

弾性支持された不均一な曲率を持つ積層偏平シェルの振動解析法

成田 大祐

Vibration Analysis of Elastically Supported Laminated Shallow Shells with Non-uniform Curvature

Daisuke Narita

1. 緒 言

様々な曲率を持つシェル構造は自動車を始め、色々な工業製品で見られる。特に自動車のボディにおいては、従来スチールやアルミニウム合金製が一般的であったが、最近は合成樹脂を使用したパネルも多くみられる。それらの中でも CFRP(炭素繊維強化プラスチック)は、その優れた比強度や比剛性のため、自動車への利用が増えている(1)。

一方、複合材の振動に関する研究は以前より盛んに行われており、特にボディパネルによく見られる不均一な曲率を持つ偏平シェルについても解析されている(2)(3)。しかしながら、それらのパネルの支持方式は、一般的な自由、単純、固定の3種の支持方式をベースにしたものであった。ところが、実際のパネルはこれらの支持方式だけでは、表現は不可能である。成田らは、図1のような4辺に沿って垂直バネと回転バネを使用した弾性支持された積層平板において、振動の最適化に関する研究を行っている(4)。

ここでは、積層平板ではなく、弾性支持された不均一な曲率を持つ積層偏平シェルに拡張する。そして、自動車のボンネットを想定し不均一な曲率を持つ CFRP 製偏平シェルにおいて、実際の支持方式に近似していると思われる弾性支持状態を仮定して、振動解析を行う。

2. 解析方法

図2のような上面から見て $a \times b$ の寸法となる長方形シェルの考える。これは、 xy 平面からのシェル中央面の高さ(シェル高さ)を ϕ とすると、 x, y の多項式(1)で近似できる。

$$\phi(x, y) = c_0 + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3 \quad (1)$$

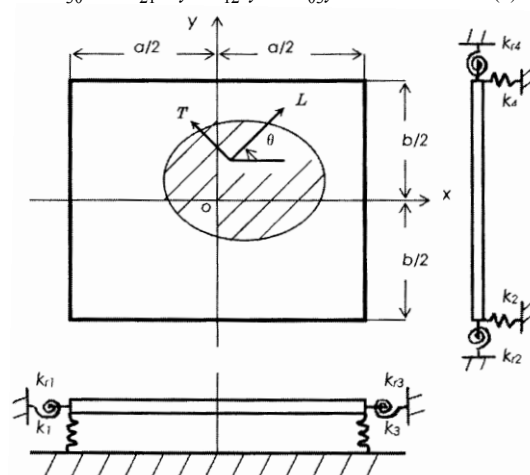


図1 弾性支持された積層平板

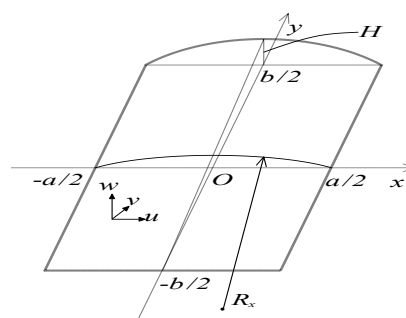


図2 不均一な曲率を持つ偏平シェルモデル

ここで c_0, c_{10}, \dots は未定係数であり、形状の主要点を選んで内挿を行い求める。本研究では、解析の手順を具体的に説明するための不均一な曲率形状の例として、先に示した自動車のボンネットをイメージした形状を仮定する。

$$\begin{aligned} \phi(-a/2, y) = \phi(a/2, y) = \phi(x, -b/2) = 0 \\ \phi(0, b/2) = H \end{aligned} \quad (2)$$

式(1)を式(2)に代入すると、この条件を満たす形状を表す近似関数は式(3)となる。

$$\phi(x,y) = \frac{H}{2} \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{2y}{b} \right) \right] \quad (3)$$

