静止時、時間により荷電粒子密度が変化するので実際は時間  $t$  の関数となる)、あらかじめ各 B-スプライン基底関数に対応する電界を計算可能である。荷電粒子密度から係数  $c_{i,j,k}$  が得られたら、計算済みの基準となる各荷電粒子群に対応するポテンシャルに係数  $c_{i,j,k}$  を乗じ、それら重ね合わせることでポテンシャルが計算される。本論文で提案する方法は、各 B-スプライン基底関数に対応する電界をあらかじめ計算しておくことで、同じ放電室形状を持ち電荷密度が変化する空間で繰り返し電界計算を行う際の計算コストを大幅に減らすことができる。計算精度の高い電界計算法では一般に計算コストが大きくなるが、本手法においては一度、基準となる荷電粒子密度から電界を計算するときに高精度な電界計算法を用いることで高精度電界計算を可能とする。次回からは荷電粒子密度に対し LPWS を行い B-スプライン基底関数の係数を得ることで、正確な電界が高速に求められる。このようにスプライン関数を用いた計算手法は、精度と速度を両立することを可能としており、プラズマプロセス MCS のような、同じ装置内で内部電荷密度が変化し繰り返し電界計算を必要とする場合に、特に有効である。B-スプライン基底関数の積により 2 次元、3 次元での電荷密度を表すことで、境界形状が曲線を含まない 2 次元、3 次元での高速電界計算が可能となる。

ここで 1 次元空間モデルの例を示す。計算領域は  $x=0\sim 0.02$  とする。電荷密度  $\rho$  を 1 次元 4 階の B-スプライン基底関数  $M_{4,i}(i=1,2,\dots,n_x)$  を用い、次式となる。

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{n_x} c_i M_{4,i}(x) \quad (3-62)$$

ここで非零区間  $M_{4,i} > 0$  は、 $0.005(i-4) < x < 0.005i$  である。図 3-18 に  $n_x=7$  とし係数  $c_i$  を除いた ( $c_i=1$  と同じ) 各 B-スプラインによる荷電粒子密度を示した。1 次元のポアソン方程式を解くと次式が得られ、

$$E(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_x^d \rho(x) dx + \frac{1}{\varepsilon_0 d} \int_0^d x \rho(x) dx \quad (3-63)$$

B-スプライン基底関数  $M_{4,i}$  は局所の荷電粒子群と対応し, その荷電粒子群それぞれに対する電界は, 次式となる。

$$E_i(x) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_x^d c_i M_{4,i}(x) dx + \frac{1}{\varepsilon_0 d} \int_0^d x c_i M_{4,i}(x) dx \quad (3-64)$$

図 3-19 に(3-64)式から計算された  $c_i$  を除いた荷電粒子群に対する電界を示す。得られた各電界が基本値となり, 実際の全体の内部電界は, 次式に示すよう各電界に係数  $c_i$  を乗じ重ね合わせたものとなる。

$$E(x) = \sum_{i=1}^n c_i E_i(x) \quad (3-65)$$

### 3-7-2 電界計算の評価

LPWS による分布のスプライン関数表現と, スプライン関数を用いた電界計算の結果を確認すると共に計算時間を示した。Horie ら<sup>[3-5]</sup>の Ar ガス RF 平行平板 MCS (電極間 2cm, 電源 270V) の結果を元にプラズマが定常状態時における電子・イオンを生成する MCS を行い電子とイオンそれぞれをサンプリングした。電界計算に用いる B-スプライン基底関数に対応する電界  $E_i$  はサンプリングに用いる B-スプライン基底関数と同数の 15 とする。

図 3-20 に定常状態かつ外部電界 0 である時の電子とイオンの密度をサンプリングしたものを示す。図 3-21 はサンプリングにより B-スプライン基底関数の係数を得て, スプライン関数による電界計算に適用し得られた電界である。図 3-22 に示した Horie ら結果と一致しておりサンプリングと電界計算が正しく行われたことを確認した。

1 次元における平行平板間の内部電界は(3-63)式により求めることができ, シミュレーションにおいては数値積分を用いるのが一般的と考えられる。ここでは, ガウス求積法とスプライン関数を用いた電界計算により繰り返し電界を計算した時の計算時間と比率を図 3-23 に示す。縦軸右側に示す比率は各繰り返し回数時におけるガウス求積法の計算時間を 100%としたときの高速度電界計算法の比率である。使用した計算機は PentiumM1.6MHz,

Memory768Mbyte, OS は WindowsXP Professional プログラムコードは Java で記述した。ガウス求積法は Visual Numerics 社の JMSL1.0 を用い適応型の 31 点ガウス-クローンロッド積分を行った。電界計算 1 回のときガウス求積法では 23ms, 高速電界計算法は 4.7ms で比率は 20%となっており, 1 回の計算においても高速計算法が早いことがわかる。また, 20 回時にガウス求積法 561ms に対し高速電界計算法は 18ms 比率 3%, 100 回計算時にはガウス求積法 2952ms に対し高速電界計算法 30ms 比率 1%となり, 繰り返し計算するときほど高速電界計算法が高速であり計算コストを抑えることがわかる。結果からプラズマプロセス MCS のように何度も電界計算を行う場合に非常に高速であり有効なことがわかる。

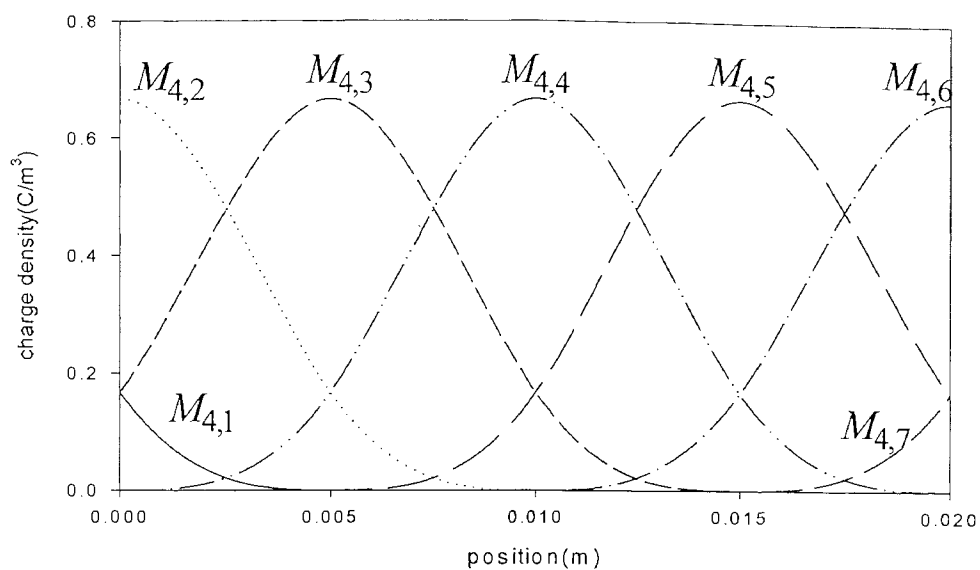


図 3-18 係数  $c_i=1$  における B-スプライン関数による電荷密度

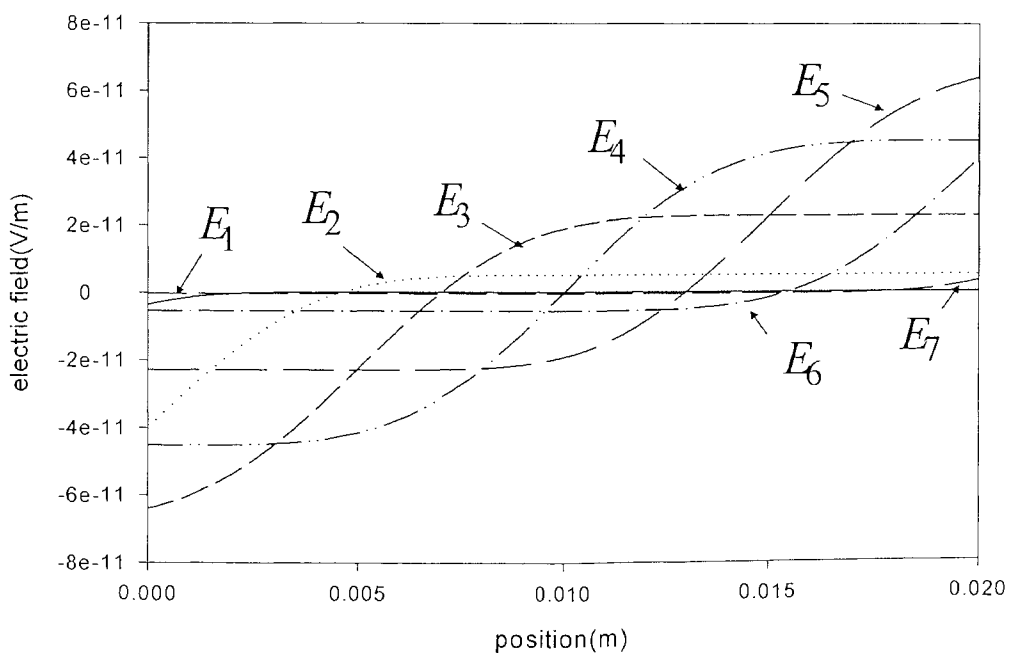


図 3-19 図 3-18 に示す B-スプライン関数に対応する電界

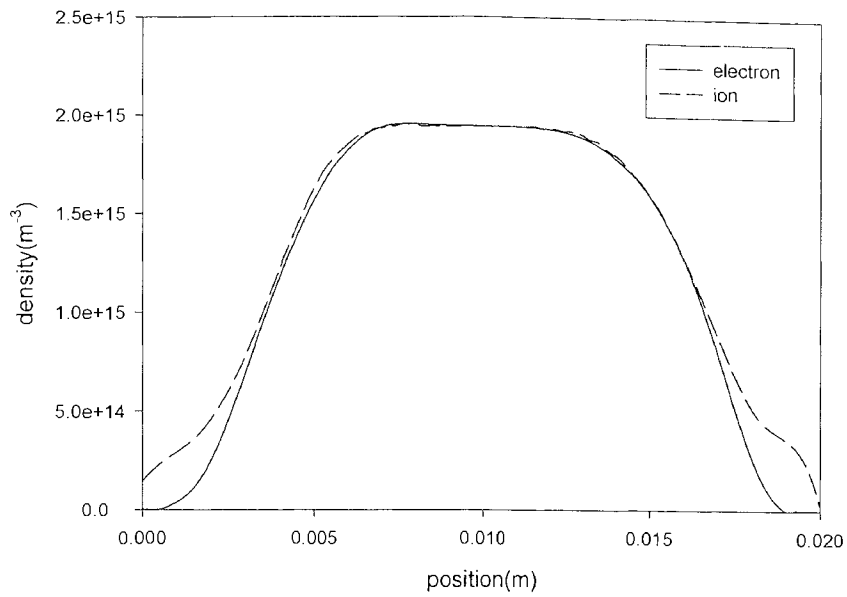


図 3-20 電子密度とイオン密度

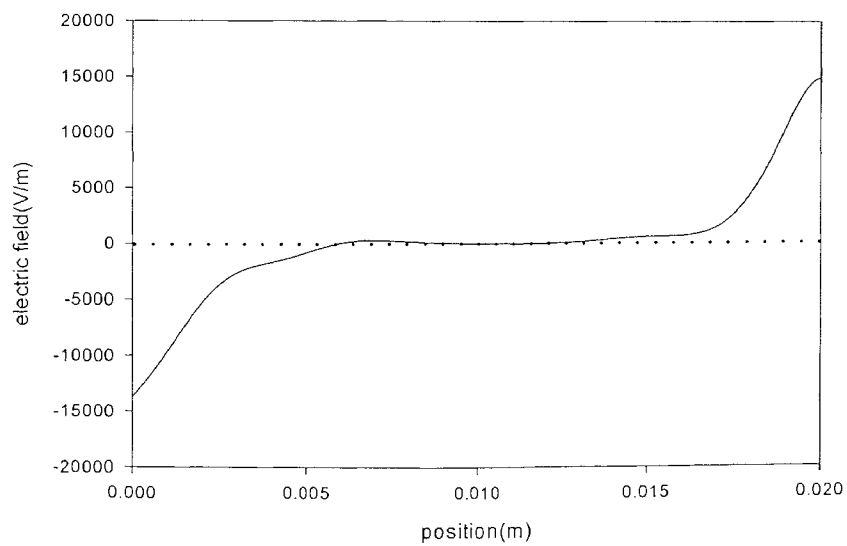


図 3-21 電荷密度より計算された内部電界



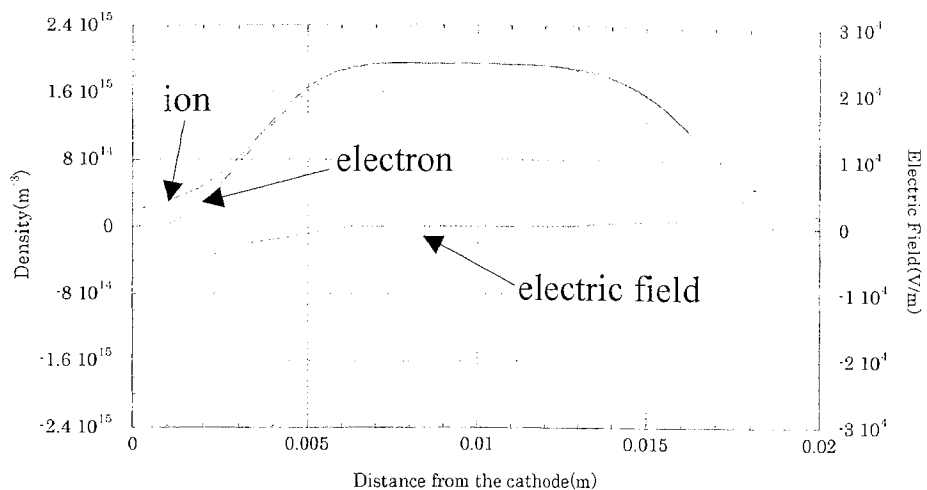


図 3-22 Horie らによる定常状態 0-rf cycle の  
電子密度・イオン密度及び電界計算結果 [3-5]

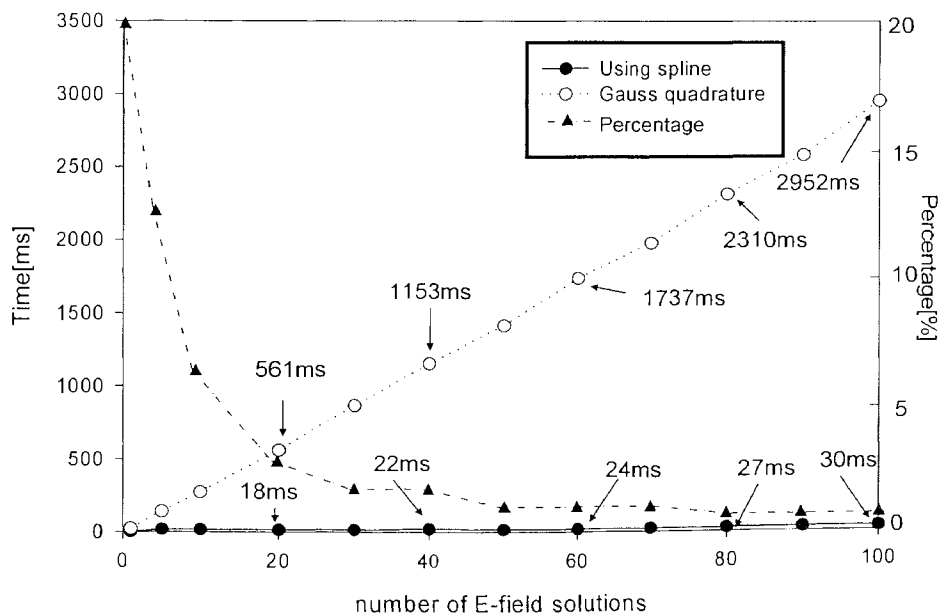


図 3-23 計算時間

参考文献

- [3-1]P. L. G. Ventzek and K. Kitamori : “Higher-order sampling strategies in Monte Carlo simulations of electron energy distribution functions in plasmas”, J. Appl. Phys., Vol.75, pp.3785-3788 (1994)
- [3-2]佐藤孝紀, 本間高広, 伊藤秀範, 田頭博昭, 電学論 A, 120 卷 2 号, pp.147-153 (2000)
- [3-3]堀江育也, “LPWS 法を用いたプラズマプロセスシミュレーションに関する研究”, 北海道工業大学大学院工学研究科博士論文(2003)
- [3-4]富田 幸雄、小泉 堯、松本 浩之 共著 「工学のための数理解析 I」 実務出版株式会社
- [3-5]I. Horie, T. Suzuki, K. Kitamori and K. Maruyama : “Spatio temporal Variation of the Density Distributions in Ar RF Plasmas Using the Monte Carlo Simulation/Legendre Polynomial Weighted Sampling Method”, J. Appl. Phys. Vol.42 pp. 1445-1451(2003)