式(3)を2階微分すると、形状の傾きが急変しない仮定 $(\partial\phi/\partial x)^2 = (\partial\phi/\partial y)^2 = 0$ の下で x, y 方向の曲率は式(4)となる。

$$\frac{1}{R_x} = \frac{4H}{a^2} \left(1 + \frac{2y}{b} \right), \quad \frac{1}{R_y} = 0, \quad \frac{1}{R_{xy}} = \frac{8Hx}{a^2 b} \quad (4)$$

ここで扱うシェルはDonnell型のシェル理論に基づくと仮定する。Donnell型のシェル理論では、シェル中央面の変位 u, v, w とひずみ $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ の関係は、式(5)となる。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2w}{R_{xy}} \end{aligned} \quad (5)$$

従来の一定曲率シェルの解析との相違は、式(5)の曲率半径 R_x, R_y, R_{xy} が定数ではなく、式(4)により与えられる位置の関数となる点である。リッツ法を用いるため、シェル全体のエネルギーを評価する必要がある。シェル全体に蓄えられるひずみエネルギーは、式(6)となる。

$$V = V_s + V_{bs} + V_b + V_{bk} \quad (6)$$

ここで、 V_s は面内変形によるひずみエネルギー、 V_{bs} は面内と面外のカップリングによるひずみエネルギー、 V_b は面外変形によるひずみエネルギーであり、それぞれ、式(7)となる。

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{1}{2} \iint \{\epsilon\}^T [A] \{\epsilon\} dx dy \\ V_{bs} &= \frac{1}{2} \iint (\{\kappa\}^T [B] \{\epsilon\} + \{\epsilon\}^T [B] \{\kappa\}) dx dy \\ V_b &= \frac{1}{2} \iint \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} dx dy \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $\{\epsilon\}, \{\kappa\}$ はそれぞれひずみベクトル、曲率ベクトル、 $[A], [B], [D]$ は積層複合材の面内、面内と面外のカップリング、面外に関する剛性マトリクスである。シェル中央面から第 k 層外側までの距離を

z_k とすると、式(8)となる。

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 \bar{Q}_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) は各層において、繊維方向座標から $O-xy$ 座標に座標変換された縮約剛性係数であり、 k 層の縦弾性係数 E_L, E_T 、ポアソン比 ν_{LT} 、およびせん断弾性係数 G_{LT} (L 軸: 繊維方向, T 軸: L と直交方向) により定義される。

また、式(6)の V_{bk} は、シェルが弾性支持されていることから、面外変形によるひずみにより、垂直バネと回転バネに蓄えられるエネルギーで、式(9)となる。

$$\begin{aligned} V_{bk} &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} k_1 w^2 \left(-\frac{a}{2}, y \right) dy + \int_{-a/2}^{a/2} k_2 w^2 \left(x, -\frac{b}{2} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-b/2}^{b/2} k_3 w^2 \left(\frac{a}{2}, y \right) dy + \int_{-a/2}^{a/2} k_4 w^2 \left(x, \frac{b}{2} \right) dx \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\int_{-b/2}^{b/2} k_{r1} \left\{ \frac{dw}{dx} \left(-\frac{a}{2}, y \right) \right\}^2 dy + \int_{-a/2}^{a/2} k_{r2} \left\{ \frac{dw}{dy} \left(x, -\frac{b}{2} \right) \right\}^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-b/2}^{b/2} k_{r3} \left\{ \frac{dw}{dx} \left(\frac{a}{2}, y \right) \right\}^2 dy + \int_{-a/2}^{a/2} k_{r4} \left\{ \frac{dw}{dy} \left(x, \frac{b}{2} \right) \right\}^2 dx \right] \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、 k_i ($i=1, 2, 3, 4$) は垂直バネのバネ定数、 k_{ri} ($i=1, 2, 3, 4$) は回転バネのバネ定数である。

また、シェル全体の運動エネルギーは式(10)となる。

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \quad (10)$$

ここで、 ρ は単位体積あたりの質量、 h は板厚である。続いて、変位 u を式(11)のように定義する。

$$u(\xi, \eta, t) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} P_{ij} X_i(\xi) Y_j(\eta) \sin \omega t \quad (11)$$

ここで、 P_{ij} は未定係数であり、 $\xi = 2x/a$ および $\eta = 2y/b$ は無次元化座標である。 $X_i(\xi), Y_j(\eta)$ は「境界条件インデックス」を用いて、任意の境界上で幾何学的な条件を満足する関数であり、式(12)のように定義する。

$$\begin{aligned} X_i(\xi) &= \xi^i (\xi+1)^{bu1} (\xi-1)^{bu3} \\ Y_j(\eta) &= \eta^j (\eta+1)^{bu2} (\eta-1)^{bu4} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $bu1, bu2, bu3, bu4$ は u に関する長方形シェル各辺での境界条件インデックスである。 bu に続く各数字は長方形の各辺を意味しており、長方形左辺から反時計周りに 1 から 4 の順に対応している。境界条件インデックスの値が 1 の場合に固定(C と表記)を表し、0 の場合は自由(F と表記)を表す。 v, w についても式(11), (12)と同様であるが、面外変位 w に関しては 0 のとき自由、1 のとき単純支持(S と表記)、2 のとき固定を表す。

最大ひずみエネルギー V および最大運動エネルギー T の差により得られる汎関数 F に対して、それぞれの未定係数に関する極値を求めることで、式(13)のような不均一な曲率を有する複合材シェルの振動数方程式が導出できる。

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix} - \Omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} P_{ij} \\ Q_{kl} \\ R_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (13)$$

ここで、 $k_{ij}, m_{ij}(i, j=1,2,3)$ はそれぞれ剛性行列、質量行列の要素であり、 Q_{kl}, R_{mn} は式(11)と同様に v, w に関する未定係数である。式(13)より、式(14)のような無次元化された固有振動数である振動数パラメータ Ω が得られる。

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} \quad (14)$$

ここで、 $D_0 = E_T h^3 / 12(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})$ は基準剛性である。

計算例では、CFRP材の材料定数 ($E_L=138\text{GPa}$, $E_T=8.96\text{GPa}$, $G_{LT}=7.1\text{GPa}$, $\nu_{LT}=0.30$) を用いた。

3. 弾性支持による振動数解析

自動車ボンネットを仮定した図2に示したような不均一な曲率を持つ偏平シェルについて、計算を行う。形状パラメータは厚さ比 ($h/a=0.01$)、アスペクト比 ($a/b=1$) の一定値、変位の項数 (M, N など) は全て 10 とした。高さ比 H/a は、0.0251 とする。この値は、本モデルの最大高さ H が円筒形シェルの $a/R_s=0.2$ の高さ一致するよう決めた。積層条件は、対称な八層アングルプライ積層 $[(\theta-\theta)_2]_s(\theta$ は図12の x 軸と繊維方向の角度, S は対称の意) とし、その

角度を 45° とした。なお、以後 45° を 45 と記し、角度 ($^\circ$) の記号を略する。

図 3(a) に全周自由 (F-F-F-F) から全周単純支持 (S-S-S-S) まで垂直バネのバネ定数を徐々に大きくしていった場合、(b) に S-S-S-S から全周固定 (C-C-C-C) まで回転バネのバネ定数を大きくしていった場合の下から順に 1 次から 5 次の振動数の変化を示す。この結果より、F-F-F-F から S-S-S-S、および S-S-S-S から C-C-C-C へはほぼ連続的に変化していることが分かる。なお、F-F-F-F と S-S-S-S、および C-C-C-C に関しては、文献(3)にて汎用 FEM である ANSYS にて、正しい値であることが示されている。これらの結果より、本計算による値がほぼ正しいことが分かる。なお、横軸はそれぞれのバネ定数を無次元化したものである。