## 第4章 電磁界中の荷電粒子とイオンスラスタのプラズマ源

### 4-1 まえがき

イオンスラスタにおいて低いイオン生成コスト及び高い推進効率を得るためにプラズマを効率よく生成することは必須である。イオンスラスタのプラズマ生成には直流放電型、マイクロ波放電型などがあり、直流放電型は荷電粒子を閉じ込める磁場形状の違うカウフマン型とカスプ磁場型にわかれる<sup>[4-1]</sup>。直流放電型、マイクロ波放電型共に放電室に配置された永久磁石による磁気形状がプラズマの生成効率及び生成領域を左右する<sup>[4-2]</sup>ことから、イオンスラスタにおけるプラズマ源の精密な制御を行うためには、電磁界中のプラズマを詳細に知る必要がある。磁界中では、電界のみの場合よりも荷電粒子の運動は複雑になり、プラズマ構造を十分理解するためのプラズマ生成方法における様々なシミュレーションが行われている。プラズマプロセス分野では、特に磁界を印加した場合の基礎となる電界と磁界が直交した  $E \times B$  フィールドにおいて、種々のガスについて報告されている<sup>[4-3]・[4-6]</sup>。しかし、ECR プラズマなどのプラズマ生成法では、場所により電界と磁界が直交しておらず、任意の電界と磁界の角度によるプラズマ構造を知ることが重要である<sup>[4-7]・[4-9]</sup>。本論文では、イオンスラスタの推進剤として用いられる Ar ガス及び Xe ガスについて、電界と磁界のなす角を  $0 \sim 90$  度まで  $10$  度づつ変化させ、それぞれの角度に対し、速度、平均エネルギー、エネルギー分布および衝突周波数などのパラメータについて報告する。また、マイクロ波放電型イオンスラスタにおいて電磁界が複雑に作用する放電室中の電子の挙動についてモンテカルロ・シミュレーションを行い結果について述べる。

### 4-2 電界と磁界による荷電粒子の運動

#### 4-2-1 単一荷電粒子の電界中の運動

荷電粒子は、衝突拡散のほかに電界によってもある方向に移動する。電界

がない場合には、これらの荷電粒子は密度の薄い方向に拡散する。電界が印加された場合、荷電粒子は密度に関係なく加速され、電子は負の電荷を持っているので電界と逆方向に移動し、正イオンは正の電荷を持っているので電界方向に移動する。負イオンは電子と同じ方向に移動する。このとき、これらの荷電粒子は中性分子と衝突し、ジグザグ運動をしながら電界によってある一定方向に進む。このことをドリフトと呼んでいる。電界  $E$  の方向に  $x$  軸をとり、質量  $m$ 、電荷  $q$  (電子のとき  $-e$ 、イオンのとき  $e$ ) の荷電粒子の運動は、初速度を  $0$  とし、 $x$  方向のニュートンの運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = qE \quad (4-1)$$

を積分することで速度が次のように求まる。

$$v = \frac{qE}{m} t \quad (4-2)$$

式(4-2)より、速度が時間  $t$  に正比例して増加することがわかる。しかし、実際には荷電粒子は、中性粒子と衝突するため式(4-1)の右辺に衝突項を入れたランジュヴァン方程式

$$m \frac{dv}{dt} = qE - mvf \quad (4-3)$$

が用いられ、荷電粒子が衝突時に運動量  $mv$  を失うとし、1秒間に  $f$  回衝突すると式(4-3)のように表される。式(4-3)の右辺の速度  $v$  にドリフト速度  $v_D$  を代入すると、

$$v_D = \frac{qE}{mf} \quad (4-4)$$

となる。

#### 4-2-2 単一荷電粒子の磁界中の運動

電界がなく磁界  $\mathbf{B}$  のみが存在する場合、電荷を  $q$ 、速度を  $\mathbf{v}$  とすると荷電粒子に  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{B}$  に垂直方向のローレンツ力を受ける。したがって運動方程式は、

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4-5)$$

となる。いま、 $z$  軸方向に磁界  $\mathbf{B}$  が印加されているとし、荷電粒子が  $xy$  平面上を速度  $\mathbf{v}$  で直進しようとした場合、 $z$  軸方向と進行方向に対して直角のローレンツ力を受け曲げられる。したがって、これを繰り返すことによって  $z$  軸方向と垂直な  $xy$  平面上で荷電粒子は円軌道を描くサイクロトロン運動を行い図 4-1 のようになる。

サイクロトロン角周波数  $\omega_c$  およびラーモア半径  $\rho$  は

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \quad (4-6)$$

$$\rho = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \quad (4-7)$$

で求められる。

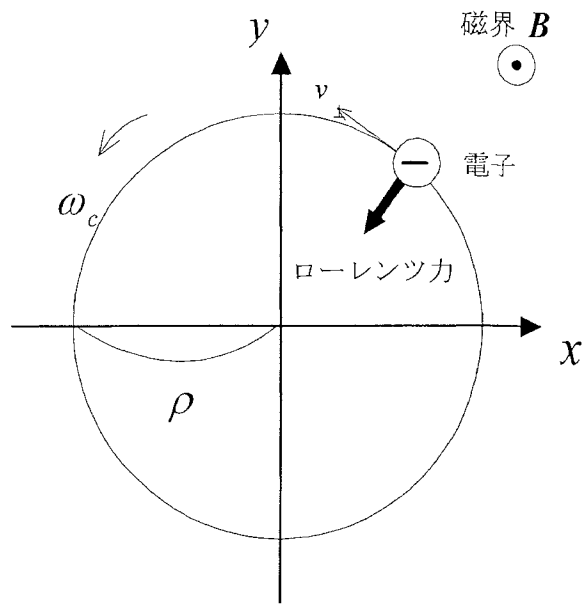


図 4-1 磁界中での電子のサイクロトロン運動

### 4-2-3 単一荷電粒子の直交電磁界中の運動

電界  $\mathbf{E}$  と磁界  $\mathbf{B}$  が印加された場合の荷電粒子の運動は、質量を  $m$ 、電荷を  $q$  とすると、4-2-2 で述べたように磁界  $\mathbf{B}$  によりローレンツ力を受けるので運動方程式は、

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4-8)$$

となる。また、速度  $\mathbf{v}$  は  $(x, y, z)$  座標系において、

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (4-9)$$

と定義される。電界  $\mathbf{E}$  と磁界  $\mathbf{B}$  が時間と空間において一定で直交させ、電界  $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$ 、磁界  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$  のように印加した場合式(4-8)は、

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}(E_x + v_y B_z) \quad (4-10a)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m}v_x B_z \quad (4-10b)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (4-10c)$$

となる。式(4-9)の関係を用いると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m} \left( E_x + \frac{dy}{dt} B_z \right) \quad (4-11a)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{q}{m} \left( \frac{dx}{dt} B_z \right) \quad (4-11b)$$

となる。

#### 4-2-4 任意の電界と磁界の角度における軌道計算

磁界中のプラズマ生成において、ECR プラズマやマグネトロンプラズマのように電界と磁界が直交していない場合があり、任意の電界と磁界の角度におけるプラズマパラメータを知ることは重要である。以下に軌道計算を示す。式(4-8)を $(x, y, z)$ 座標系で表すと

$$m \frac{dv_x}{dt} = q(E_x + v_y B_z - v_z B_y) \quad (4-12a)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = q(E_y + v_z B_x - v_x B_z) \quad (4-12b)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = q(E_z + v_x B_y - v_y B_x) \quad (4-12c)$$

と書ける。したがって、

$$v_x^0 = -(E_x + v_y B_z - v_z B_y) \Delta t + v_x \quad (4-13a)$$

$$v_y^0 = -(E_y + v_z B_x - v_x B_z) \Delta t + v_y \quad (4-13b)$$

$$v_z^0 = -(E_z + v_x B_y - v_y B_x) \Delta t + v_z \quad (4-13c)$$

となり、 $x, y, z$ はそれぞれ、

$$x = \frac{1}{2} (v_x + v_x^0) \Delta t + x^0 \quad (4-14a)$$



$$y = \frac{1}{2}(v_y + v_y^0) \Delta t + y^0 \quad (4-14b)$$

$$z = \frac{1}{2}(v_z + v_z^0) \Delta t + z^0 \quad (4-14c)$$

で求まる。しかし、実際の計算では、磁界と電界の変化をより詳細に扱うために  $\Delta t$  を小さくとり、式(4-13)を、

$$v_x^{00} = - \left( E_x + \frac{v_y + v_y^0}{2} \frac{B_z + B_z^0}{2} - \frac{v_z + v_z^0}{2} \frac{B_y + B_y^0}{2} \right) \Delta t + v_x \quad (4-15a)$$

$$v_y^{00} = - \left( E_y + \frac{v_z + v_z^0}{2} \frac{B_x + B_x^0}{2} - \frac{v_x + v_x^0}{2} \frac{B_z + B_z^0}{2} \right) \Delta t + v_y \quad (4-15b)$$

$$v_z^{00} = - \left( E_z + \frac{v_x + v_x^0}{2} \frac{B_y + B_y^0}{2} - \frac{v_y + v_y^0}{2} \frac{B_x + B_x^0}{2} \right) \Delta t + v_z \quad (4-15c)$$

$$x = \frac{1}{2}(v_x + v_x^{00}) \Delta t + x^0 \quad (4-16a)$$

$$y = \frac{1}{2}(v_y + v_y^{00}) \Delta t + y^0 \quad (4-16b)$$

$$z = \frac{1}{2}(v_z + v_z^{00}) \Delta t + z^0 \quad (4-16c)$$

として計算を行う。  $\Delta t$  はサイクロトロン周波数  $\omega_c$  に対して

$$\Delta t \ll \omega_c^{-1} \quad (4-17)$$

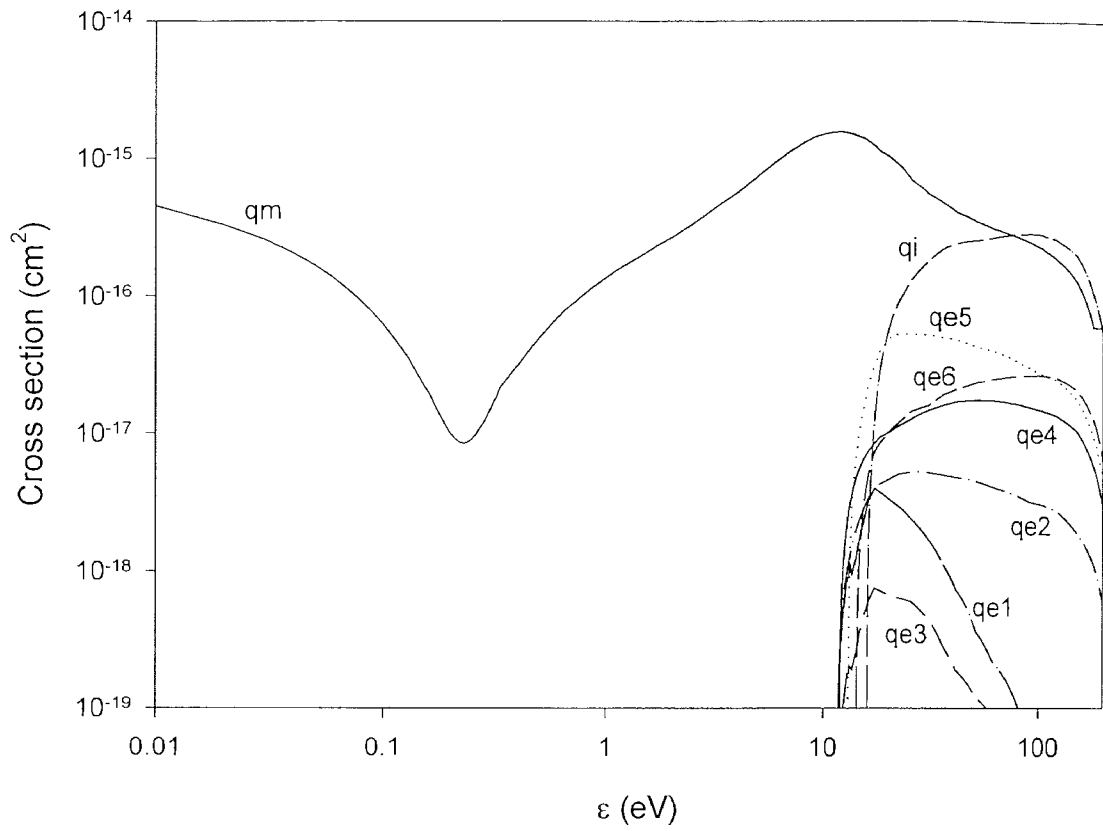
である必要がある。

### 4-3 電磁界における電子のモンテカルロシミュレーション

#### 4-3-1 衝突断面積

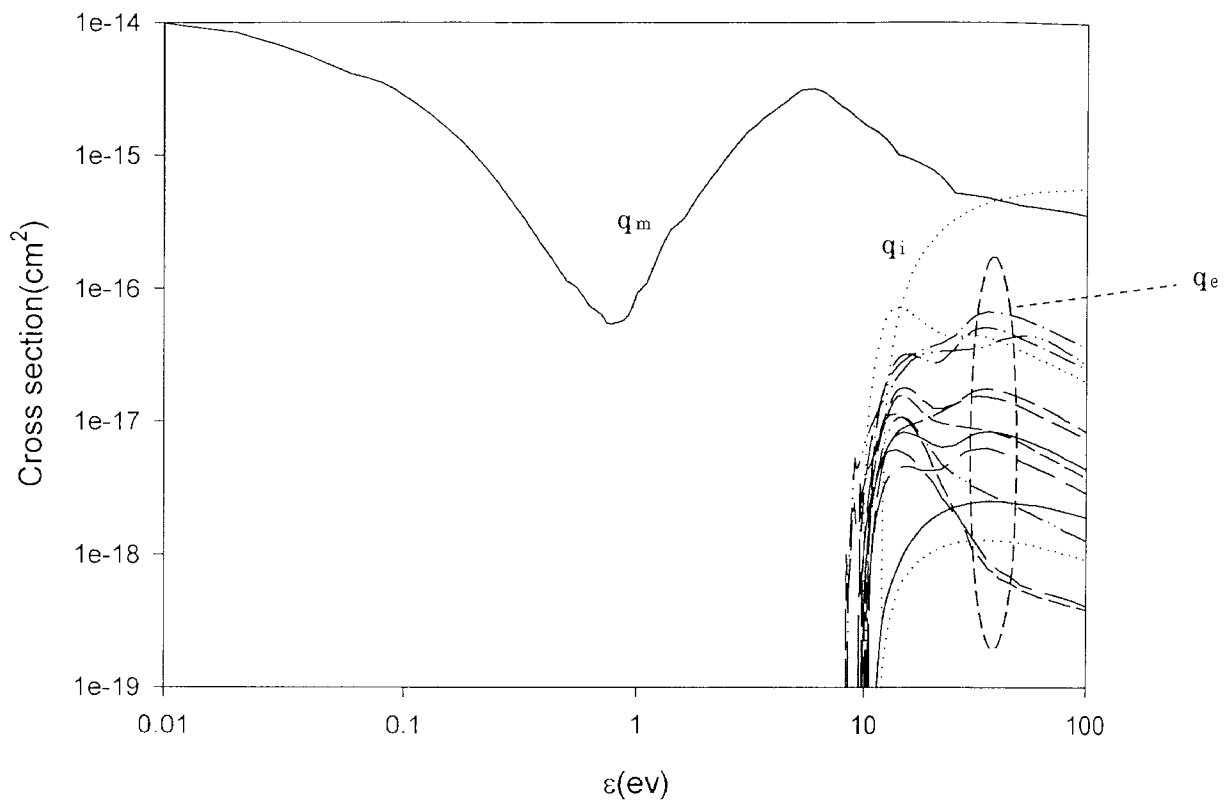
イオンスラスタはプラズマ損失を限りなく少なくするために、また効率よくプラズマ生成するために放電室内に磁場を形成しプラズマ密度や、プラズマの発生領域を制御している。磁界が印加されることで荷電粒子の動きが複雑になり、より詳細なプラズマ構造の理解が必要となっている。