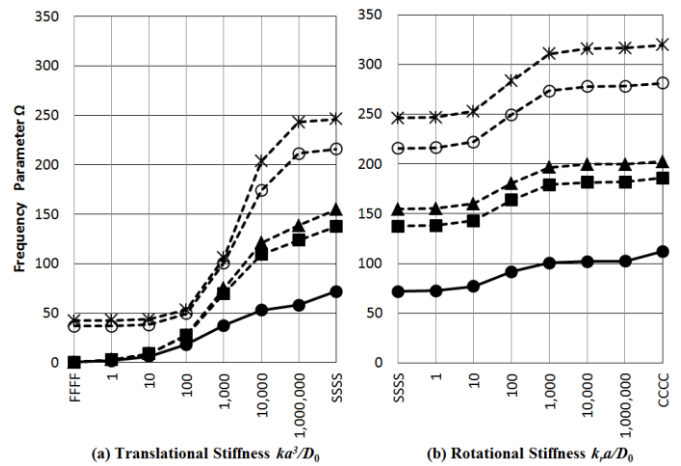


図 3 弾性支持された不均一な曲率を持つ偏平シェル $[(45/-45)_2]$ の振動数

4. 自動車ボンネットの取付方式

自動車のボンネットの取り付け方式は大きく分けて、図4のような一般的な前部が開くアリゲータタイプ、図5のような旧車によく使用されていた後部が開くチルトタイプ、そして図6のようなFRP製のフェンダ一体型ボンネットに多い特殊なタイプの3タイプに分ける事ができる。しかしながら、現在はアリゲータタイプがほとんどであることから、今回もこのタイプを前提とする。



図4 アリゲータタイプ



図8 ストライカ



図5 チルトタイプ



図9 フードロック



図6 特殊タイプ (Wikipedia より)



図10 ゴムブッシュ

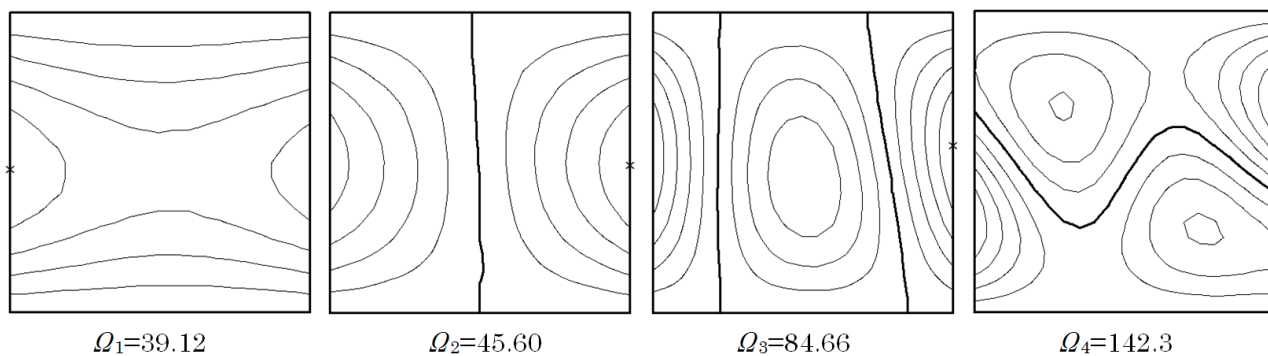


図7 ヒンジ

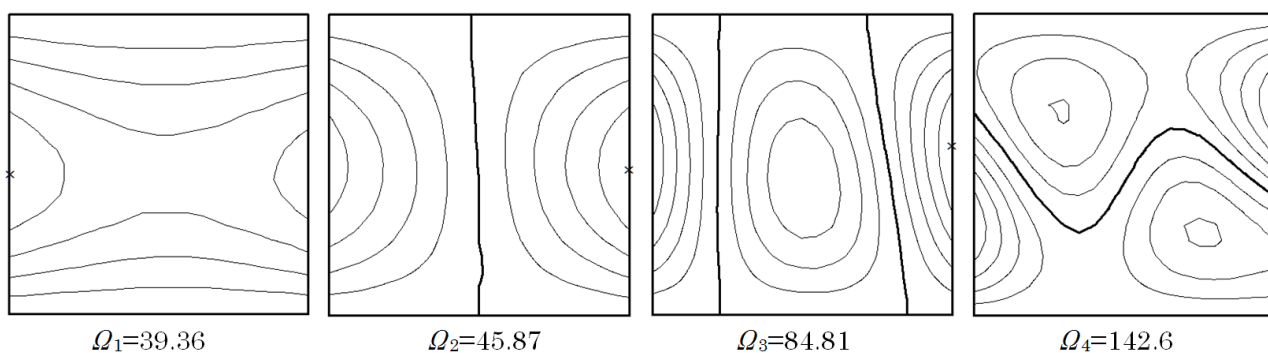


図11 ボンネット例 (<http://www.mazda.co.jp/>より)

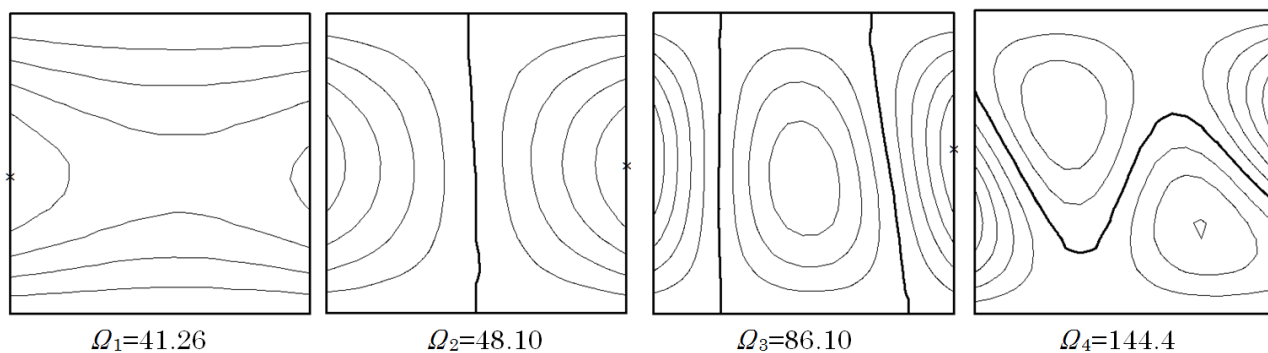
F-S-F-S



FE($k=1$)-S-FE($k=1$)-SE($k_r=1$)



FE($k=10$)-S-FE($k=10$)-SE($k_r=10$)



FE($k=10^2$)-S-FE($k=10^2$)-SE($k_r=10^2$)