本論文では、イオンスラスタの推進剤として用いられる Ar ガス、Xe ガスについて電界と磁界の角度を変えてシミュレーションを行った。図 4-2(a),(b)は計算に用いた Ar ガスと Xe ガスの衝突断面積である。



$q_m$  : 弾性衝突、 $q_i$  : 電離衝突、 $q_{e1}$ ,  $q_{e2}$ ,  $q_{e3}$ ,  $q_{e4}$ ,  $q_{e5}$ ,  $q_{e6}$  : 励起衝突

(a) Ar ガス



$q_m$  : 弾性衝突、 $q_i$  : 電離衝突、 $q_e$  : 励起衝突

(b) Xe ガス

図 4-2 衝突断面積

#### 4-3-2 Ar ガス中の電界と磁界の成す角の違いによるプラズマ・パラメータ

図 4-3 は Ar ガス中において電界と磁界の成す角度を変えて与えたときの平均エネルギーを示したグラフである。0 度するとき、平均エネルギーが最大になり、角度が大きくなるにしたがって電子は磁界によって曲げられ、エネルギーを得にくくなり、角度とともに平均エネルギーが下降する。

図 4-4 は各方向の平均エネルギーを示している。x 軸方向に磁界が印加されているので x 軸方向の平均エネルギーが y 軸方向と z 軸方向よりも大きくなっている。また、50 度付近から急に z 軸方向のエネルギーが下がっている。

図 4-5 は異なる電界と磁界の角度による各方向の平均速度を示している。z 軸方向の速度成分は 60 度付近に極大値が存在している。また、y 軸方向については 300,500 Gauss/Torr においてほぼ同様の速度となっている。

図 4-6 は Ar ガスについて、平均衝突周波数を求めたものである。電界と磁界の角度が大きくなるにつれて電界の影響が妨げられ、衝突回数が減少していくことが示されている。

図 4-7 はエネルギー分布を求めたものであり、密度が 1 となるように正規化している。0 度と 30 度においては高磁界においてもほぼ変化がなく、60 度付近で分布に若干変化が見られる結果となっている。

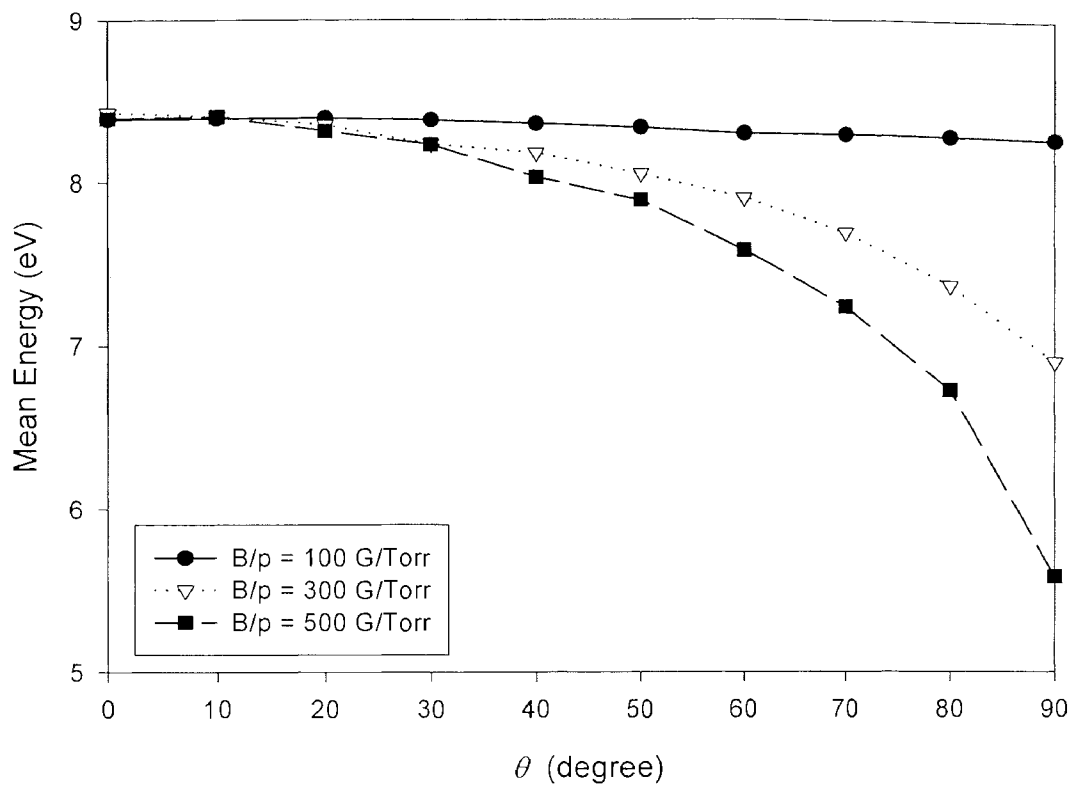
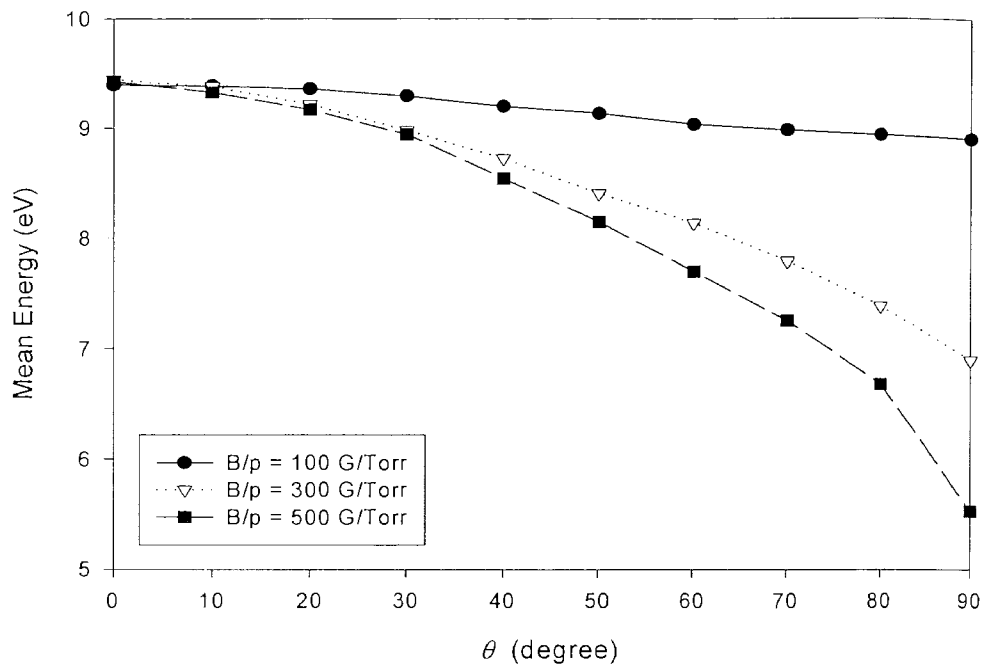
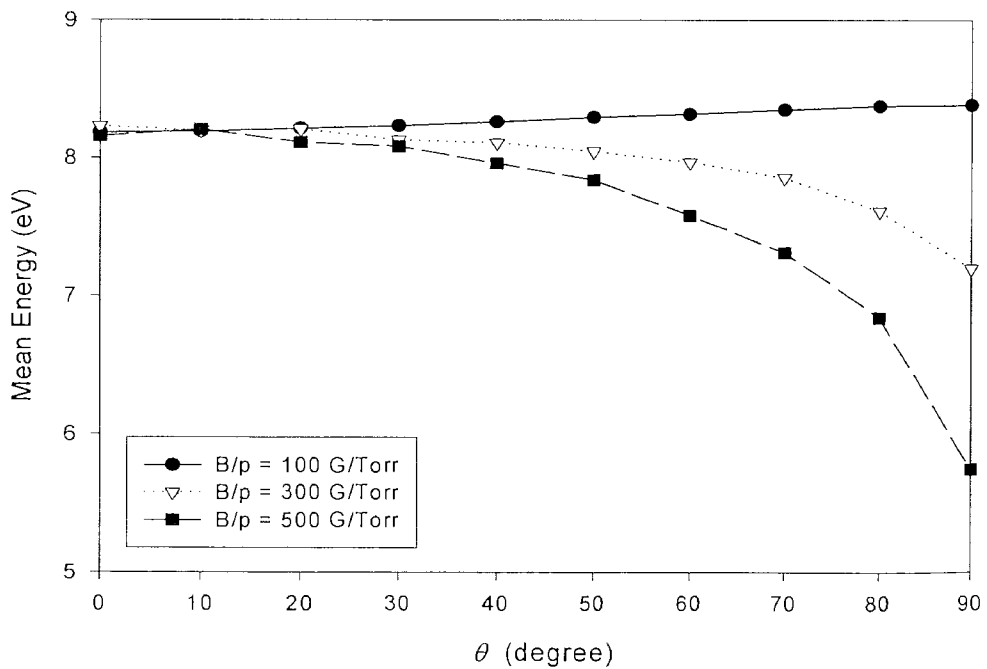


図 4-3 電界と磁界の異なる角度における平均エネルギー :  $E/N=283\text{Td}$

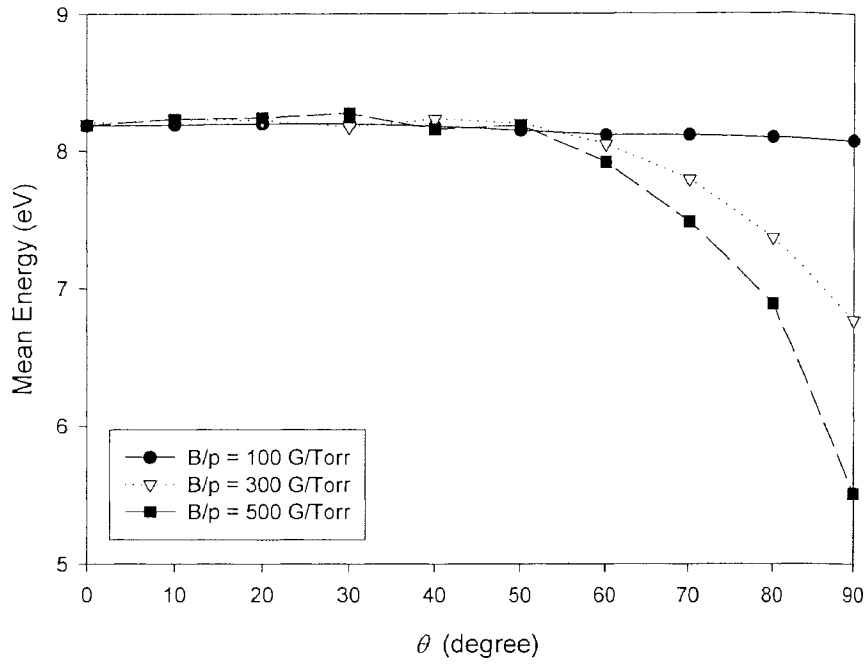


(a) x 成分,  $E/N=283\text{Td}$ ,  $p=0.1\text{Torr}$



(b) y 成分,  $E/N=283\text{Td}$ ,  $p=0.1\text{Torr}$

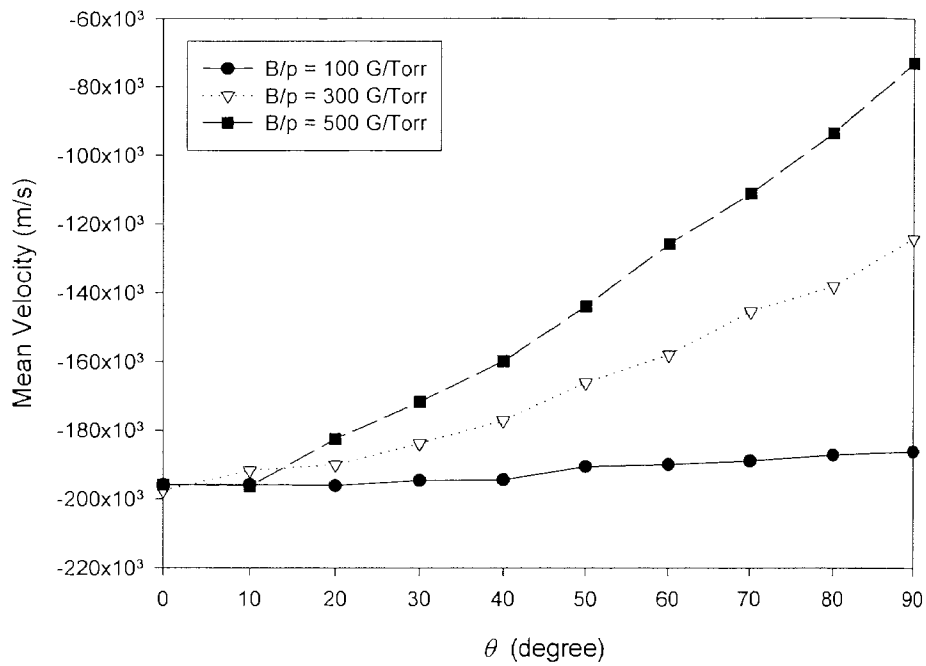
図 4-4 電界と磁界の異なる角度における各方向のエネルギー



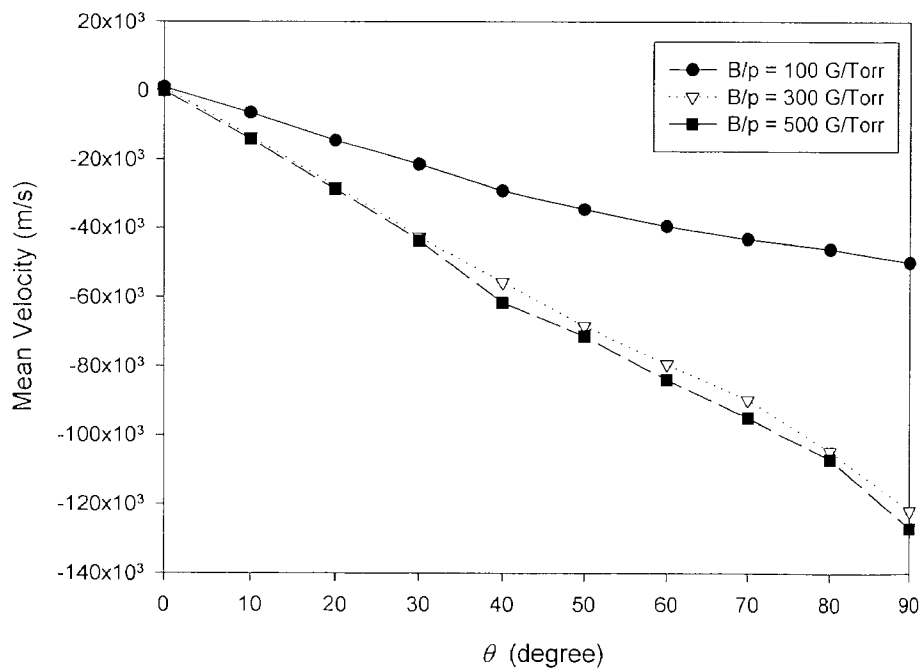
(c)  $z$  成分,  $E/N=283\text{Td}$ ,  $p=0.1\text{Torr}$