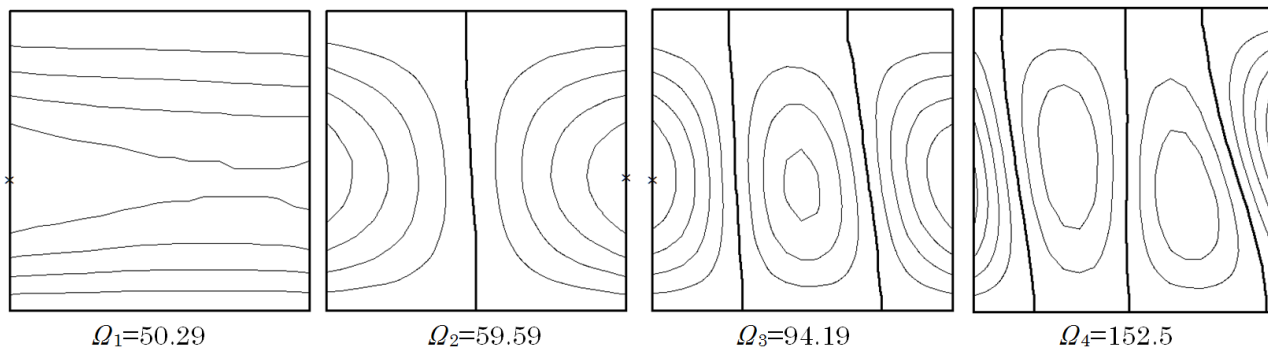
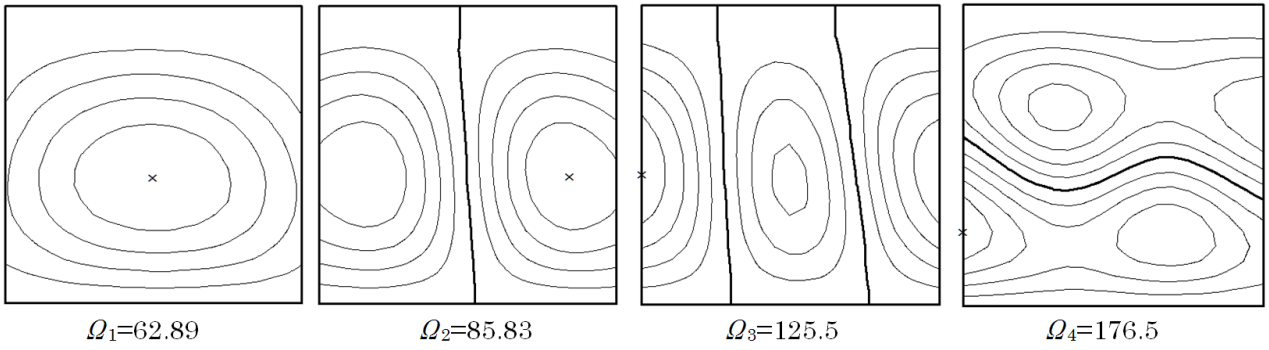
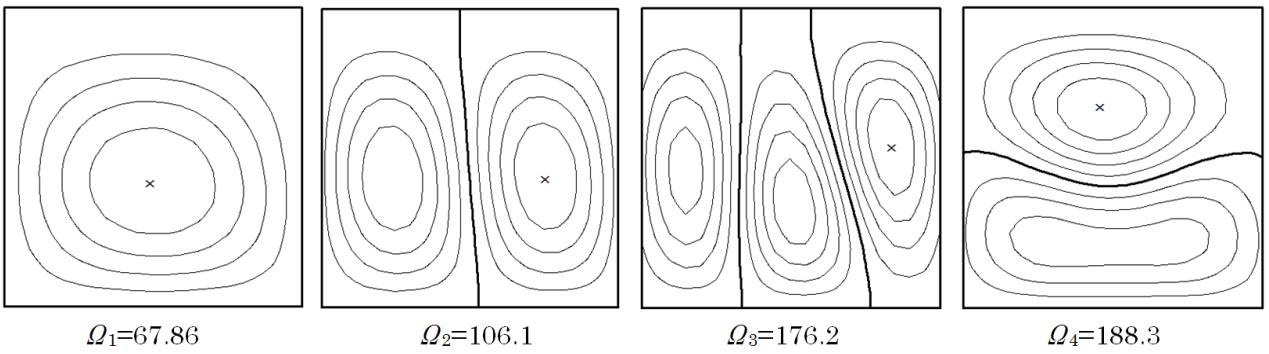


図 12 (続)