図 4-4 電界と磁界の異なる角度における各方向のエネルギー



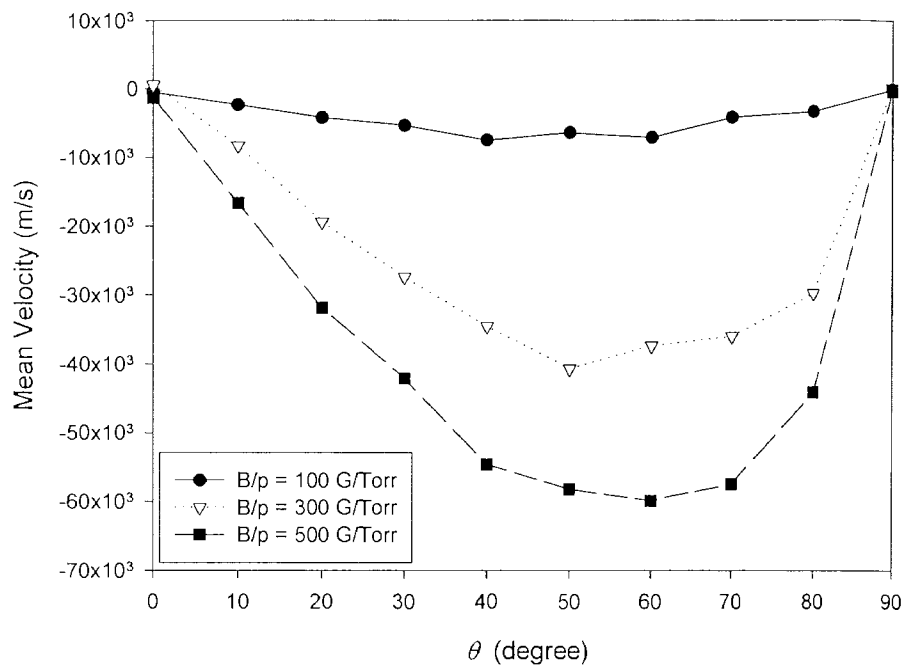


(a)  $x$  成分,  $E/N=283$ Td,  $p=0.1$ Torr



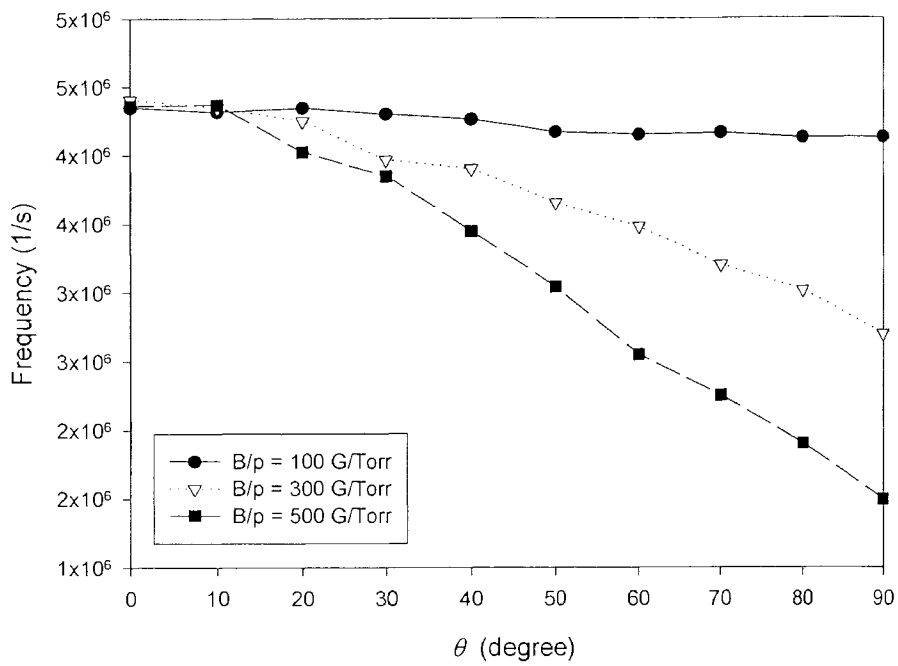
(b)  $y$  成分,  $E/N=283$ Td,  $p=0.1$ Torr

図 4-5 電界と磁界の異なる角度における各方向の平均速度

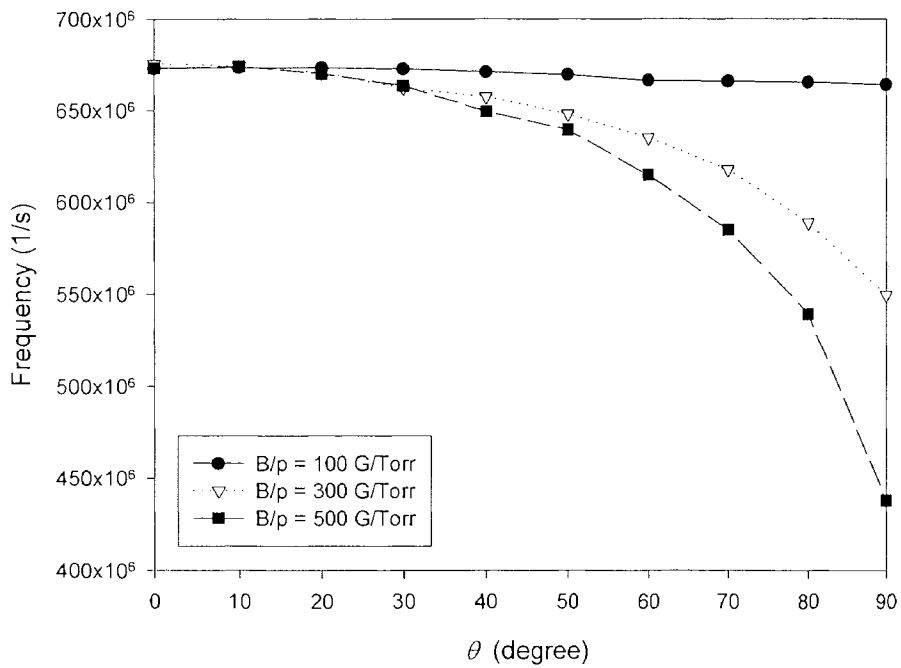


(c) z 成分,  $E/N=283$ Td,  $p=0.1$ Torr

図 4-5 電界と磁界の異なる角度における各方向の平均速度

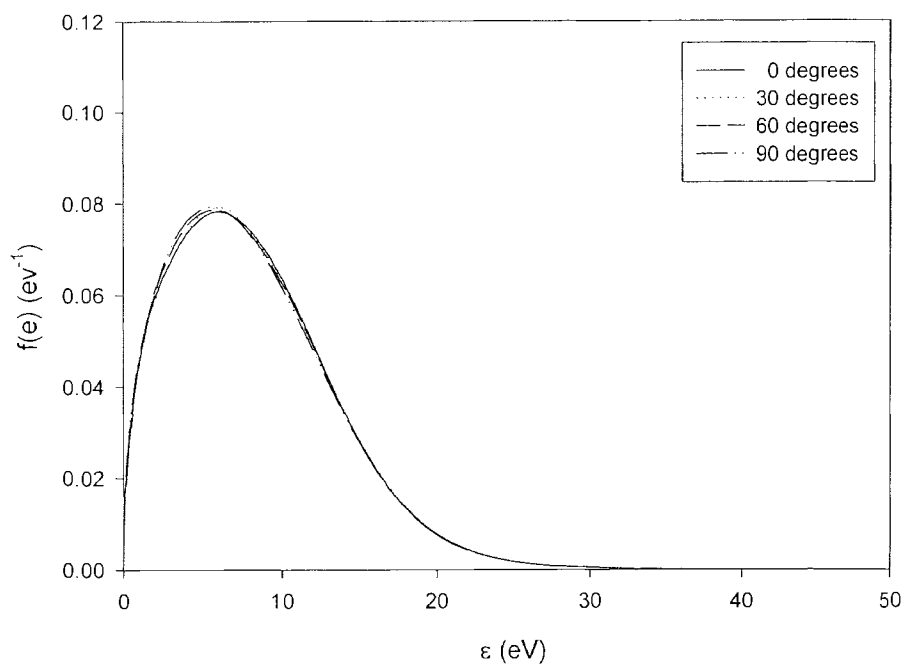


(a) 電離突周波数

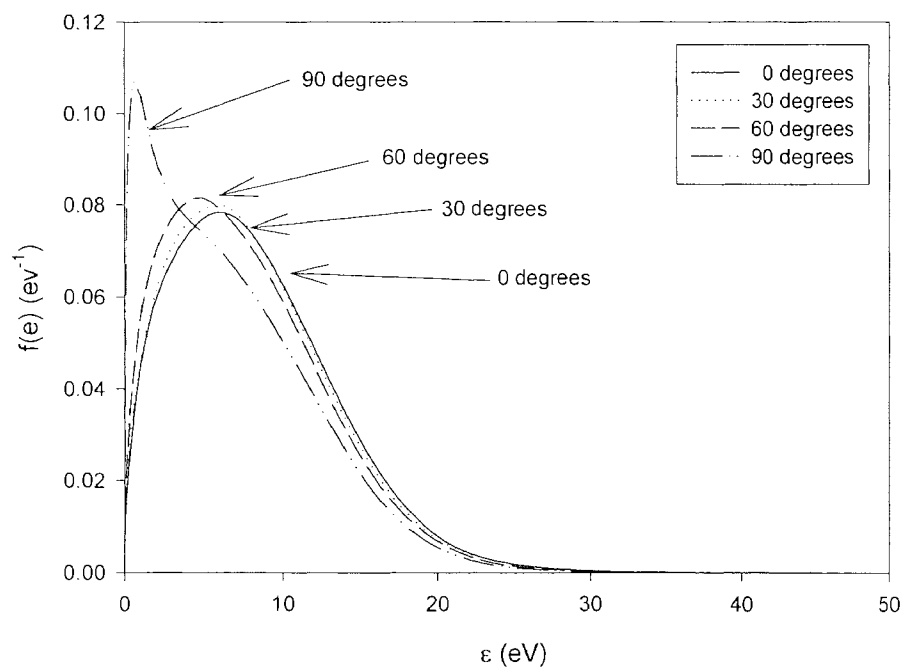


(b) 全衝突周波数

図 4-6 電界と磁界の異なる角度における衝突周波数

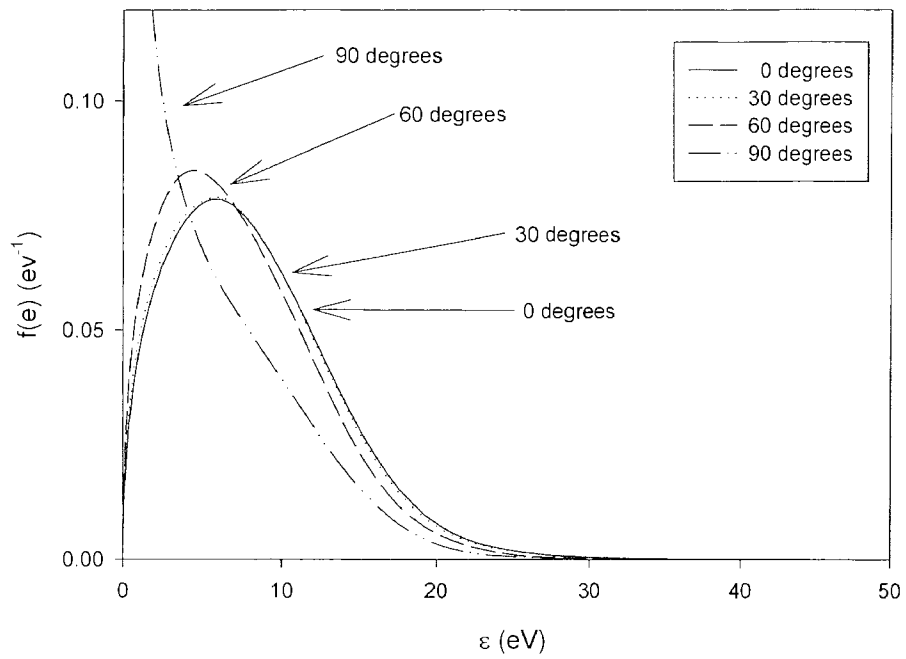


(a)  $E/N=283\text{Td}$ ,  $B/p=100\text{G/Torr}$



(b)  $E/N=283\text{Td}$ ,  $B/p=300\text{G/Torr}$

図 4-7 電界と磁界の異なる角度におけるエネルギー分布



(c)  $E/N=283\text{Td}$ ,  $B/p=500\text{G/Torr}$

図 4-7 電界と磁界の異なる角度におけるエネルギー分布

#### 4-3-3 Xe ガス中の電界と磁界の成す角の違いによるプラズマ・パラメータ

図 4-8 は電界と磁界の成す角度を変えて与えたときの平均エネルギーを示したグラフである。0 度 のとき、平均エネルギーが最大になり、角度が大きくなるにしたがって電子は磁界によって曲げられ、エネルギーを得にくくなり、角度とともに平均エネルギーが下がっていく。Ar ガスと同様の傾向を示している。特徴としては Ar ガスと比べ平均エネルギーが低いことが挙げられる。これは励起衝突の本数が多いことからエネルギーを多く失うためと考えられる。

図 4-9 は各方向の平均エネルギーを示している。x 軸方向に磁界が印加されているので x 軸方向の平均エネルギーが y 軸方向と z 軸方向よりも大きくなっている。ここでもエネルギーは若干低いが Ar ガスと同じ傾向を示している。

図 4-10 は異なる電界と磁界の角度による各方向の平均速度を示している。z 軸方向の速度成分は 50 度付近に極大値が存在している。また、y 軸方向については 300,500 Gauss/Torr において同程度の速度となっている。

図 4-11 は Ar ガスについて、平均衝突周波数を求めたものである。電界と磁界の角度が大きくなるにつれて電界の影響が妨げられ、衝突回数が減少していくことが示されている。

図 4-21 はエネルギー分布を求めたものであり、密度が 1 となるように正規化して示している。0 度と 30 度においては高磁界においてもほぼ変化がなく、60 度付近で分布に若干変化が見られる結果となり、Ar ガスと同様の傾向を示し、Ar ガスとの差異はエネルギーが若干低いことが挙げられる。