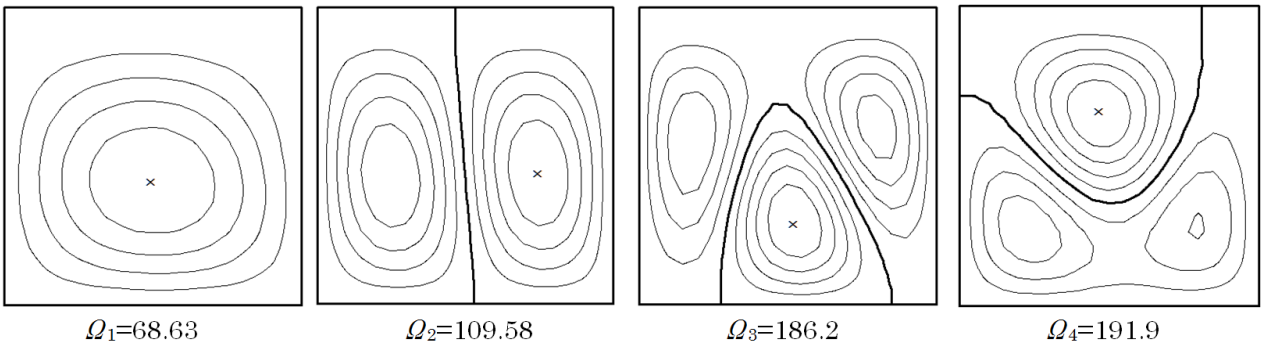
FE($k=10^3$)-S-FE($k=10^3$)-SE($k_r=10^3$)



FE($k=10^4$)-S-FE($k=10^4$)-SE($k_r=10^4$)



FE($k=10^6$)-S-FE($k=10^6$)-SE($k_r=10^6$)



S-S-S-C

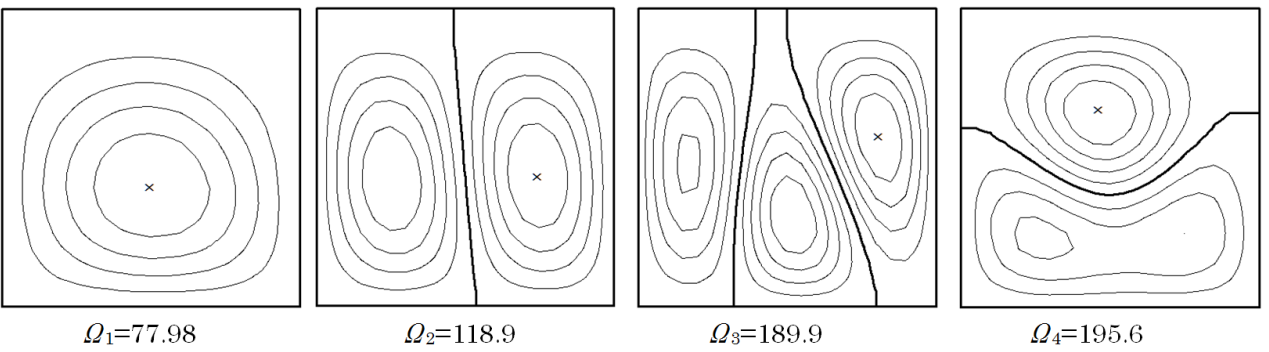


図12 弾性支持されたボンネットの振動数とモード形

アリゲータタイプの場合、リア部（フロントウィンドシールド側）は、図 7 のようなヒンジ、フロント部は図 8 のようなストライカと図 9 のようなフールドロックからなっており、サイド部はフリーであるが、ちょうどフロント部とサイド部を同時に押さえるために、図 10 のようなゴムブッシュが取り付けられているものがほとんどである。

これらのボンネットの支持方式は前述した 3 種の支持方式（自由、単純支持、固定）では表現できないことは明らかである。なぜなら、フロント部とサイド部はゴムブッシュが、下方向の動きを押さえているからである。せいぜいリア部が単純支持と仮定できる程度である。もしゴムブッシュが存在しないとすれば、サイド部は自由、フロント部は単純支持と仮定できなくもない。ここでは、ゴムブッシュの存在により、サイド部は垂直バネによる弾性支持、フロント部は回転バネによる弾性支持と仮定する。弾性支持を E と表すと今回の仮定は自動車正面から見たとすると、FE-SE-FE-S となる。