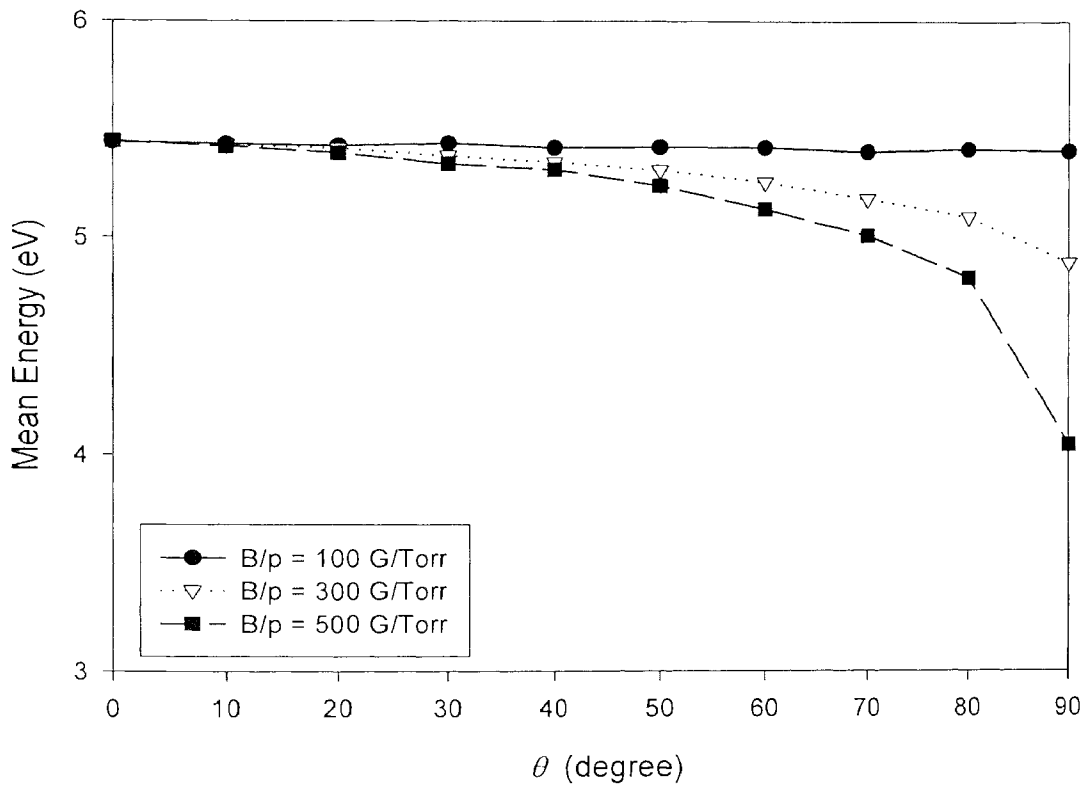
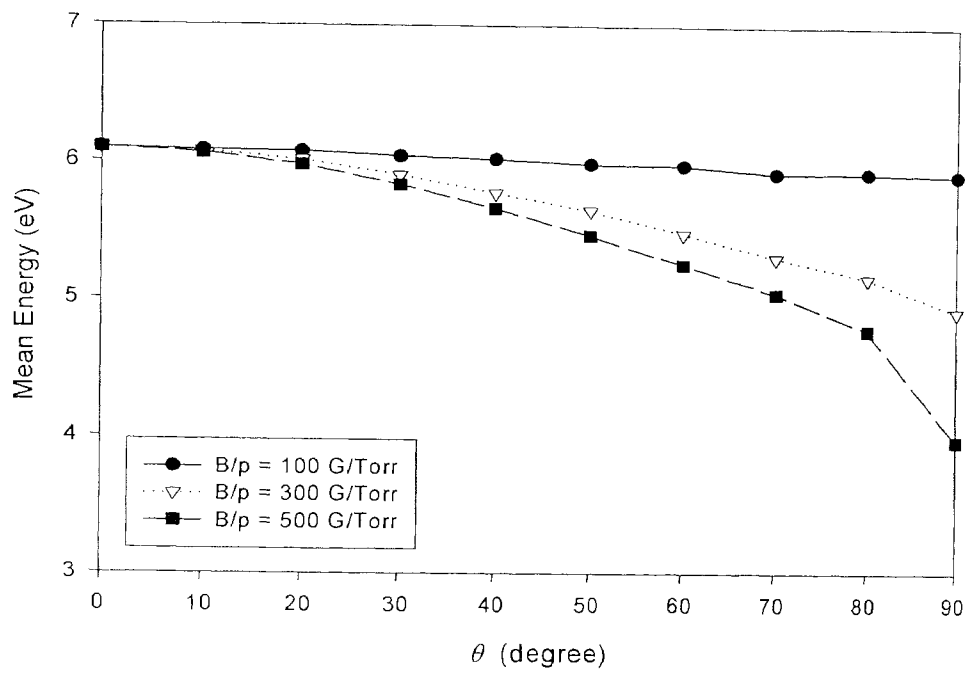
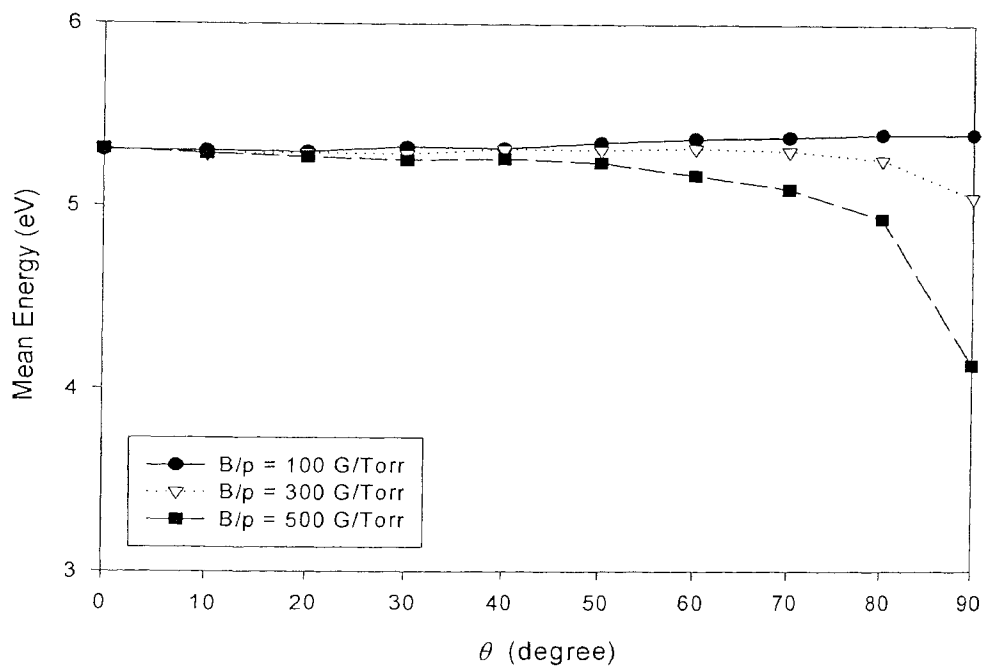


図 4-8 電界と磁界の異なる角度における平均エネルギー :  $E/N=283\text{Td}$



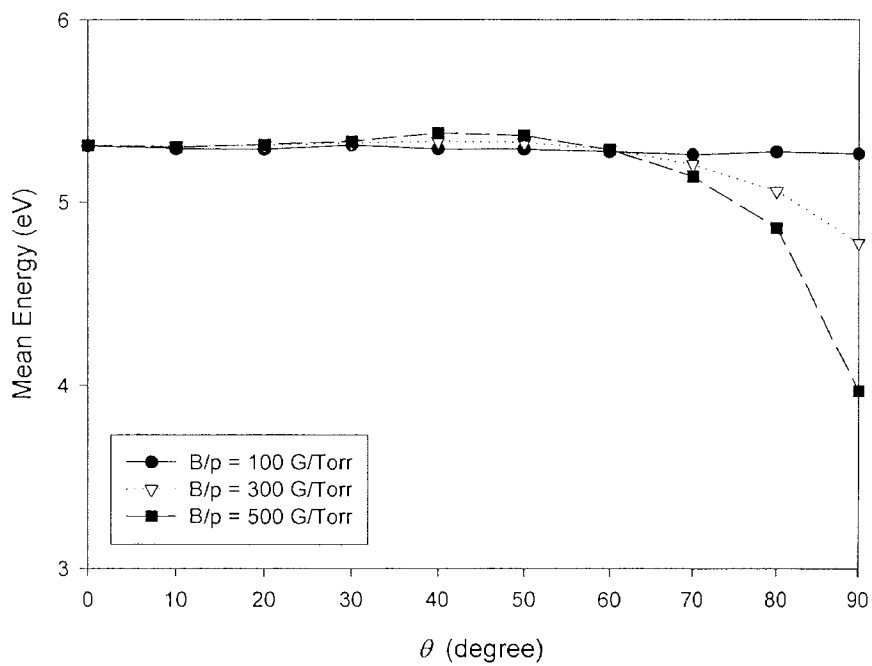
(a) x 成分,  $E/N=283\text{Td}$ ,  $p=0.1\text{Torr}$



(b) y 成分,  $E/N=283\text{Td}$ ,  $p=0.1\text{Torr}$

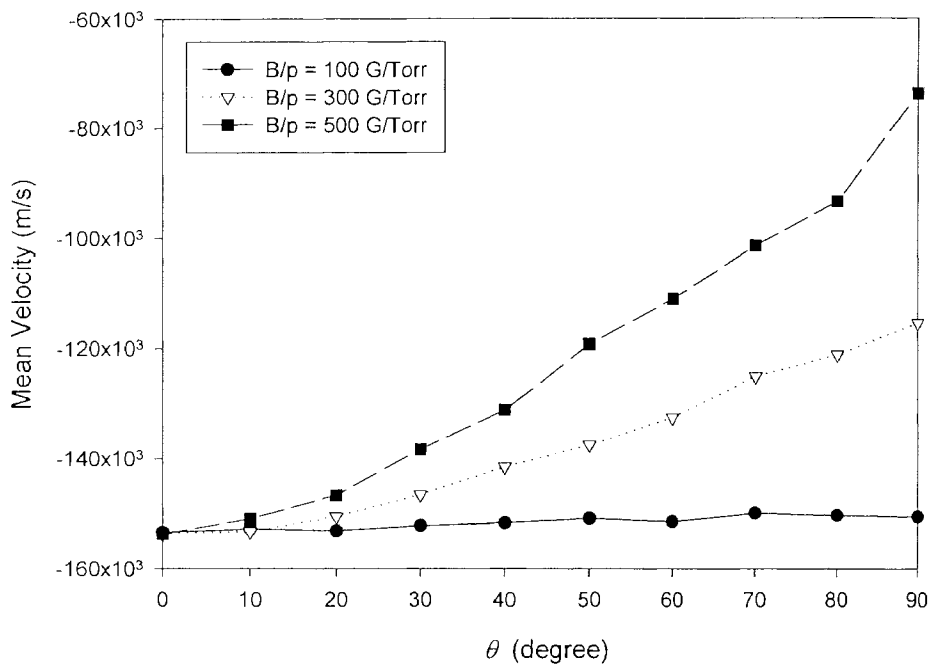
図 4-9 電界と磁界の異なる角度における各方向のエネルギー



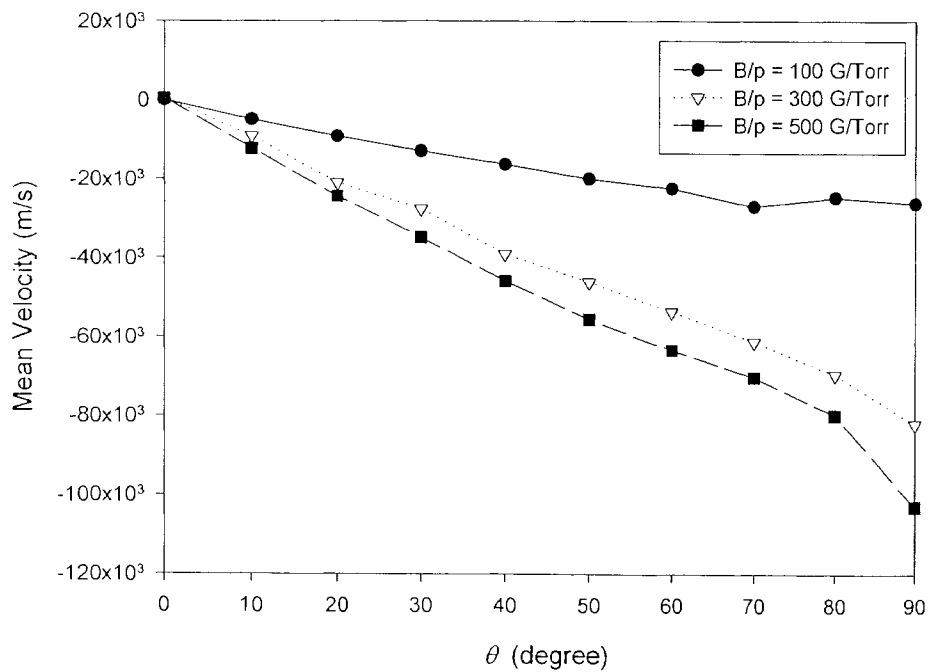


(c) z 成分,  $E/N=283\text{Td}$ ,  $p=0.1\text{Torr}$

図 4-9 電界と磁界の異なる角度における各方向のエネルギー

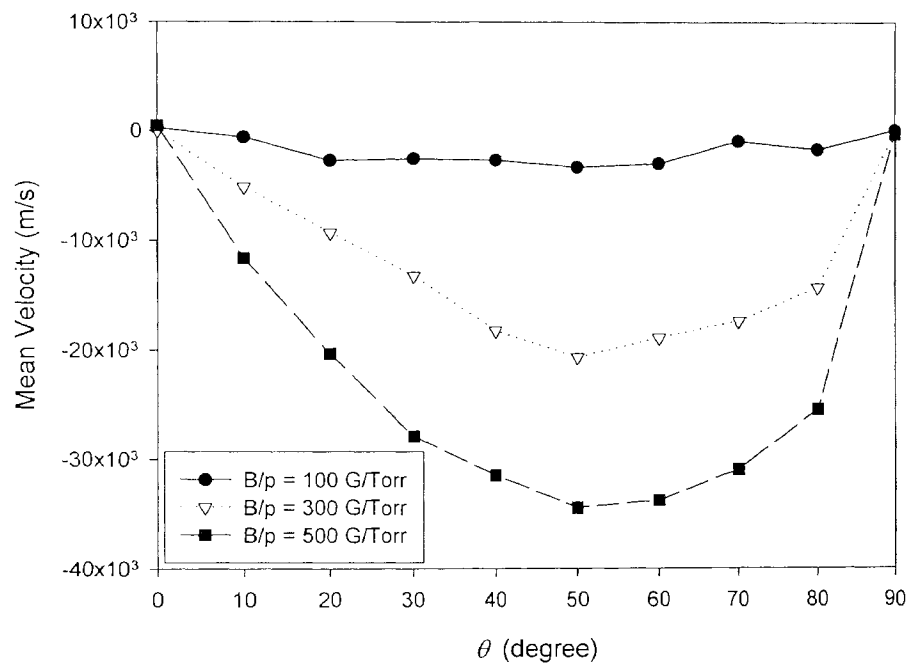


(a)  $x$  成分,  $E/N=283$ Td,  $p=0.1$ Torr



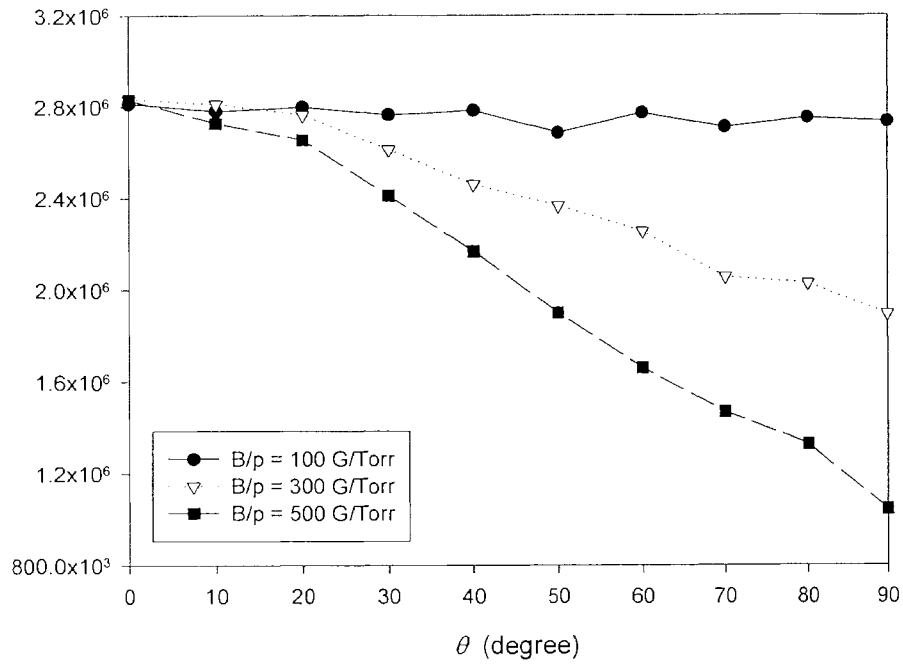
(b)  $y$  成分,  $E/N=283$ Td,  $p=0.1$ Torr

図 4-10 電界と磁界の異なる角度における各方向の平均速度

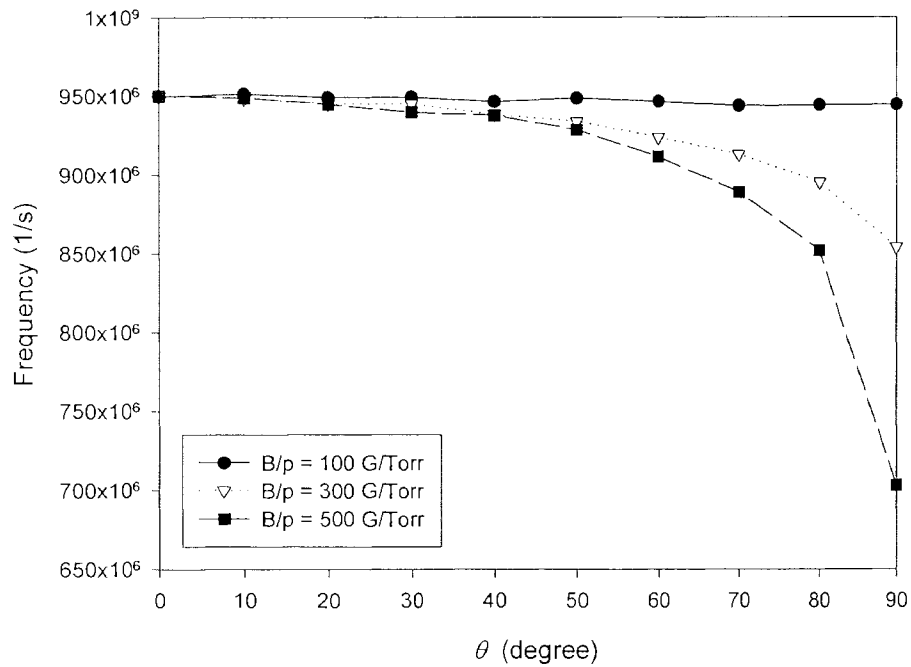


(c)  $z$  成分,  $E/N=283$ Td,  $p=0.1$ Torr

図 4-10 電界と磁界の異なる角度における各方向の平均速度

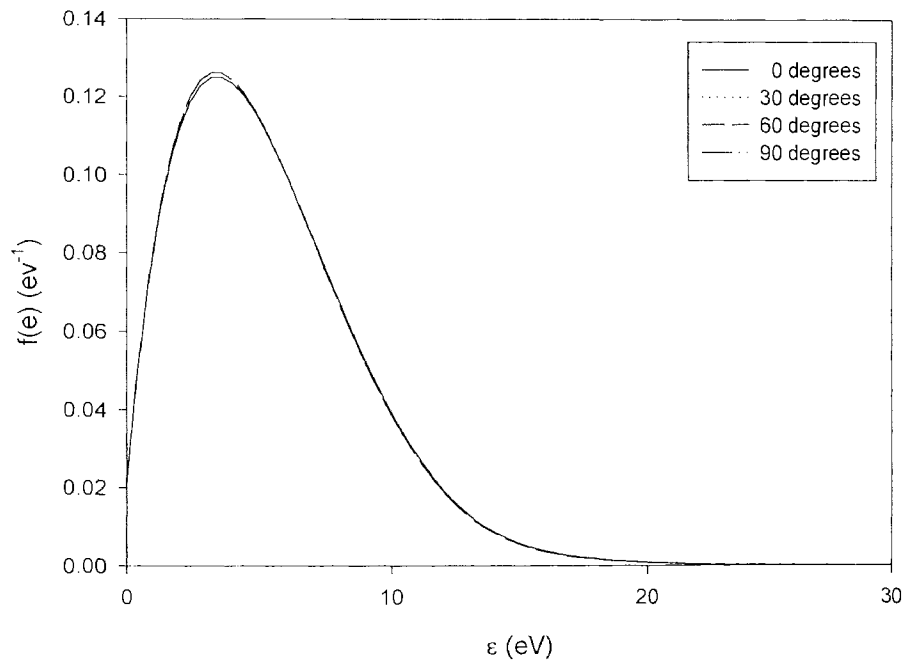


(a) 電離突周波数

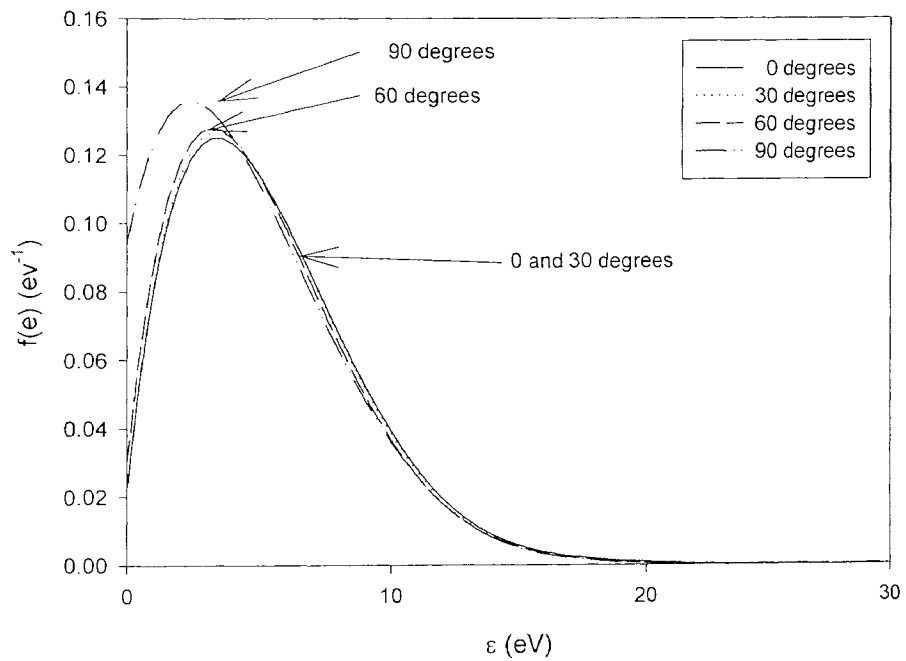


(b) 全衝突周波数

図 4-11 電界と磁界の異なる角度における衝突周波数

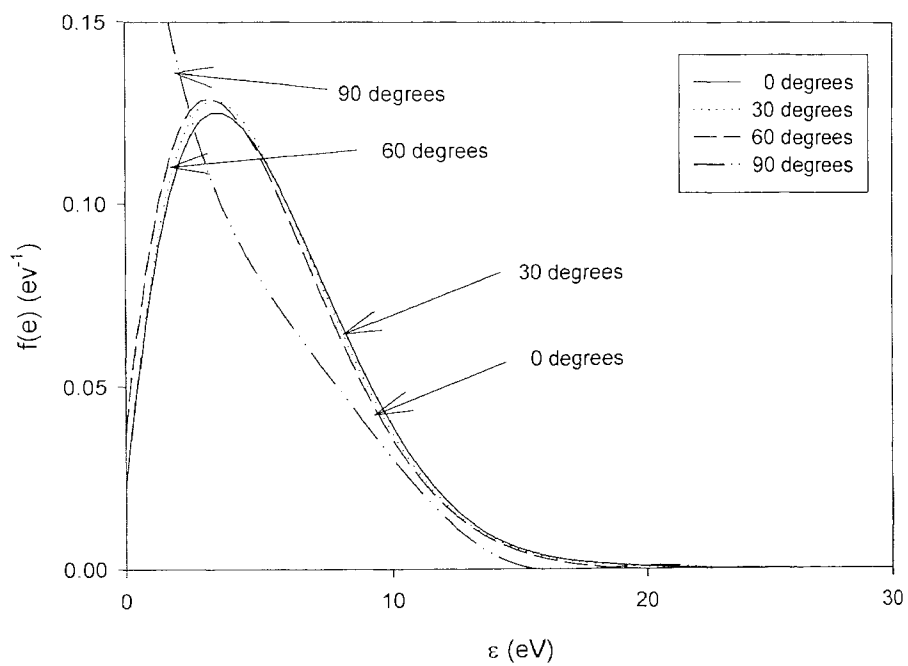


(a)  $E/N=283\text{Td}$ ,  $B/p=100\text{G/Torr}$



(b)  $E/N=283\text{Td}$ ,  $B/p=300\text{G/Torr}$

図 4-12 電界と磁界の異なる角度におけるエネルギー分布



(c)  $E/N=283\text{Td}$ ,  $B/p=500\text{G/Torr}$

図 4-12 電界と磁界の異なる角度におけるエネルギー分布

## 4-4 マイクロ波放電型プラズマ源のシミュレーション

### 4-4-1 マイクロ波放電型イオンスラスタ

ECR によってプラズマを生成するマイクロ波放電型イオンスラスタは、放電電極を備えていないために、放電電極の損耗が無く長寿命が期待できることや、直流放電型等の他スラスタと比べシステム構成が単純であるといった利点をもつ。しかし、研究開発においては、マイクロ波と永久磁石により放電室内に複雑に形成される電磁界により、プラズマ源の設計指針を得ることが難しいといえる。探査衛星「はやぶさ」に搭載されたマイクロ波スラスタは 18,000 時間を越える耐久試験、また現在も稼動していることから十分な耐久性を有し、また推進性能も実用に十分なものである。しかし、近年、小型衛星の姿勢制御・主推進として小型な電気推進機の需要が増しており、小型化や推力密度の向上など研究開発は日々行われている。本章では、複雑な運動体系をなす電磁界中の粒子をモンテカルロ法により模擬し、マイクロ波放電型イオンスラスタのプラズマ源におけるプラズマ生成の構造を解析する。

### 4-4-2 計算体系

本シミュレーションでは、図 4-13 に示す形状の放電室を計算対象とする。放電室内にはリング状に永久磁石が 2 列極性は逆向きに配置され、放電室内の磁力形状は図 4-14、図 4-15、図 4-16 に示されるようになる。

本シミュレーションにおいては、平川ら<sup>[4-2]</sup>と同様の計算条件を採用した。計算条件を以下に示す。

- 1) 空間電位の影響、すなわち静電界の影響は無視できる
- 2) マイクロ波による波動電界の影響を受ける
- 3) マイクロ波の磁界成分は外部磁界と比べ微小なため、その影響は無視できる。
- 4) 壁や磁石に衝突した電子は失われる
- 5) スクリーニンググリッドに到達した電子は開口比に応じて反射、消失する。

(これはスクリーングリッドと壁を等電位としたため)

ここで、1)と 3)から放電室内に現れる電界  $E$  はマイクロ波の電界のみを示すことになる。マイクロ波に関しても平川らと同様の条件を採用し、マイクロ波は円偏波とし電子が右回りの円偏波電界から共鳴的にエネルギーを得ることを考慮した。またマクスウェル方程式を解かず、

- 1) 軸方向に進行
- 2) 波長は十分に長い。  $z$  座標による違いは無視できる。
- 3) 共鳴が起きてもマイクロ波は減衰しない。

との条件を用いた。

また、シミュレーション条件としてマイクロ波周波数 4.25GHz、電子は放電室内に一様、初期エネルギーは 0 eV、推進剤はキセノン、放電室内の気圧は 5mTorr とした。マイクロ波放電型のプラズマ源においては、マイクロ波と外部電場により形成される ECR レイヤーがプラズマ生成に大きく影響する。ECR レイヤーとは電子サイクロトロン共鳴により、効率的に電子がエネルギーを得ることができる領域である。今回はマイクロ波周波数を 4.25GHz としたので、電子サイクロトロン周波数が一致する磁力は 0.15T となる。本シミュレーションにおいて放電室の磁気形状及び ECR レイヤーは図 4-17 のようになる。また、シミュレーションに際して、本シミュレーションコードが適切に ECR レイヤーにて機能するか調べた。ECR レイヤーにおける電子の飛行軌道を図 4-19 に示す。電子は回転しながら 2 本のリング間を往復運動していることがわかる。これは國中<sup>[4-10]</sup>が実験により得た知見として磁界トラックが無限軌道を構成するときの  $\nabla B \times B$  ドリフト(図 4-18)と一致する。また、効率的に ECR 放電を起こしプラズマを生成するためには、

- 1) 磁束管両端に電子加速のための ECR 磁界が形成されていること
- 2) 高速電子をミラー磁界閉じ込めするために ECR 条件を十分に上回る磁力が両リング状の永久磁石表面にあること
- 3) ガス分子との衝突確率を高めるため、磁束管に沿った電子飛行経路が長いこと



4)  $\nabla B \times B$  ドリフトのために磁界トラックが無限軌道を構成することが挙げられている。本シミュレーションにおいて 1)に示す条件は図 4-17 に示されるように 0.15T の ECR 領域があり、2)の条件は図 4-17 から 0.4T を上回っているのが示されており、國中の行った実験と一致する。また、3)に関しては飛行軌道を示した図 4-19 から ECR レイヤー上を往復運動しているのがわかる。4)は放電室にリング状に配置した永久磁石から無限軌道が形成されており、本シミュレーションにおいては、効率的にプラズマ生成が行われる条件を模擬しているといえる。

#### 4-4-3 シミュレーション結果

まず、プラズマが生成される領域を調べるために 100ns までに電離が起こった位置を記録したものを図 4-20 に示す。(a)から放電室中央においては電離が起こっていないことがわかる。(b)からは、ECR 領域でさかんに電離が起こること、ECR 領域より内側の磁界がさらに強い場所では電離が起こらないことがわかる。このことから、ECR レイヤーでエネルギーを得た電子による電離とミラー磁界の効果により磁石付近に電子が近づけないことをよく示した結果といえる。

図 4-21 はマイクロ波投入時から 100ns 経過したときの放電室内の電子の密度である。全体を初期に与えた電子数で割った数値で示している。最初に放電室内に一様に存在していた電子がマイクロ波の投入により、ECR レイヤー付近でエネルギーを持つ電子が増え始めたのがわかる。その一方で、ECR レイヤーから遠いところでは、初期位置から大きくは動かない。図 4-23 に示す 200ns まで時間を進めると、ECR レイヤーでの電子密度が上昇しているのがわかる。ECR レイヤーでエネルギーを得た電子によるガス分子の電離が進み、放電室内の電荷の不均一性が増している。また、図 4-22 は細部確認のために 2 次元 LPWS により 100ns 時の電子密度を示したものである。図 4-21 では粒子数が少なく分布にかなりのムラが見られるが図 4-22 では LPWS により滑らかかつ統計変動を抑えた結果を得ている。

また、図 4-24 は 100ns 時における電子の 1-40eV のエネルギー分布である。100ns 時においては電子全体の約 70% が 0-1eV のエネルギーであり、60% についてはほぼ 0eV であった。図 4-23 では約 30% の電子のエネルギー分布が示されているが、粒子数が少ないため、Mesh サンプリングでは統計変動により結果の精度が大きく低下しているのが見て取れる。LPWS では、統計変動を受けず、サンプリングが可能なことがわかる。また、エネルギー分布から、Xe が電離するときに必要なエネルギーである 12.13eV に達している電子は少なく、図 4-21 から推測されるように、ECR レイヤー付近の一部の電子のみがエネルギーを得ていることがわかる。