5. ボンネットを仮定した支持方式の振動解析

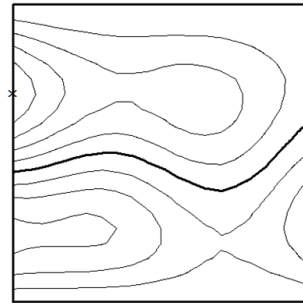
今回、最近良く見られる図 11 のようなフロントグリルが大きく、ボンネットのフロント部が湾曲した形状を仮定し、あえて図 2 の y 軸の正方向をフロント側としたボンネットを考える。積層条件に関しては $[(90/45/-45/0)]_2$ という擬似等方性とし、他の条件は図 3 と同様とする。

図 11 にバネ定数を変化させた場合の 1 次から 4 次までの振動数と振動モードを示す。なお、前記したように図の上がボンネットのフロント側、下がリア側となる。比較のため、F-S-F-S ($k=0, k_r=0$) と S-S-S-C ($k=\infty, k_r=\infty$) も記載した。また、図上の \times 印は最大変位点を、太線は変位ゼロの節線を表している。

まず、振動数に関しては支持するバネ定数が大きくなると、1 次から 4 次まで、すべてが大きくなっていることが分かる。

モード形に関しては、支持するバネ定数が大きくなると、全体的に最大変位点がサイド部にあったものが、徐々に中心方向に移動している。特に 1 次振動では、バネ定数が 10^2 以前において、 x 軸方向のモード形が表れ、それ以降では円形に変化し、この傾向が顕著に表れている。2 次振動では、 y 軸方向に節線と 2 つの山(谷)が表れ、同様な傾向となっている。3 次振動では、バネ定数が 10^6 のモード形のみ、節線が特徴的なものになっているが、全体的に同様な傾向となっている。4 次振動では、バネ定数が小さい場合に x 軸方向に節線と 4 つの山(谷)が表れ、それが徐々に 2 つの山(谷)に変化している。唯一バネ定数が 10^2 の場合の 4 次のモード形が他と異なっているが、図 13 に示すように 5 次のモード形

にちょうど 10 と 10^3 の中間的なモード形が表れている。



$$\Omega_5=158.6$$

図 13 FE($k=10^2$)-S-FE($k=10^2$)-SE($k_r=10^2$)における 5 次の振動数とモード形

6. 結 言

今回は、弾性支持の例として自動車のボンネットを仮定したが、実際のボンネットは図 10 の通りサイド部は下方向の動きはゴムブッシュで制限されるが、上方向は実質的に自由であり、またフロント部はキャッチ部分の一点で支えることになるのと、サイド部と同様に下方向の動きはゴムブッシュで制限されるが、上方向は自由である。リア部の単純支持が最も近い仮定と考えられるが、実際は左右 2 点で支持されており、その支持部も奥まった位置となっている。今後は、より現実の支持方式に近い振動解析法、及び座屈解析法に関して研究を行いたいと考えている。

参 考 文 献

1. 成田大祐：CFRP 製自動車ボンネットの最適設計について、北海道自動車短期大学研究紀要、第 39 号, pp.10-16 (2014)
2. 成田大祐, 成田吉弘：不均一な曲率を持つ積層偏平シェルの振動解析法、日本機械学会論文集(C 編), Vol.72, No.724, pp.3743-3750 (2006)
3. 成田大祐：種々の曲面を持つ積層偏平シェルの解析と最適設計に関する研究、北海道大学博士学位論文報告番号 8582, Vol.32, p.200 (2008)
4. Y. Narita, S. Honda : Vibration Optimization of Laminated Composite Rectangular Plates with General Elastic Edge Restraints, Proceeding of the US-Japan conference of Composite Materials ASTM-D30 Meeting ,pp.284-295 (2012)