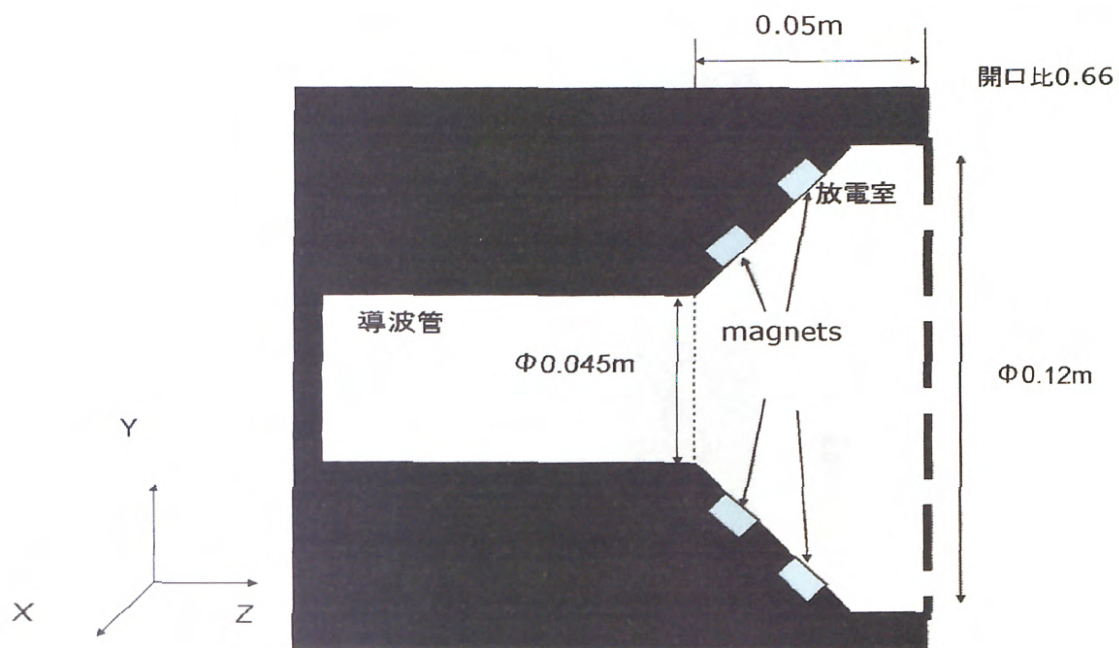


図 4-13 マイクロ波放電型イオンスラスタ形状

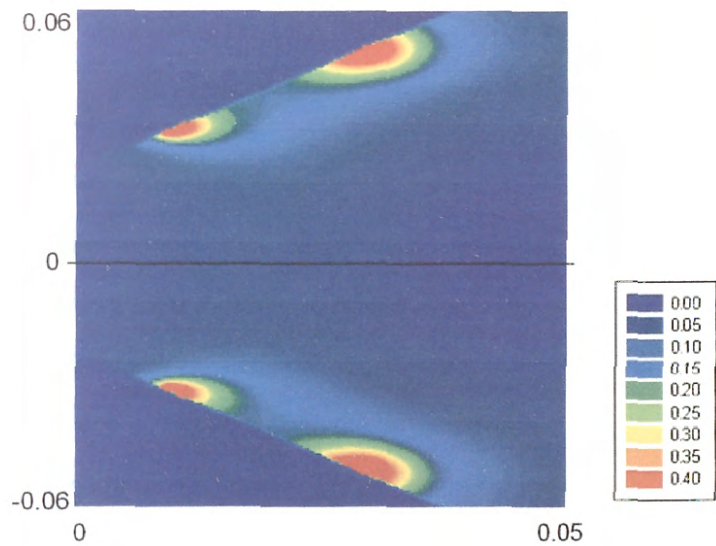


図 4-14 磁界 B Y-Z 平面

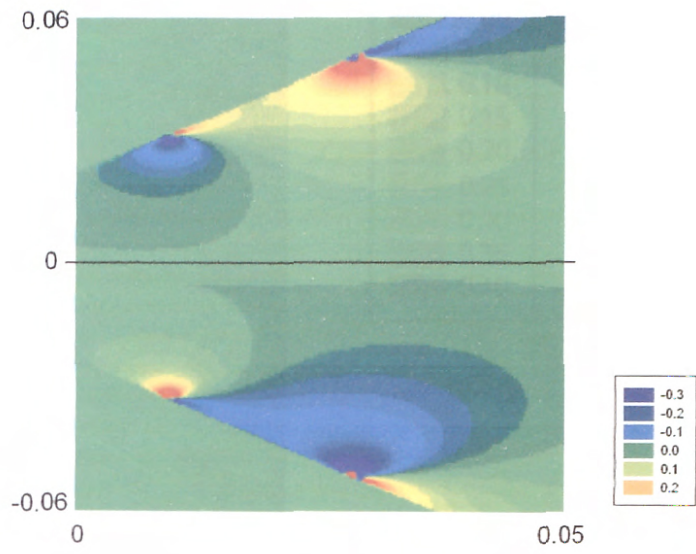


图 4-15 磁界  $B_y$  Y-Z 平面

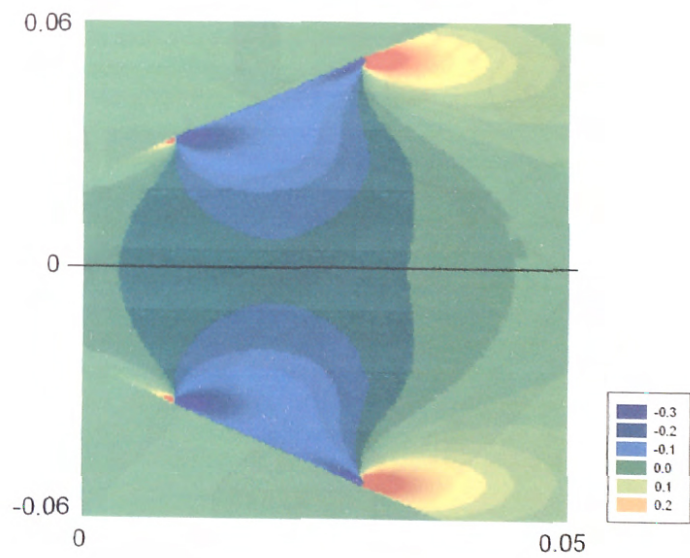


图 4-16 磁界  $B_z$  Y-Z 平面

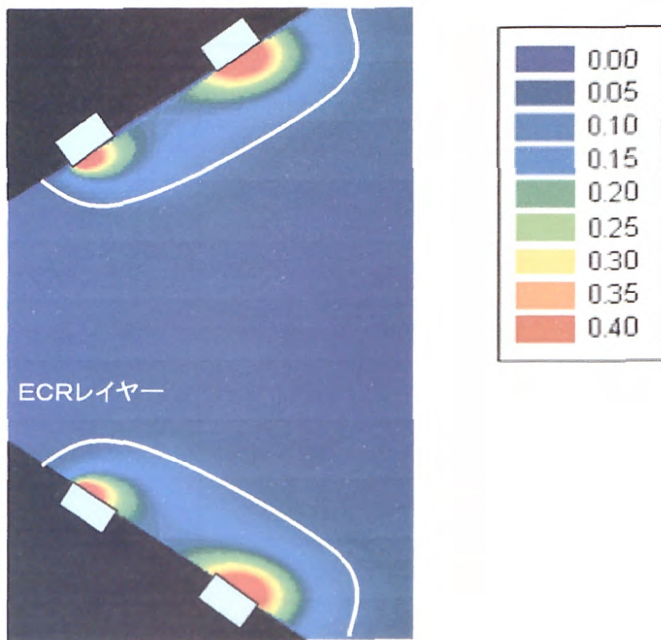


図 4-17 ECR レイヤー形状

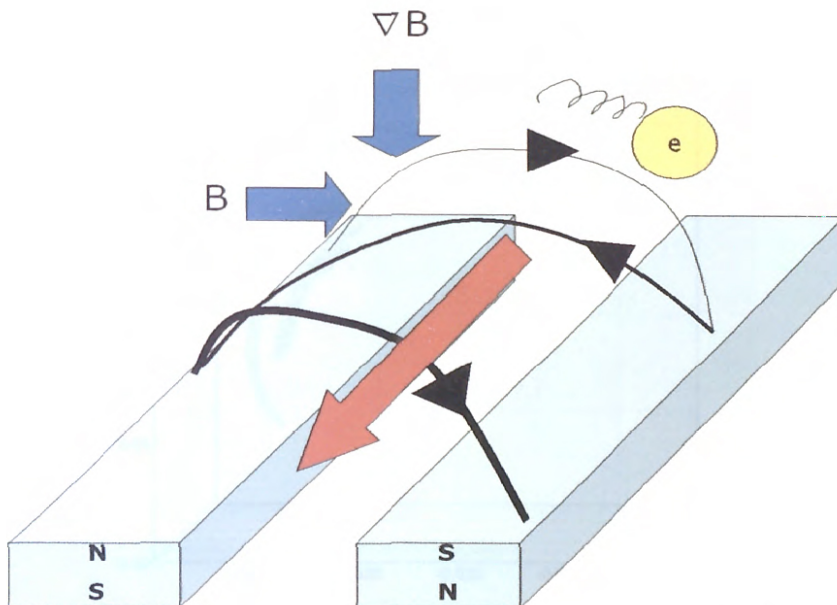
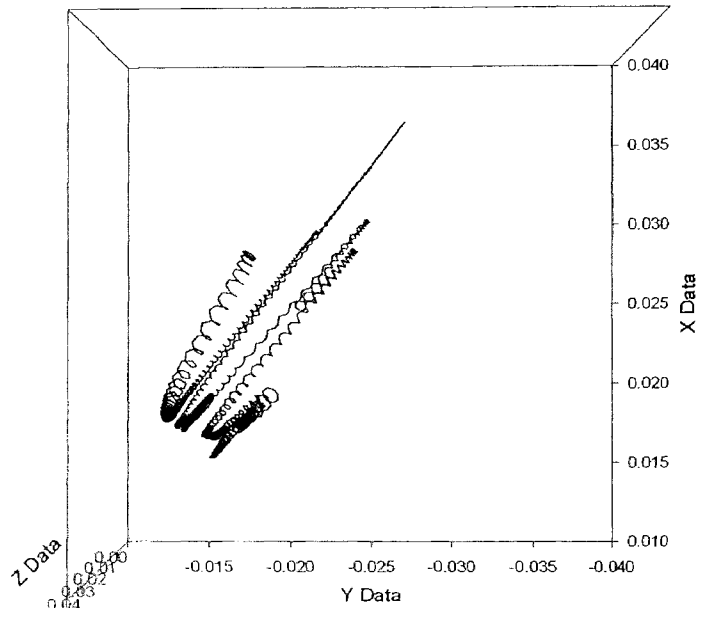
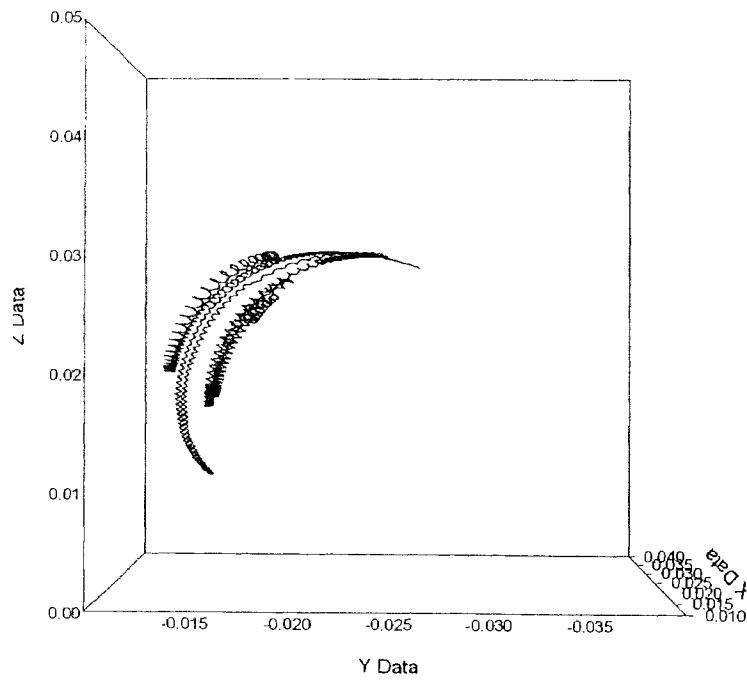


図 4-18 永久磁石による無限軌道と  $\nabla B \times B$  ドリフト

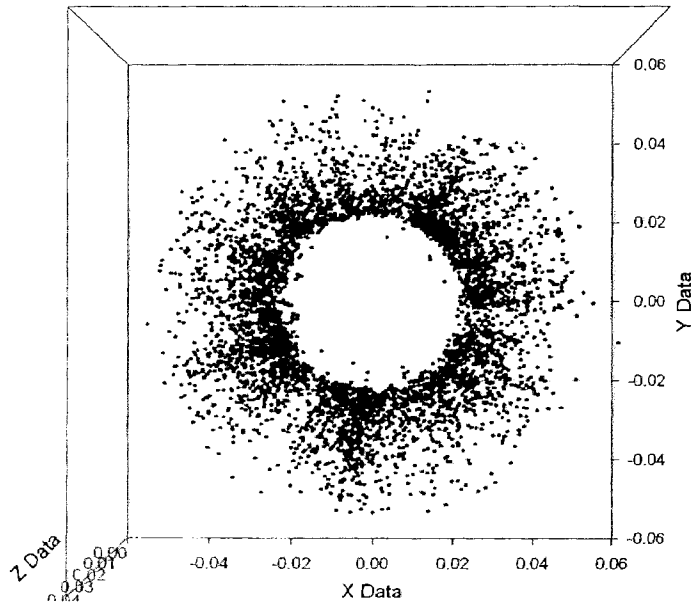


(a) X-Y 平面

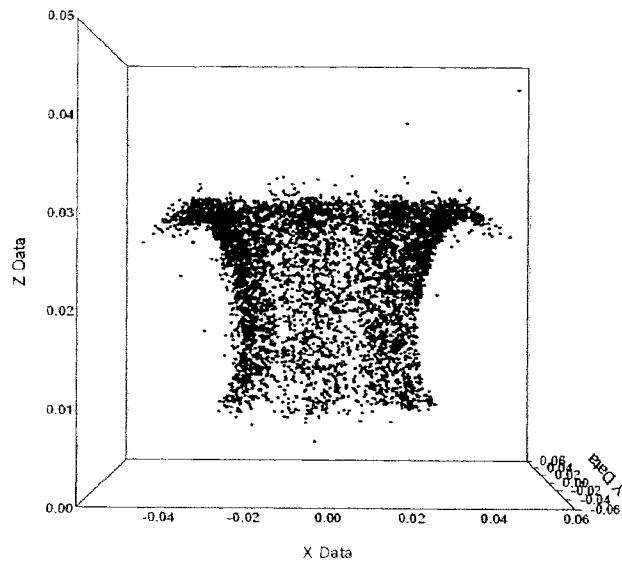


(b) Y-Z 平面

図 4-19 電子の飛行軌道

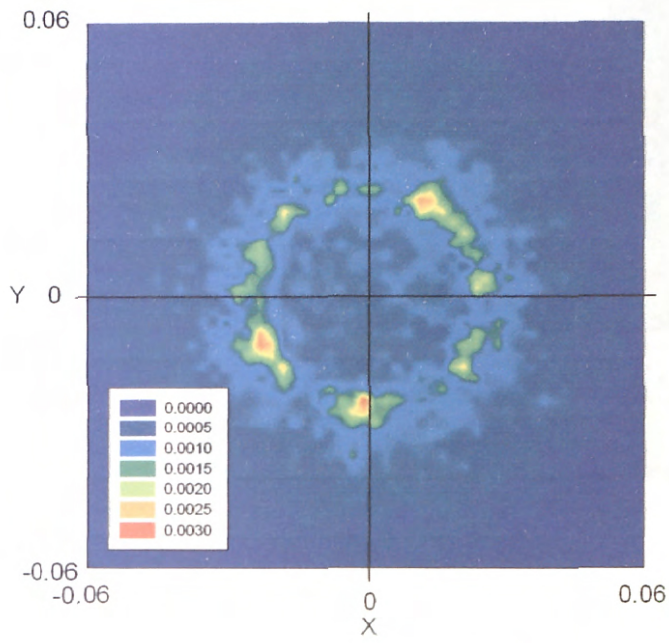


(a) X-Y 平面

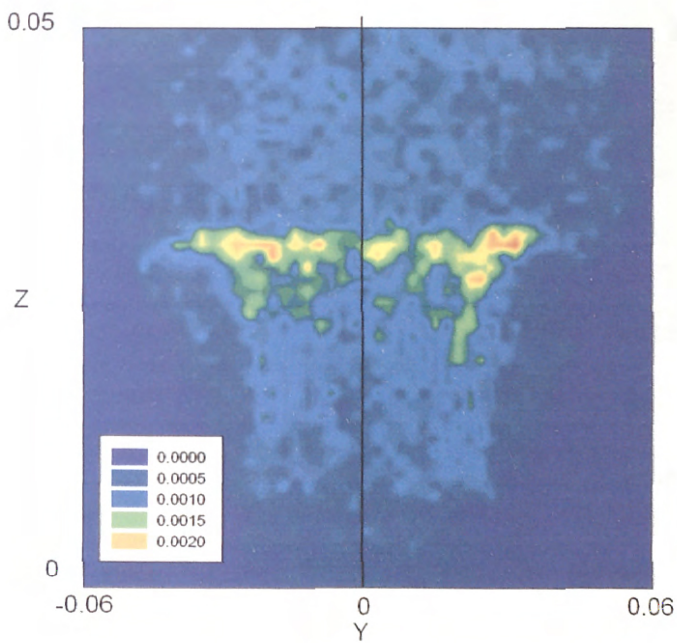


(b) Y-Z 平面

图 4-20 電離位置



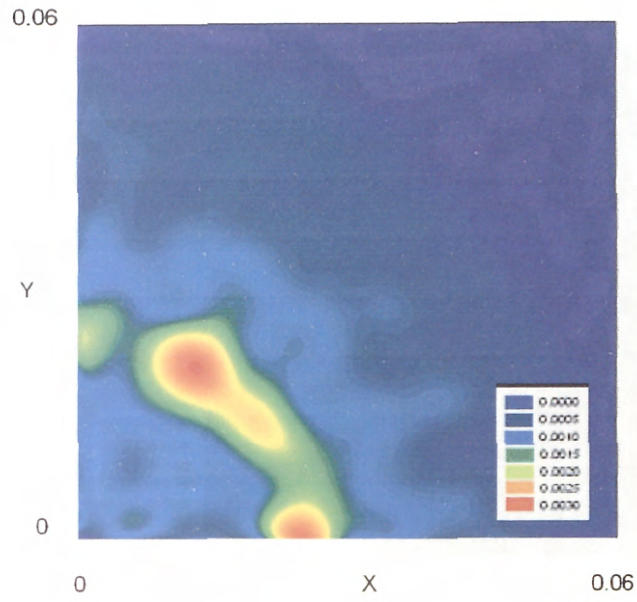
(a) X-Y 平面



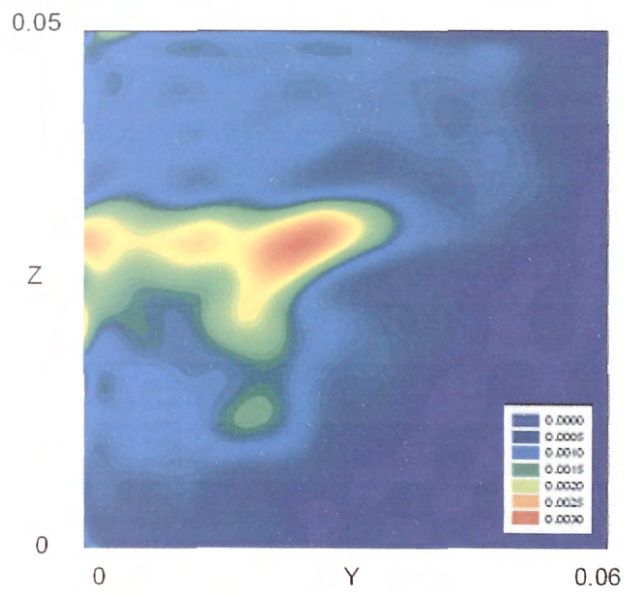
(b) Y-Z 平面

図 4-21 電子密度分布 100ns Xe ガス



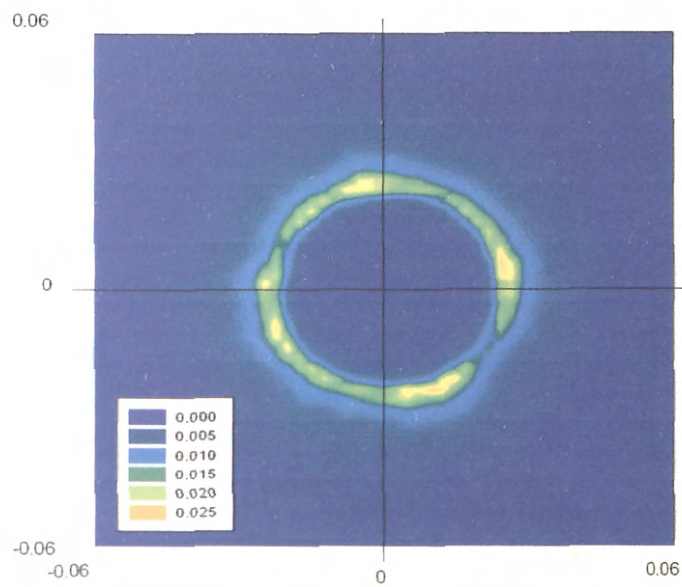


(a) X-Y 平面  $x=0-0.6$ ,  $y=0-0.06$

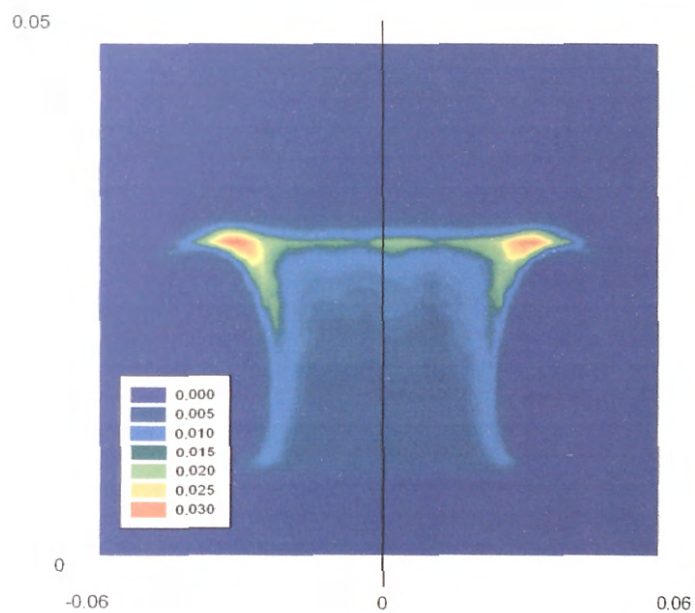


(b) Y-Z 平面  $y=0-0.6$ ,  $z=0-0.05$

図 4-22 LPWS によるサンプリング



(a) X-Y 平面



(b) Y-Z 平面

図 4-23 電子密度分布 200ns Xe ガス

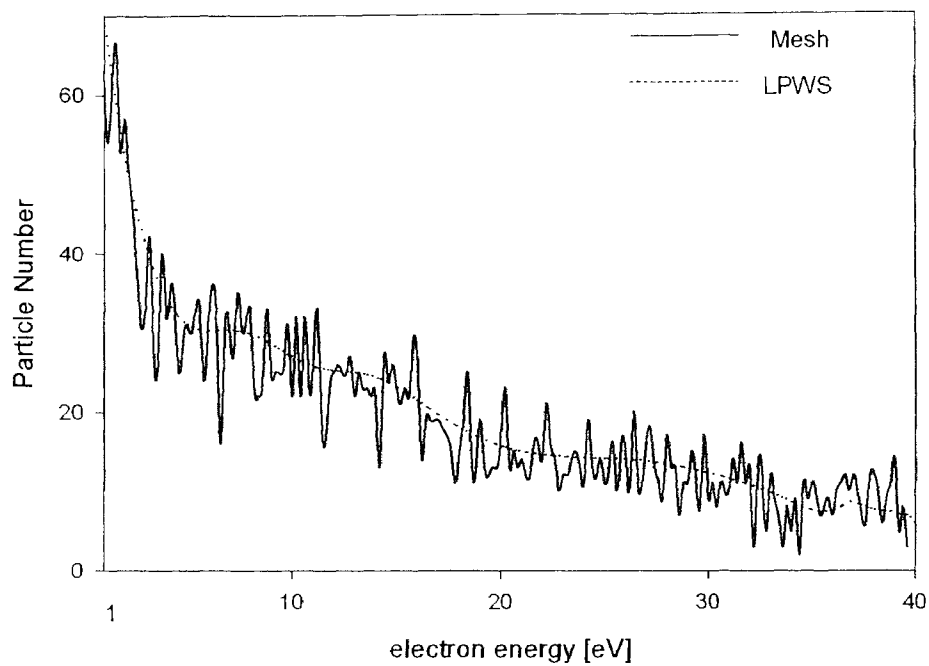


図 4-24 100ns 時の電子のエネルギー分布 1-40eV

参考文献

- [4-1] 栗木恭一, 荒川義博, 電気推進ロケット入門, 東京大学出版 (2003)
- [4-2] 平山美晴, 中北正人, “マイクロ波放電型イオンスラスタにおける電子サイクロトロン共鳴のシミュレーション”, 日本航空宇宙学会論文集, 47, 267 (1999)
- [4-3] S. Nakamura, P. L. G. Ventzek and K. Kitamori: J. Appl. Phys. 85 (1999) pp.2534-2539.
- [4-4] R.D.White, K.F.Ness and R.E.Robson: Velocity distribution functions for electron swarms in methane in electric and magnetic fields, J. Phys. D: Appl. Phys. 32(1999) pp.1842-1850.
- [4-5] R.D.White, M.J Brennan and K.F.Ness: Benchmark simulations for electron swarms in crossed electric and magnetic fields, J. Phys. D: Appl. Phys. 30(1997) pp.810-816.
- [4-6] K. Ness and T. Makabe: Electron transport in argon in crossed electric and magnetic fields, Phys. Rev. E 62 (2000) pp.4083.
- [4-7] H. Sugawara, T. Yahata, A. Oda and Y. Sakai, J. Phys.D: Appl. Phys., 33,(2000) pp.1191-1196.
- [4-8] R. D. White, R. E. Robson and K. F. Ness, IEEE Trans. Plasma Science, Vol.27, No.65, (1999) pp.1249-1253.
- [4-9] R. D. White, K. F. Ness and R. E. Robson, J. Phys. D: Appl. Phys., 32, (1999) pp.1842-1850.
- [4-10] 國中均, “無電極マイクロ波イオンスラスタの研究・開発”, 日本航空宇宙学会誌, 46, 174(1998)

## 第 5 章 結論

本論文では、イオンスラスタにおける弱電離プラズマの構造解析のために、モンテカルロ法による精緻な物理的境界の取り扱いと LPWS による統計変動を抑えたサンプリングを行いシミュレーションの精度向上を図った。さらに、常に変化する内部電界の影響を考慮するため、LPWS にスプライン関数表現を組み込み、スプライン関数とポアソン方程式の線形性を利用する高速電界計算法を開発し、その結果についてまとめた。

第 1 章においては、序論であり研究背景、イオンスラスタに関しての実験や研究、本論文の目的、各章の構成について述べた。

第 2 章においては、モンテカルロ法によるプラズマ・シミュレーションの方法について述べた。イオンスラスタにおいて、効率の良いイオン生成を実現する設計のために弱電離プラズマの構造を把握することが重要である。イオンスラスタでは、電界及び永久磁石から形成される磁界が組み合わさった複雑な体系であるため、プラズマの精緻な制御が必要とされ、プラズマの構造を決定づける粒子レベルの運動、反応過程を理解することが重要となり、本シミュレーションモデルの説明、電子の飛行時間の決定方法、Null Collision 法を用いた衝突判定方法および電子の散乱に関する計算として軌道の計算方法について述べた。

第 3 章においては、サンプリング法と高速電界計算法について述べた。モンテカルロ法による粒子モデルシミュレーションは、従来、統計変動を抑えるために試行回数を増やさなければならず、計算時間およびメモリの消費量が大きくなり計算が困難とされているとともに、より詳細なシミュレーションが求められており、計算時間を減少と計算精度の向上が求められる。サンプリング時の粒子数による統計変動を抑えることで、計算時間の減少とサンプリング精度の向上のために Ventzek らが提案している詳細なサンプリング方法である LPWS 法の適用方法を示している。LPWS 法は、少ないサンプリング個数でもルジャンドル多項式により重み付けサンプリングすることで、

ルジャンドル直交展開の形式により分布関数が得られ、従来から問題とされていた計算時間を減少させ、詳細なシミュレーションが可能であることを示している。またルジャンドル多項式以外の直交系をなす多項式においても同様にサンプリングが可能であり、LPWS をより一般化した形として直交展開サンプリングについて示し、精度に関してチェビシェフ多項式を利用した CPWS と LPWS との比較を行い多項式系の違いにより大きな差異はないことを示した。

さらに、実用的なシミュレーションに不可欠な、常に変化する内部電界を高速化する手法として、LPWS による分布のスプライン関数表現、スプライン関数とポアソン方程式の線形性を利用した高速電界計算法を示した。全体を少ない区間数で分割し各区間に対して LPWS により得られたルジャンドル直交展開時の係数をマクロパラメータとして満たす形で、スプライン関数の係数を決定することで精度を向上させた。また、スプライン関数表現された荷電粒子密度から即座に電界を計算可能であることを示した。

サンプリングと高速化の確認のため RF 平行平板プラズマプロセスシミュレーション定常状態時のサンプリングと電界計算を行い、さらに従来の計算法と計算時間の比較検討を行い、サンプリングが正しく十分な精度でなされること、従来の電界計算法と比較し高速である結果を得た。

第 4 章においては、電磁界での荷電粒子の運動とマイクロ波放電型イオンスラスタのシミュレーションを行った。磁界を考慮したプラズマ現象を明らかにするために必要とされる電界と磁界が任意の角度で交差する場でのシミュレーションを、特にイオンスラスタの推進剤に用いられることが多い Ar、Xe ガスについて行い、シミュレーション結果となる荷電粒子の輸送パラメータとして、0~90 度に至るまでの  $x$ ,  $y$ ,  $z$  軸方向の平均速度、平均エネルギー、平均衝突周波数および LPWS 法を用い、エネルギー分布について考察した。また、より現実的なシミュレーションとしてマイクロ波放電型イオンスラスタのプラズマ生成シミュレーションを行った。マイクロ波による電界と永久磁石による磁界が複雑に交差する場でのシミュレーションを行い

その結果について報告を行った。実験での報告とシミュレーションの動作が一致することを確認し、1次元、及び2次元のLPWSの適用により、少ない電子数でも詳細なエネルギー分布、電子密度分布のサンプリングが可能であることを示した。

以上本論文において、イオンスラスタのさらなる性能向上、改良のためにプラズマ生成シミュレーションについて放電室内の磁場形状及び放電室壁・電極について物理的境界を考慮したもとの、さらにLPWSにより統計変動を抑えて行う方法を示すとともに、より実用的なシミュレーションへの発展の布石として、LPWSのサンプリング結果から高速に内部電界を計算する方法を示した。本研究で示された高精度化及び高速化に寄与するシミュレーション技法は、実験との連携によりイオンスラスタの性能向上に大いに役立つと考えられる。

## 謝 辞

長年にわたり、懇切丁寧なご指導ご検討を賜りました北海道工業大学工学部北守一隆教授に心から感謝の意を表します。また、本論文執筆に際して多大なご指導ご検討を賜りました同工学部豊田国昭教授、太田佳樹教授、澤田孝幸教授、佐鳥新助教授に心から感謝の意を表します。また、研究室配属時からたくさんのご助言を頂きました、テックワークス鈴木卓真博士、札幌大学女子短期大学部堀江育也先生に心から感謝致しております。東京エレクトロン社 P.L.G.Ventzek 博士には長年にわたり貴重なご意見ご助言をいただき心から感謝致しております。また、シミュレーション時の作業において協力を頂いた北海道工業大学大学院古川哲也君に感謝致します。9年間という長い期間北海道工業大学へ通いたくさんの方々にお世話になりました。すべての北海道工業大学関係者に感謝致します。